Vörös József

Degeneráció és szingularitás a pénzbefektetéses analízisben

Bevezetés

A pénzbefektetés analízis beruházója b nagyságú tőkéjét n helyre fektetheti be. A tervperiódus elején az i-edik helyre invesztált összeg nagyságát jelölje x_i, $i = 1, \ldots, n$, mely a peródus végén $\xi_i x_i$ nagyságú hozamot biztosít, és ξ_i-k egy ismert típusú együttes valószínűség-eloszlásfüggvénnyel rendelkeznek. A beruházó úgy választja meg az x_i értékeket, hogy azok maximalizálják $u(\boldsymbol{\xi}'\mathbf{x})$ hasznosságfüggvényét (a vonás transzponáltat jelöl és $\boldsymbol{\xi}' = [\xi_1, \ldots \xi_n]$, $\mathbf{x} = [x_1, \ldots x_n]$). Feltesszük, hogy $u \in U$, ahol U a nem csökkenő, folytonosan differenciálható konkáv hasznosságfüggvények osztálya; másként megfogalmazva ez azt jelenti, hogy beruházónk kockázatérzékeny.

Beruházónk problémáját az alábbi módon fogalmazhatjuk meg:

$$E_\xi\{u(\boldsymbol{\xi}'\mathbf{x})\} \to \max \tag{1a}$$

$$\mathbf{1}'\mathbf{x} = b \tag{1b}$$

$$\mathbf{x} \in K, \tag{1c}$$

ahol E_ξ várható értéket jelöl a $\boldsymbol{\xi}$ valószínűségi vektorra vonatkozóan, K pedig az x_i változókra egy további feltételeket megfogalmazó konvex halmaz. (Az $\mathbf{1}$ vektor az ún. összegző vektor, azaz $\mathbf{1}' = [1, \ldots, 1]$.)

A $\boldsymbol{\xi}'\mathbf{x}$ várható értékét jelölje C, varianciáját pedig Z^2. Tobin [4]-ban megmutatta, hogy a fenti kitételeknek eleget tevő hasznossági függvények közömbösségi görbéi a (C, Z) síkban monoton növekvőek és konkávak; emellett, ha a ξ_i-k együttes eloszlása normális, akkor az (1) feladatot az alábbi módon lehet megoldani:

– meg kell állapítani a valószínűségeloszlás paramétereit,

– elő kell állítani a hatékony (adott C-hez a legkisebb Z-t adó) befektetési kombinációk halmazát,

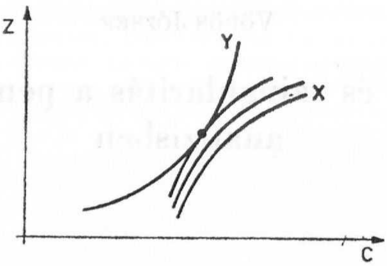
– a beruházó közömbösségi görbéjének megfelelően ki kell választani a maximalizáló kombinációt.

(Lásd az 1. ábrát, ahol X a közömbösségi görbesereget, Y pedig a hatékony kombinációk (C, Z) értékeit jelöli.)

A hatékony kombinációk halmazát *Merton* az alábbi feladat explicit megoldásával állította elő:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}'\mathbf{x} &= b \\ \mathbf{a}'\mathbf{x} &= C \\ \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} &\to \min, \end{aligned} \tag{2}$$

ahol $E(\xi_i) = a_i$; és $v_{ij} = \mathrm{cov}\,(\xi_i, \xi_j)$, továbbá $\mathbf{a}' = [a_1, \ldots a_n]$ és $\mathbf{V} = [v_{ij}]$.



1. ábra. A döntés

A változókra vonatkozó nemnegativitási feltételt (2)-höz csatolva [5] tanulmány szintén explicit megoldást közöl. Az eljárás különösen hatékony azon esetekben, amikor létezik (2)-ben C-nek olyan $(C_0; C_1)$ nyílt intervalluma, melyben az optimális megoldás valamennyi komponense pozitív. A tanulmány bizonyítja, hogy a C_0 pontban zéróvá váló változó a $C \leq C_0$ intervallumban végig zéró marad, következésképpen ebben az intervallumban a rendszerből elhagyható. Ha a C_0 pontban több változó válik zérussá, a tanulmány más eljárásokhoz hasonlóan perturbációt javasol. A következő fejezet azt bizonyítja, hogy ha ebben a C_0 pontban több változó válik zérussá, ezek mindegyike a $C \leq C_0$ intervallumban zéró.

A pénzbefektetés-elméletben állandósult feltevés, hogy a kovariancia-variancia mátrix nem szinguláris. Ez fontos kitétel volt mind a [2] mind az [5] tanulmányban. A cikk utolsó fejezete ezen kitételt oldja fel és explicit megoldását adja a (2) feladatnak, amikor a kovariancia-variancia mátrix szinguláris (pozitív szemidefinit).

1. A degeneráció kezelése

Legyen tehát adott az alábbi n változós $(n > 2)$, C-ben paraméteres kvadratikus programozási feladat:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{o} \tag{3a}$$

$$\mathbf{1}'\mathbf{x} = b \tag{3b}$$

$$\mathbf{a}'\mathbf{x} = C \tag{3c}$$

$$-\frac{1}{2} Z_+^2(C) \equiv \max\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}\right\}. \tag{3d}$$

Legyen m olyan index, melyre $1 < m < n$, továbbá legyen $M = \{i \mid 1 \leq \leq i \leq m\}$; $N = \{i \mid m+1 \leq i \leq n\}$ és $\mathbf{E}$ olyan mátrix, mely $\mathbf{E} = \begin{bmatrix}\mathbf{O} \\ \hline \mathbf{I}\end{bmatrix}$, ahol $\mathbf{O}$ egy $m \times (n-m)$-es zéró mátrix, az $\mathbf{I}$ pedig egy $(n-m) \times (n-m)$-es egységmátrix.

1. *tétel*: A (3) feladatban a kovariancia-variancia mátrix legyen pozitív definit, a $C_0 < C < C_1$ intervallumban pedig az optimális megoldás valamennyi komponense pozitív értékű. A C_0 pontban legyen $x_i = 0$, $i \in N$; $x_i > 0$, $i \in M$,

valamint az $\mathbf{a}$ vektor első m komponense között legyenek különbözőek. Ekkor a $C \leqq C_0$ intervallumban a (3) feladat megoldását az

$$\begin{gathered} \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \\ \mathbf{1}'\mathbf{x} = b \\ \mathbf{a}'\mathbf{x} = C \\ \mathbf{E}'\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2} Z_+^2(C) = \max\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}\right\} \end{gathered} \tag{4}$$

feladat megoldása adja.

A tétel megfogalmazásához néhány megjegyzést fűzünk: a feltételek szerint a (3) feladat optimális megoldása azzal az előnyös tulajdonsággal rendelkezik, hogy a $(C_0; C_1)$ intervallumban valamennyi komponense pozitív. Ebben az intervallumban a (3) feladat tehát ekvivalens a (2) feladattal, következésképpen *Lagrange*-problémaként is felfogható. Ezen Lagrange-megoldás utolsó $(n - m)$ komponense zéróvá válik a C_0 pontban, így a (3) feladat és a (4) feladat ebben a pontban ekvivalens. A (4) feladat m változós problémaként is kezelhető, mely szintén rendelkezik azon tulajdonsággal, hogy létezik olyan C, például a C_0, amelyben az optimális megoldás valamennyi komponense pozitív. Így, ha tételünket bizonyítjuk, a (3) feladat megoldását — a kimondott feltételek mellett — olyan előjelkötetlen feladatok megoldásának sorozataként állítjuk elő, melyek mérete minden iterációs lépésben csökken.

Bizonyítás: A 3. feladathoz a

$$\Phi(x, u) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} + u_1(b - \mathbf{1}'\mathbf{x}) + u_2(C - \mathbf{a}'\mathbf{x})$$

Lagrange-függvény tartozik, a *KT* feltételeket pedig az alábbi rendszer fogja össze:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{V}\mathbf{x} - \mathbf{1}u_1 - \mathbf{a}u_2 \leqq \mathbf{0}; \tag{5a}$$

$$\mathbf{1}'\mathbf{x} = b \tag{5b}$$

$$\mathbf{a}'\mathbf{x} = C \tag{5c}$$

$$\mathbf{x}'\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = 0 \tag{5d}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}. \tag{5e}$$

Ezután tekintsük a

$$\begin{gathered} \mathbf{1}'\mathbf{x} = b \\ \mathbf{a}'\mathbf{x} = C \\ \mathbf{E}'\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2} Z^2(C) = \max\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}\right\} \end{gathered} \tag{6}$$

feladatot. Az 1. tételben kimondott feltételek mellett a változók folytonossága miatt a C_0-nak biztosan létezik olyan környezete, melyben a (6) feladat ekvivalens a (4) feladattal. Most megmutatjuk, hogy a C_0-nak létezik olyan bal oldali környezete, melyben a (6) feladat optimális megoldása kielégíti a (3) feladat (5) alatti KT feltételeit.

A (6) feladathoz tartozó Lagrange-függvény az alábbi:

$$\Phi(x, u) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} + u_1(b - \mathbf{1}'\mathbf{x}) + u_2(C - \mathbf{a}'\mathbf{x}) - \mathbf{x}'\mathbf{E}\mathbf{u}_3,$$

ahol az $\mathbf{u}_3$ vektor $(n - m)$ Lagrange szorzót tartalmaz.

A (6) feladathoz csatolandó elsőrendű feltételeket az alábbi egyenlőségek fogják össze:

$$-\mathbf{V}\mathbf{x} - \mathbf{1}u_1 - \mathbf{a}u_2 - \mathbf{E}\mathbf{u}_3 = \mathbf{0} \tag{7a}$$

$$\mathbf{1}'\mathbf{x} = b \tag{7b}$$

$$\mathbf{a}'\mathbf{x} = C \tag{7c}$$

$$\mathbf{E}'\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{7d}$$

(7a)-ból $\mathbf{V}$ pozitív definit volta miatt

$$\mathbf{x} = -\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}u_1 - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{a}u_2 - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{u}_3. \tag{8}$$

Legyen $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{M}$, $f = \mathbf{1}'\mathbf{M}\mathbf{1}$; $d = \mathbf{a}'\mathbf{M}\mathbf{1}$; $e = \mathbf{a}'\mathbf{M}\mathbf{a}$, és az $\mathbf{M}$ mátrixot particionáljuk az alábbi módon:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix},$$

ahol az $\mathbf{M}_{11}$ mátrix $m \times m$-es, és $\mathbf{M}$ particionálásának megfelelően $\mathbf{a}' = [\mathbf{a}_1'; \mathbf{a}_2']$, ahol $\mathbf{a}_1$ m elemű vektor.

(8)-ból:

$$\begin{aligned} b &= \mathbf{1}'\mathbf{x} = -fu_1 - du_2 - \mathbf{1}'\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}\mathbf{u}_3 \\ C &= \mathbf{a}'\mathbf{x} = -du_1 - eu_2 - \mathbf{a}'\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_2^2 \end{bmatrix}\mathbf{u}_3, \end{aligned} \tag{9}$$

és mivel az $\mathbf{x}$ vektor utolsó $(n - m)$ komponense zéró, szintén (8) felhasználásával:

$$\mathbf{0} = -\mathbf{M}_2\mathbf{1}u_1 - \mathbf{M}_2\mathbf{a}u_2 - \mathbf{M}_{22}\mathbf{u}_3,$$

melyből $\mathbf{V}$ pozitív definit volta miatt

$$\mathbf{u}_3 = -\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{1}u_1 - \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{a}u_2. \tag{10}$$

$\mathbf{u}_3$ értékét (9)-ben felhasználva

$$\begin{aligned} b &= -u_1(f - \hat{f}) - u_2(d - \hat{d}) \\ C &= -u_1(d - \hat{d}) - u_2(e - \hat{e}), \end{aligned} \tag{11}$$

ahol

$$\hat{f} = \mathbf{1}' \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{1}; \quad \hat{e} = \mathbf{a}' \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{a};$$

$$\hat{d} = \mathbf{1}' \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{a}.$$

Felhasználva az

$$f - \hat{f} = \tilde{f}; \quad d - \hat{d} = \tilde{d}; \quad e - \hat{e} = \tilde{e}$$

egyszerűsítő jelölést (11) az alábbi formában írható fel:

$$\begin{aligned} b &= -u_1\tilde{f} - u_2\tilde{d} \\ C &= -u_1\tilde{d} - u_2\tilde{e}. \end{aligned} \tag{12}$$

Az $\hat{e}$, $\hat{f}$, $\hat{d}$ meghatározásánál szerepet játszó mátrixoknál a kijelölt műveletet elvégezve kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix},$$

melynek felhasználásával:

$$\tilde{f} = \mathbf{1}' \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{1} = \mathbf{1}'\mathbf{G}\mathbf{1},$$

$$\tilde{e} = \mathbf{a}'\mathbf{G}\mathbf{a}, \text{ és } \tilde{d} = \mathbf{a}'\mathbf{G}\mathbf{1}.$$

Tekintsük ezek után a

$$\varphi(\lambda) = (\mathbf{a} - \lambda\mathbf{1})'\mathbf{G}(\mathbf{a} - \lambda\mathbf{1}) = \tilde{f}\lambda^2 - 2\tilde{d}\lambda + \tilde{e}$$

másodfokú függvényt, melynek diszkriminánsa

$$\tilde{d}^2 - \tilde{e}\tilde{f}.$$

Az $\mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{21} = \mathbf{V}_{11}^{-1}$ blokk pozitív definit volta miatt a $\varphi(\lambda)$ ezért csak akkor zéró, ha $\mathbf{a}_1 = \lambda\mathbf{1}$; feltételünk szerint azonban az $\mathbf{a}$ vektor első m komponense között különbözőek is vannak, melyből következik, hogy $\tilde{e}\tilde{f} - \tilde{d}^2 > 0$. Az $\tilde{e}\tilde{f} - \tilde{d}^2$ egyúttal determinánsa is a (12) egyenletrendszernek, melyből következően (12)-nek az $\mathbf{a}_1 \neq \lambda\mathbf{1}$ kikötés mellett egyértelmű megoldása van u_1, u_2-re:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\tilde{e}b - \tilde{d}C}{\tilde{e}\tilde{f} - \tilde{d}^2} \\ u_2 &= -\frac{\tilde{f}C - \tilde{d}b}{\tilde{e}\tilde{f} - \tilde{d}^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

(10)-ben felhasználva ezen eredményt

$$(\tilde{e}\tilde{f} - \tilde{d}^2)\mathbf{u}_3 = (\tilde{f}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{a} - \tilde{d}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{1})C + (\tilde{e}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{1} - \tilde{d}\mathbf{M}_{22}^{-1}\mathbf{M}_2\mathbf{a})b,$$

tehát $\mathbf{u}_3$ valamennyi komponense C-nek lineáris függvénye. A $C = C_0$ helyen $\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$, mivel az (5a) feltételek egyenlőség formájában teljesülnek, és C_0 jobb oldali környezetében $\mathbf{u}_3$ valamennyi komponense pozitív, hiszen ha azok között akár egy is negatív lenne, azt eredményezné, hogy C_0 jobb oldali környezetében (3)-nak létezik olyan optimális megoldása, melyben egy változó értéke zéró, míg a többi pozitív. Ez azonban ellentmond annak, hogy (3)-nak ezen környezetben minden változója pozitív. Következésképpen: C_0 bal oldali környezetében $\mathbf{u}_3$ valamennyi komponense negatív, ami annyit jelent, hogy $i \in N$-re x_i-k zéróra állítása a KT feltételeket kielégíti; továbbá C_0-nak létezik olyan bal oldali környezete, melyben $x_i > 0 \ \forall i \in M$-re, szintén a változók folytonossága miatt. A változók ezen státusa — hogy $x_i > 0 \ \forall i \in M$-re és $x_i = 0 \ \forall i \in N$-re — mindaddig kielégíti a KT feltételeket, míg az M indexhalmaz újabb elemeihez tartozó változók zéróvá nem válnak. Ezen C_{-1}-ben $\mathbf{u}_3$ valamennyi komponense ugyanúgy negatív mint C_{-1} jobb oldali környezetében, tehát a (3) feladat megoldását a $C \leq C_0$ intervallumban a (4) feladat megadja, melyből az utolsó $n - m$ változót elhagyva, a visszamaradó feladat szintén azzal a tulajdonsággal bír, hogy létezik C-nek olyan intervalluma, melyben minden változó pozitív. Eredeti feladatunkat így visszavezettük egy méretében redukált feladatra.

Beruházónknak legyenek az alábbi tulajdonsággal bíró befektetési helyei:

$$b = 1; \quad \mathbf{a}' = [1; 1; 2; 3], \text{ és}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & & & \\ & 0{,}2 & & \\ & & 0{,}2 & \\ & & & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Mint ismeretes,

$$\mathbf{x} = -\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}u_1 - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{a}u_2,$$

ahol (12)-höz hasonlóan

$$u_1 = -\frac{eb - dC}{ef - d^2}$$

$$u_2 = \frac{fC - db}{ef - d^2},$$

valamint

$$Z^2(C) = \frac{fC^2 - 2dbC + eb^2}{ef - d^2}.$$

Az alábbi értékekre van tehát szükségünk:

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 & & & \\ & 5 & & \\ & & 5 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M1} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Ma} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix};$$

$$f = 22; \quad d = 31; \quad e = 53; \quad ef - d^2 = 205.$$

Ezek felhasználásával:

$$x_1 = (-90C + 220)/205$$
$$x_2 = (-45C + 110)/205$$
$$x_3 = (\ \ 65C - \ \ 45)/205$$
$$x_4 = (\ \ 70C - \ \ 80)/205$$

A kifejezések alapján az $\mathbf{x} \geq \mathbf{o}$ egyenlőtlenségrendszert C-re megoldva kapjuk:

$$C \leq 220/90 = 2{,}44$$
$$C \leq 110/45 = 2{,}44$$
$$C \geq \ 45/65 = 0{,}69$$
$$C \geq \ 80/70 = 1{,}14,$$

tehát $C_0 = 1{,}14$; $C_1 = 2{,}44$ és így a $C_0 < C < C_1$ intervallumban valamennyi változó pozitív, a C_1-ben pedig az x_1 és x_2 változók válnak zéróvá. A $C \geq C_1$ intervallumban ezeket elhagyva, a redukált feladat inputjai:

$$\mathbf{a}' = [2; 3]; \qquad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & \\ & 0{,}5 \end{bmatrix},$$

és mivel csak két változónk van, ezek a $2 < C < 3$ intervallumban biztosan pozitív értékűek.

Egyébként: $f = 7$; $d = 16$; $e = 38$ és $ef - d^2 = 10$.

A $C = 1{,}14$ pontban $x_4 = 0$, ezért $C \leq 1{,}14$-ben a negyedik alternativát törölve feladatunk inputjai:

$$\mathbf{a}' = [1; 1; 2]; \quad b = 1; \text{ és}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & & \\ & 0{,}2 & \\ & & 0{,}2 \end{bmatrix}.$$

Ezekből

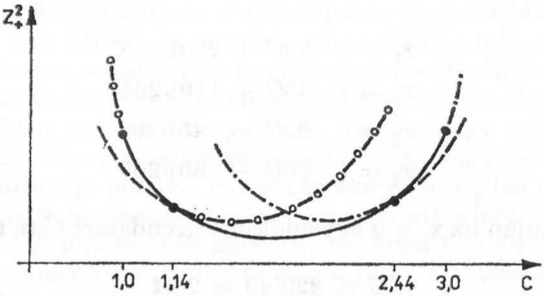
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 & & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M1} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Ma} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix},$$

és $f = 20$; $d = 25$; $e = 35$ valamint $ef - d^2 = 75$.

$$x_1 = (-50C + 100)/75$$
$$x_2 = (-25C + \ \ 50)/75$$
$$x_3 = (\ \ 75C - \ \ 75)/75,$$

melyből

$$C \leq 2$$
$$C \leq 2$$
$$C \geq 1.$$



2. ábra

Számításainkat az alábbi táblázat foglalja össze:

Intervallum	Változók értékei			
	x_1	x_2	x_3	x_4
C = 1	2/3	1/3	0	0
1 < C < 1,14	(−2C+4)/3	(−C+2)/3	C−1	0
1,14 ≤ C < 2,44	(−18C+44)/41	(−9C+22)/41	(13C−9)/41	(14C−16)/41
2,44 ≤ C < 3	0	0	−C+3	C−2
C = 3	0	0	0	1

Az egyes intervallumokhoz tartozó parabola ívek egyenlete, illetve az egyes pontokhoz tartozó értékek az alábbiak:

$$1/15$$
$$(4C^2 - 10C + 7)/15$$
$$(22C^2 - 62C + 53)/205$$
$$(7C^2 - 32C + 38)/10$$
$$0{,}5$$

Ezen leképezéseket a 2. ábra foglalja össze.

A táblázatnak megfelelően az (1,14; 2,44) intervallumban mind a négy változó pozitív, a $C = 2{,}44$ pontban az első két változó zéróvá válik és egy olyan parabola ív simul az előzőhöz, melyet két változó — az x_3 és x_4 — feszít ki. Kiemelendő még, hogy a Z_+^2 függvény folytonosan differenciálható, ugyanis a parabolaívek nem metszik egymást. (A 2. ábrán a Z_+^2 függvényt a folytonos vonal jelöli.)

2. Az általános szingularitás

A szinguláris eset a kockázat nélküli letét köntösében már régóta jelen van a pénzbefektetés-elméletben. Legyen ugyanis n kockázatos befektetési helye egy beruházónak oly módon, hogy a hozzátartozó kovariancia-variancia mátrix nem-szinguláris (pozitív definit). Ha most a befektetési helyek számát a kockázat nélküli letéttel vagy hitelfelvétellel bővítjük, az eset úgy is felfogható, hogy a $\mathbf{V}$ kovariancia-variancia mátrixot zéró oszlop és sorvektorral bővítjük, ezzel mátrixunk szinguláris – és így pozitív szemidefinit lesz. A TOBIN, SHARPE, LINTNER ([4], [3], [1]) vonal nyomán ismeretes, hogy ebben az esetben a $Z(C)$ függvény lineáris, MERTON [2]-ben pedig megadta ennek egyenletét előjelkötetlen esetre. [5] alapján ismert $Z_+(C)$ formája előjelkötött esetre. Mivel az általános (többszörös) szingularitás összefüggései előjelkötetlen esetre sem ismertek, a $Z^2(C)$ függvény meghatározását ezzel az esettel kezdjük.

Legyen adott az alábbi n változós feladat:

$$\begin{gathered}\mathbf{1}'\mathbf{x} = b\\ \mathbf{a}'\mathbf{x} = C\\ -\frac{1}{2}Z^2(C) \equiv \max\left\{-\frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}\right\},\end{gathered} \tag{13}$$

ahol a $\mathbf{V} = [v_{ij}]$ mátrix $n\times n$-es és rangja m. Ennek megfelelően particionálva a mátrixot:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix}\mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12}\\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22}\end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{V}_{11}$ $m\times m$-es nem-szinguláris blokk, és ennek megfelelően $\mathbf{a}' = [\mathbf{a}_1'; \mathbf{a}_2']$. Legyen

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{1}' - \mathbf{1}'\mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{V}_{12}\\ \boldsymbol{\beta}' = \mathbf{a}_2' - \mathbf{a}_1'\mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{V}_{12},\\ f = \mathbf{1}'\mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{1}; \quad e = \mathbf{a}_1'\mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{a}_1; \quad d = \mathbf{a}_1'\mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{1}.\end{gathered}$$

2. *tétel*: A (13) feladatban

$$Z^2(C) = \begin{cases} 0, \text{ ha } \boldsymbol{\alpha} \text{ és } \boldsymbol{\beta} \text{ függetlenek, vagy ha } a_i = a_j \\ \quad \forall i, j \in M \text{ és } \lambda\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \text{ oly módon, hogy } \mathbf{a}_1 = \lambda\mathbf{1}; \\ \dfrac{(C-\lambda b)^2}{f\lambda^2 - 2d\lambda + e}, \text{ ha } \lambda\mathbf{a} = \boldsymbol{\beta} \text{ és } \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}; \\ b^2/f, \text{ ha } \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \text{ és } \boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}; \\ \dfrac{fC^2 - 2dbC + eb^2}{ef - d^2}, \text{ ha } \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0} \text{ és nem áll fenn,} \\ \quad \text{hogy } a_i = a_j \ \forall i, j \in M\text{-re.} \end{cases}$$

Bizonyítás: A (13) feladat és (3) feladat Lagrange-függvénye megegyezik, és a hozzátartozó elsőrendű feltételek az alábbiak:

$$\mathbf{V}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{V}_{12}\mathbf{x}_2 = -\mathbf{1}u_1 - \mathbf{a}_1u_2 \tag{14a}$$
$$\mathbf{V}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{V}_{22}\mathbf{x}_2 = -\mathbf{1}u_1 - \mathbf{a}_2u_2 \tag{14b}$$
$$\mathbf{1}'\mathbf{x} = b \tag{14c}$$
$$\mathbf{a}'\mathbf{x} = C. \tag{14d}$$

(14a)-ból

$$\mathbf{x}_1 = -\mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{1}u_1 - \mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{a}_1u_2 - \mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{V}_{12}\mathbf{x}_2, \tag{15}$$

melyet (14b)-ben helyettesítve, és felhasználva a szingularitás miatti

$$\mathbf{V}_{22} - \mathbf{V}_{21}\mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{V}_{12} = \mathbf{0}$$

összefüggést, adódik, hogy

$$\boldsymbol{\alpha}u_1 + \boldsymbol{\beta}u_2 = \mathbf{0}. \tag{16a}$$

(15) felhasználásával

$$\mathbf{1}'\mathbf{x} = -fu_1 - du_2 + \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{x}_2 = b \tag{16b}$$

$$\mathbf{a}'\mathbf{x} = -du_1 - eu_2 + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_2 = C, \tag{16c}$$

a (14a—b) egyenletrendszert pedig szorozva az $\mathbf{x}'$ vektorral:

$$Z^2(C) = \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} = -bu_1 - Cu_2. \tag{17}$$

Ha az $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ vektorrendszer független, (16a)-nak csak az $u_1 = u_2 = 0$ a megoldása, melyből (17)-re

$$Z^2(C) = 0,$$

(14b—c)-re pedig

$$\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{x}_2 = b \tag{18a}$$

$$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_2 = C \tag{18b}$$

adódik. Így (15) és (18) felhasználásával C függvényeként $\mathbf{x}$ értéke is megállapítható.

Ha most $\lambda\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ és $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, (16a) felhasználásával

$$u_1 = -\lambda u_2, \tag{19}$$

és (16b)-ben mindkét oldalt λ-val szorozva majd (16c)-ből kivonva adódik, hogy

$$-u_2(f\lambda^2 - 2d\lambda + e) = C - \lambda b. \tag{20}$$

u_2 együtthatóját másként is megfogalmazhatjuk:

$$f\lambda^2 - 2d\lambda + e = (\mathbf{a}_1 - \lambda\mathbf{1})'\mathbf{V}_{11}^{-1}(\mathbf{a}_1 - \lambda\mathbf{1}).$$

Tehát: ha az $\mathbf{a}_1$ vektor komponensei azonosak és emellett λ értéke megegyezik ezen komponensekkel (azaz $a_1 = \lambda\mathbf{1}$) $\mathbf{V}_{11}^{-1}$ pozitív definit volta miatt u_2 együtthatója ekkor zéró, egyébként pozitív. Ha $f\lambda^2 - 2d\lambda + e = 0$, akkor C csak a λb értéket veheti fel, azaz $f(C)$ csak egy pontból áll. (17)-ben elvégezve a $C = \lambda b$ helyettesítést, és tekintettel a (19) alatti összefüggésre: $Z(\lambda b) = 0$.

Ha $f\lambda^2 - 2d\lambda + e \neq 0$, (20)-ból:

$$u_2 = -\frac{C - \lambda b}{f\lambda^2 - 2d + e}, \tag{21a}$$

és (19) felhasználásával

$$u_1 = \lambda\frac{C - \lambda b}{f\lambda^2 - 2d + e}. \tag{21b}$$

u_1 és u_2 értékeit (17)-ben helyettesítve célhoz érkeztünk:

$$Z^2(C) = \frac{(C - \lambda b)^2}{f\lambda^2 - 2d\lambda + e}. \tag{22}$$

Érdemes megjegyezni, hogy a pénzbefektetéselmélet jól ismert ,,kockázat nélküli letét'' teljes ága (22) speciális eseteként tekinthető, amikor is λ értéke a kamatláb nagyságát reprezentálja.

A változók értékeinek meghatározására (15) és (16c) használandó fel.

Tovább vizsgálva a lehetséges eseteket, legyen most $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ és $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$. (16a)-ból ekkor $u_2 = 0$ következik, melyet (16b)-ben felhasználva:

$$u_1 = -b/f.$$

Ekkor (17) a C tengellyel párhuzamos egyenes;

$$Z^2(C) = b^2/f.$$

Ha $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ mellett most még a $\boldsymbol{\beta}$ vektor is zéró, (16)-nak u_1- és u_2-re egyértelmű megoldása akkor lesz, ha az a_i-k között lesznek különbözők ($i \in M$). Ebben az esetben (16)-ból, (12) megoldásához hasonlóan:

$$u_1 = \frac{eb - dC}{ef - d^2}$$

$$u_2 = -\frac{fC - db}{ef - d^2},$$

azaz

$$Z^2(C) = \frac{fC^2 - 2db + eb^2}{ef - d^2}.$$

Ismét érdekes a nemnegativitási kikötéssel keletkező probléma. Hasonlóan az előjelkötetlen esethez, sok kimenet lehetséges, de célszerű itt is az előjelkötetlen esetből kiindulni, mégpedig oly módon, hogy megvizsgáljuk, van-e C-nek olyan intervalluma, melyben valamennyi változó nem-negatív. Ha létezik ilyen intervallum, megállapítjuk ennek maximális kiterjedését, melyet jelöljön ismét C_0 és C_1. Az első tétel gondolatmenetéhez hasonlóan ismét bizonyítható, hogy a határpontokban zéróvá váló változók a későbbi vizsgálatból kizárhatók.

Ha C-nek nem létezik az említett tulajdonsággal rendelkező intervalluma, a feladat ismét megoldható, ha képezzük az eredeti n változós feladatból előállított $(n - 1)$ változós feladatokat, feltéve, hogy ezen feladatnak létezik olyan C-beni intervalluma, melyben mind az $(n - 1)$ változó pozitív és a változóknak ezen státusa (tudniillik, hogy az n-edik zéró, míg a többi pozitív) kielégíti a KT feltételeket. Az eljárás inkább a feladat szerkezetének feltárására alkalmas, nagyobb méretű problémák megoldására bizonyára célszerűbb valamilyen numerikus technika alkalmazása, noha ezek nem adnak explicit megoldást.

Az elmondottak illusztrációját szolgálja az alábbi feladat, melynek inputjai:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}16 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0{,}16 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}' = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad b = 1.$$

Ezekből

$$\mathbf{V}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}' = [0{,}6;\ 0{,}6]; \quad \boldsymbol{\beta}' = [0{,}4;\ -0{,}2],$$

tehát függetlenek. Olyan x_3 és x_4 értékeket keresünk, melyek egyrészt kielégítik az

$$\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{x}_2 = 1,$$
$$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_2 = C$$

paraméteres egyenletrendszert (ahol most $\mathbf{x}_2' = [x_3;\ x_4]$), másrészt biztosítják, hogy x_1 és x_2 is nem negatív. (15) alapján tehát az

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{V}_{11}^{-1}\mathbf{V}_{12}\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{x}_2 = 1$$
$$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{x}_2 = C$$

kanonikus forma nemnegatív megoldásait keressük, ahol C paraméter. A numerikus forma az alábbi:

	x_3	x_4	C	konst.
x_1	0,4	0	0	0
x_2	0	0,4	0	0
v_1^*	$\boxed{0{,}6}$	0,6	0	1
v_2^*	0,4	−0,2	1	0

Ebből kiindulva a bázistranszformációs lépések:

	x_4	C	konst.
x_1	−0,4	0	−0,67
x_2	0,4	0	0
x_3	1	0	1,67
v_2^*	$\boxed{-0{,}6}$	1	−0,67

	C	konst.	
x_1	−0,67	−0,22	$\mapsto C \leq -0{,}33$
x_2	0,67	−0,45	$\mapsto C \geq 0{,}67$
x_3	1,67	0,55	$\mapsto C \geq 0{,}33$
x_4	−1,67	1,12	$\mapsto C \leq 0{,}67$

A számításokból kiderül tehát, hogy C-nek nincs olyan intervalluma, melyben valamennyi változó pozitív lenne, ezért C-nek olyan intervallumai létezhetnek ezek után, melyek legfeljebb három pozitív változóval rendelkeznek.

Tekintsük most az eredeti feladatból képzett azt a feladatot, mely nem tartalmazza az utolsó befektetési lehetőséget. Az inputok ekkor:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}16 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ismét

$$\mathbf{V}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

így $\boldsymbol{\alpha} = 0{,}6$; $\boldsymbol{\beta} = 0{,}4$; azaz a két vektor összefüggő és $\lambda = 0{,}667$, valamint $f = 2$; $d = 7$; $e = 25$ és így

$$f\lambda^2 - 2d\lambda + e = 16{,}556.$$

Az értékeket (21a) és (21b)-ben felhasználva, a (15) és (16c) által meghatározott kanonikus forma numerikus alakja:

	x_3	C	konst.
x_1	0,4	0,201	−0,134
x_2	0	0,141	−0,094
v^*	$\boxed{0{,}4}$	−0,228	0,819

Az egyetlen iterációt elvégezve táblánk formája:

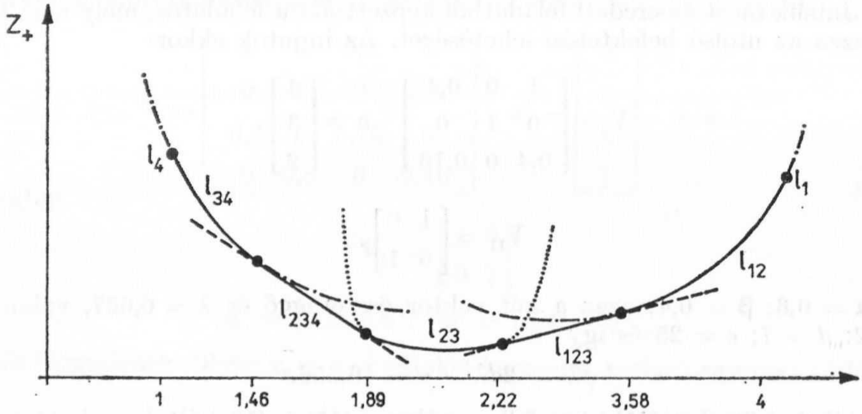
	C	konst.
x_1	0,43	$-0{,}953 \to C \geqq 2{,}22$
x_2	0,141	$-0{,}094 \to C \geqq 0{,}666$
x_3	−0,571	$2{,}047 \to C \leqq 3{,}58$

A $2{,}22 < C < 3{,}58$ intervallumban az első három változó pozitív és $x_4 = 0$, ami egyébként a *KT* feltételeket kielégíti. Ebben az intervallumban a változók értékei tehát:

$$x_1 = 0{,}43C - 0{,}953$$
$$x_2 = 0{,}141C - 0{,}094$$
$$x_3 = -0{,}571 + 2{,}047$$
$$x_4 = 0.$$

Ha most az eredeti feladatból az első alternatívát hagyjuk el, az $1{,}457 < C < 1{,}887$ intervallumban az utolsó három változó pozitív, a pontos értékek pedig:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0{,}372C - 0{,}54$$
$$x_3 = 0{,}317C + 0{,}125$$
$$x_4 = -0{,}75C + 1{,}415.$$



3. ábra

A $C = 2{,}22$ pontban az x_1 változó válik zérussá, tehát a $C \leq 2{,}22$ intervallumban létezik olyan megoldás, melyben x_2 és x_3 pozitív, míg $x_1 = x_4 = 0$. A $C = 1{,}89$ pontban az x_4 változó válik zérussá, tehát a $C \geq 1{,}89$ intervallumban létezik olyan megoldás, melyben x_2 és x_3 pozitív és $x_1 = x_4 = 0$. Mivel $a_1 = 4$ és $a_4 = 1$, ezért az eredeti feladatra a $1{,}89 \leq C \leq 2{,}22$ intervallumban $x_1 = x_4 = 0$ és x_2, x_3 pozitív. A számításokat a 3. ábra fogja össze, ahol az $l_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ jelölés azt reprezentálja, hogy a jelzett intervallumban az $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ változók pozitívak.

(Beérkezett: 1984. július 13-án.)

IRODALOM

1. LINTNER, J.: Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification. *The J. of Finance*, 20 (4), 587—615. o. 1968. March.
2. MERTON, R. C.: An Analytic Derivation of the Efficient Frontier,. *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 1972. Sept., 1851—1872. o.
3. SHARPE, W. F.: Capital Asset Prices, *The J. of Finance*, Sept. 1964., 19 (3), 425—442. o.
4. TOBIN, J.: Liquidity Preferences as Behavior Toward Risk, *Rev. of Economic Studies*. Febr. 1958.
5. VÖRÖS, J.: Pénzbefektetés-kombinációk vizsgálata, *Szigma*, 1983. 1—2. 94—117. o.

DEGENERATION AND SINGULARITY IN THE DERIVATION OF PORTFOLIO EFFICIENT FRONTIER

In an earlier paper the author discussed the explicit derivation of portfolio efficient frontiers and showed some properties of the mean-variance function. This comprised two important constraints: one of them was that the covariance-variance matrix is non-singular and the other that if short sales are allowed, only one of the variables becomes zero. The present paper removes these two constraints and gives a procedure for producing portfolio efficient frontiers and also shows that in this generalized case the shape of the mean-variance function does not change either, that is, it remains continuously differentiable and convex even if short sales are not allowed.

ДЕГЕНЕРАТИВНОСТЬ И СИНГУЛЯРНОСТЬ (ОСОБЕННОСТЬ) В АНАЛИЗЕ ПОМЕЩЕНИЯ КАПИТАЛА

Автор в одной из своих предыдущих статей рассматривал проблему эксплицитного представления комбинаций эффективного помещения капитала и показал некоторые особенности функции, определяющей взаимосвязь прибыль-риск. В ней имели место два важных ограничения: первое — то, что матрица коварианция-вариантция не является сингулярной (особенной), второе — то, что в случае свободного знака всегда лишь одна переменная становится нулевой. В настоящей статье разрешаются эти два прежних условия и дается метод получения эффективных комбинаций, а также показывается, что в этом обобщенном случае также не изменяется форма функции прибыль-риск, то есть по-прежнему сохраняется непрерывно диффеоенцируемая выпуклость и в случае свободного знака.