Bródy András

Kószálás Logaritmiában*

1. Exponenciális folyamatok

A matematikai gazdaságtan növekedési modelljei azon a felismerésen alapulnak, hogy a termeléshez nemcsak anyagra, gépre és munkára, hanem *időre* is szükség van.

Ez az időszükséglet nemcsak arányosan szerepelhet a ráfordítások közt, azaz nemcsak úgy, hogy x-szeres termékmennyiség kibocsátáshoz x-szerte több időre van szükség, mint ahogy ezt közelítőleg feltesszük az anyag- vagy munkaráfordítások esetében. Általában — tehát az előbbi esetet is magában foglalva — amikor a ráfordításokat kibocsátásokká alakítjuk át, vagyis az inputokat outputokká „transzformáljuk" a következőket feltételezhetjük.

1. *feltevés*: Ha valamilyen input-termékhalmazon egy ι időtartamot igénylő transzformációt végzünk, majd az így kapott új termékhalmazt egy újabb s időtartamú transzformációnak vetjük alá, akkor a létrehozott végeredménynek azonosnak kell lennie azzal az eredménnyel, amelyet a kiinduló termékhalmazból egy $(t + s)$ időtartamot igénylő transzformációval kaphatunk.

Matematikailag: ha a transzformációt a T nagybetűvel, végzésének tartamát a mellette zárójelben feltüntetett (s), illetve (t) szimbólummal jelöljük, akkor

$$T(t + s) = T(s)T(t). \tag{1.1.}$$

Ez az egyenlet jól ismert függvényegyenlet (elsőként Cauchy vizsgálta[1]) és az *exponenciális* függvényt, tehát általában az exponenciális folyamatokat határozza meg, ha feltesszük, hogy a T transzformáció differenciálható. Ez ugyan nem szükséges feltétel, de a vizsgált tulajdonság legegyszerűbb bemutatására vezet.[2] Az (1.1) egyenletet t, illetve s szerint differenciálva, s a két eredményt egyenlővé téve

$$T(s)T'(t) = T'(s)T(t). \tag{1.2.}$$

* Köszönettel tartozom *Ziermann* Margitnak, *Matics* Ágnesnek és *Virág* Ildikónak, akik az első fogalmazás egyes nehezen érthető részeire, ügyetlen jelölésmódjára, hibáira stb. felhívták a figyelmet és módosításokat javasoltak.

[1] Lásd pl. *Aczél* (1961). Az egyenlet matrixos alakját *Pólya* (1928) mutatta be.

[2] Vö. *Rényi* (1966) levezetésével a radioaktív bomlás jelenségét illetően (ez exponenciálisan csökkenő folyamat). Rényi csak a $T(t)$ függvény $t = 0$ pontban való differenciálhatóságát, Pólya pedig pusztán a folytonosságát tételezte fel.

$T(t)$, illetőleg $T(s)$ nem lehet zérus vagy szinguláris, hiszen az (1.1.) egyenletből következik, hogy $1 = T(0) = T(t)T(-t)$. Ezért oszthatunk vele, s így

$$T'(t)T^{-1}(t) = T^{-1}(s)T'(s). \tag{1.3.}$$

Mivel s és t értéke tetszőleges, a derivált és a reciprok szorzata minden t-re azonos, azaz konstans. Legyen ez a konstans K, akkor

$$T'(t) = KT(t), \text{ amiből } T(t) = \exp (Kt). \tag{1.4.}$$

2. *feltevés*: Úgy is megfogalmazhatjuk az (1.4.) egyenletet és megoldását, hogy a változás kizárólag az elért színvonaltól függ és azzal arányos.

Az 1. és 2. feltevés esetünkben ekvivalensnek bizonyul: azonos folyamatot határoz meg.

A gazdasági folyamatok exponenciális jellegét így két igen egyszerű és logikus — egymással ekvivalens — feltevésből vezettük le. Hogy e feltevések bármelyike, pontosabban: az e feltevésnek megfelelő sajátosság maguknak a termelési folyamatoknak a jellemző tulajdonsága, vagy pedig csak a termelési folyamatokról alkotott gondolati képünk követeli meg — ez olyan kérdés, amelyet ma még nem lehet jól megválaszolni.[3]

A következőkben feltesszük, hogy Logaritmia országában a gazdasági folyamatok exponenciálisak, és ha a statisztikai mérések némi eltérést mutatnak is, akkor ez kizárólag a mérés elégtelenségének, a mérési hibának a következménye.[4]

2. Az exponenciális folyamatok kölcsönviszonya

Logaritmiában a gazdasági idősorok közti kapcsolat mindig hatványfüggvény alakjában írható.

Legyen ugyanis két exponenciális folyamatunk, ahol

$$x_1(t) = c_1 \cdot \exp (k_1 t) \tag{2.1.}$$

és

$$x_2(t) = c_2 \cdot \exp (k_2 t). \tag{2.2.}$$

Akkor világos, hogy

$$x_1 = a\, x_2^b, \tag{2.3.}$$

ahol $b = k_1/k_2$ és $a = c_1 c_2^{-b}$, amiről behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk.

[3] Valószínű, hogy a feltevések bizonyos egyszerűsítéseket jelentenek, s a végleges forma bonyolultabb lesz.

[4] A valóságos világ mindenesetre nagyon *hasonlít* Logaritmiához, mert azt tapasztaljuk, hogy a legtöbb gazdaságstatisztikai idősor alakulását az illesztett exponenciális trend 90—95 százalékban „megmagyarázza", és az egyéb hatások — legyenek ezek akár determinisztikus jellegűek, mint például a ciklusok, vagy a technikai változás, akár sztochasztikus eredetűek — mint a mérési hibák — legfeljebb 5—10 százalékos nagyságrendben játszanak közre.

Tudjuk, hogy a hatványfüggvényt logaritmikus beosztású koordinátarendszerbe rajzolva egyenest kapunk, mivel a

$$\log x_1 = \log a + b \cdot \log x_2 \tag{2.4.}$$

egyenlet lineáris összefüggést állapít meg $\log x_1$ és $\log x_2$ közt. Azt is bizonyítani fogjuk, hogy a mértékegység megfelelő megválasztásával $\log a$ értékét zérussal (a értékét tehát az egységgel) tehetjük egyenlővé. Két, az időben exponenciálisan alakuló változó logaritmusa közt így egyszerű *arányosság* áll fenn, s ezt az arányosságot a hatványfüggvény b kitevője, a növekedési ráták hányadosa szabja meg.

3. Jánossy NG mutatói

Jánossy (1963) a gazdasági növekedést vizsgálva igen sok naturális gazdasági mutató (természetes egységekben mért termelési és fogyasztási mutató), azaz „NG mutató" értékét rajzolta fel ilyen logaritmikus papírra, a nemzeti jövedelem függvényében, és általában egyenesekkel jól közelíthető összefüggéseket talált.

Egy ilyen jellegzetes egyenest mutat be az 1. *ábra*, amely az egy főre jutó villamosenergiafogyasztást és az egy főre jutó nemzeti jövedelem alakulását írja le.

Az egyenes iránytangensét szabatosan a regressziószámítás segítségével állapíthatjuk meg. A viszonylag szoros illeszkedés miatt azonban akkor sem követhetünk el nagy hibát, ha csupán a két szélső adatpárból számolunk. Például:

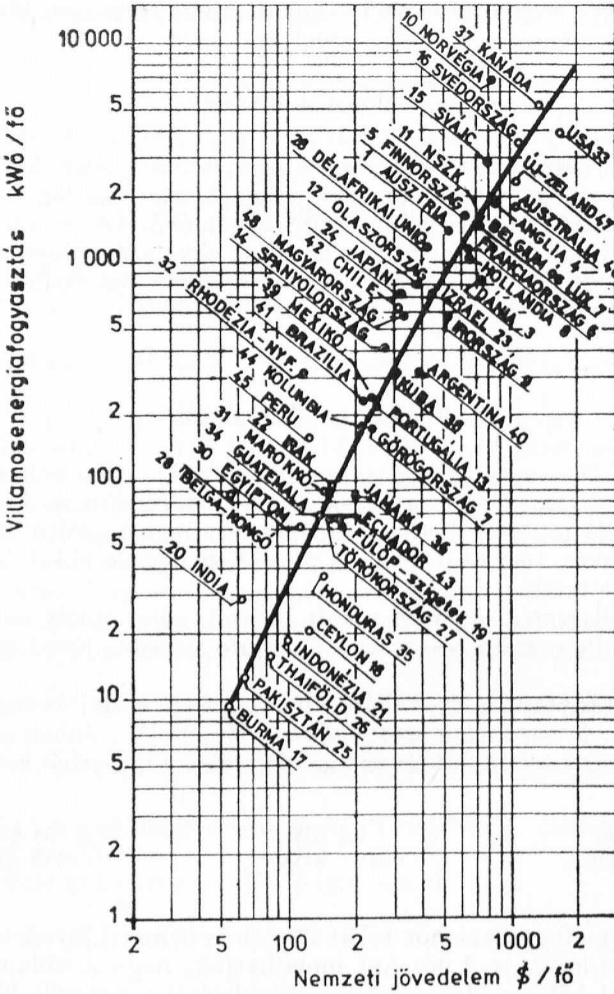
Burma	9,1 kWó/fő	54 $/fő
Kanada	5040 kWó/fő	1345 $/fő

554-szeres energiafogyasztáshoz tehát 25-szörös nemzeti jövedelem tartozik, s így $b = \log 554/\log 25 \approx 1{,}96$. Azt mondhatjuk, hogy a villamosenergia fogyasztása közel kétszer olyan gyorsan növekedett a vizsgált időben, mint a fejenkénti nemzeti jövedelem termelése.

Felhasználva az $ax^b \equiv (a^{1/b}\,x)^b$ azonosságot a (2.3.) összefüggést „arányossággá" alakítjuk a mértékegység megfelelő megválasztásával. Ha a nemzeti jövedelmet kereken 18 $-os „egységekben" fejezzük ki, akkor Burmának 3 „egység", Kanadának pedig 71 „egység" nemzeti jövedelme volt, és ezek négyzete — 9 illetve 5041 — adja meg az egy főre jutó villamosenergiafogyasztást. A villamosenergiafogyasztás és a nemzeti jövedelem logaritmusai így konstans arányban állnak egymással a regressziós egyenes mentén; az egyenes átmegy az (1,1) ponton.

4. Pareto-eloszlások

Logaritmiában a társadalmi ranglétra egy bizonyos magasságán vagy ennél magasabban ν számú személy áll. Ha feltesszük, hogy a pozíciókból való ki-



1. ábra

esés valószínűsége arányos a már elért pozicióval, akkor — az első pontban levezetett okfejtés mintájára —

$$(4.1.) \qquad \nu = c_1 \cdot \exp\,(-k_1 s).$$

Itt k és c az eloszlást meghatározó paraméterek.[5]

Az egyes pozíciókban elért jövedelem, ξ legyen ismét exponenciális függvénye az s pozíciónak, s így

$$(4.2.) \qquad \xi = c_2 \cdot \exp\,(k_2 s).$$

[5] Pareto feltette, hogy ezek alapja a képességek egyenlőtlen eloszlása. De elégséges azt feltenni, hogy a munkamegosztás adott technikai szintje bizonyos hierarchiát határoz meg, amelyben egy-egy vezető adott számú beosztott munkáját képes áttekinteni, s így kialakul a társadalmi pozíciók adott „meredekségű" gúlája.

A második pontban bemutatott összefüggés alapján tudjuk, hogy a jövedelemeloszlást akkor

$$\nu = a\xi^{-b} \tag{4.3.}$$

alakba írhatjuk, ahol $b = k_1/k_2$. Itt tehát ν azok száma, akiknek jövedelme ξ-vel egyenlő vagy azt meghaladja.

Ez az úgynevezett Pareto-féle jövedelemeloszlás.

Bár *Theiss* (1935) már ismertette Magyarországon a Pareto-eloszlást, és *Malinvaud* (1974) is utal rá, talán nem hiábavaló a nálunk Rényi által bevezetett tárgyalásmódnak megfelelően definiálni és néhány sajátosságára felhívni a figyelmet.

Egy ξ valószínűségi változót Pareto eloszlásúnak nevezünk, ha sűrűségfüggvénye

$$f(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \xi < a^{1/b} = \xi_{\min} \\ ab\xi^{-(1+b)}, & \text{ha } \xi \geq \xi_{\min}\,. \end{cases}$$

Az eloszlás várható értéke ennek megfelelően, ha $b > 1$

$$\bar{\xi} = E(\xi) = \int\limits_{a^{1/b}}^{\infty} ab\,\xi^{-b}\,d\xi = \frac{ab}{1-b}\,\xi^{1-b}\Big|_{a^{1/b}}^{\infty} = \frac{ab}{b-1}\,(a^{1/b})^{1-b} = \frac{b}{b-1}\,a^{1/b}. \tag{4.4.}$$

Ebből következik, hogy $\bar{\xi}(b-1) = b\xi_{\min}$, így az eloszlás paraméterei az alábbi érdekes és egyszerű összefüggéseknek tesznek eleget:

$$b = \bar{\xi}/(\bar{\xi} - \xi_{\min}), \qquad a = \xi_{\min}^{b}\,. \tag{4.5.}$$

$b \leq 1$ esetén a várható érték nem véges szám. Hasonlóan győződhetünk meg róla, hogy $b \leq 2$ esetén az eloszlás szórása nem véges, mert a valószínűségi változó négyzetének várható érteke nem létezik. Ezért beszél Malinvaud „szórásmentes" eloszlásról.

A Pareto eloszlásfüggvény (a 4.3. egyenlettel *ellentétes* valószínűség) annak valószínűségét adja meg, hogy a jövedelem egy adott ξ szinttel egyenlő vagy annál kisebb:

$$F(\xi) = P(j \leq \xi) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \xi < a^{1/b} \\ 1 - a\xi^{-b}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Még megjegyzendő, hogy a Pareto eloszlásnak van egy tulajdonsága, amely különösen alkalmassá tesz a jövedelemeloszlások tanulmányozására: *stabilis* eloszlás, ami azt jelenti, hogy az ilyen eloszlásból származó valószínűségi változók *összege* is ugyanabba az eloszláscsaládba tartozik. Ez a sajátossága az ismertebb eloszlások közül csak a normális eloszlással közös.[6]

Logaritmiában széleskörű a Pareto-eloszlások érvénye: a személyi jövedelmeken kívül a családi jövedelmek, az üzemek, vagyonok, a faluk és városok nagysága, stb., stb. is ezt az eloszlást követi, mert mint a 2. pont megmutatta: az exponenciális folyamatok „egymás számára" mindig Pareto-eloszlásúnak tűnnek.

[6] Lásd *Rényi* (1966) V. 8 §.

Kiegészítésül azt is meg kell állapítani, hogy ha Logaritmiában a profitok és a bérek azonos frekvenciával ingadoznak (az ingadozás is lehet exponenciális folyamat, csakhogy a kitevő tisztán képzetes szám), akkor az ezeket összekapcsoló ,,Pareto-eloszlás'' ax^{-1} alakú, amit köznyelven úgy fogalmazhatunk meg, hogy a profitok és a bérek egymással fordítottan arányosak. Ennek az ,,eloszlásnak'' azonban nincsen sem várható értéke, sem szórása.

5. A Cobb—Douglas függvények

Rendkívül jellegzetesen alakulnak Logaritmiában a termelési függvények is. Ha ugyanis az

$$T = aK^{\beta} L^{1-\beta} \tag{5.1.}$$

alakú összefüggés, ahol T a termelés, K a tőke és L a munka mennyisége, három exponenciális folyamatot kapcsol össze, akkor

$$\begin{aligned} T &= \mu_1 e^{\lambda_1 t} \\ K &= \mu_2 e^{\lambda_2 t} \\ L &= \mu_3 e^{\lambda_3 t}. \end{aligned} \tag{5.2.}$$

Behelyettesítve (5.1.)-be kapjuk, hogy

$$\mu_1 e^{\lambda_1 t} = a[\mu_2 e^{\lambda_2 t}]^{\beta} [\mu_3 e^{\lambda_3 t}]^{1-\beta}. \tag{5.3.}$$

A kitevőket vizsgálva világos, hogy

$$\lambda_1 = \lambda_2 \beta + \lambda_3 (1 - \beta),$$

amiből, ha $\lambda_2 \neq \lambda_3$:

$$\beta = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}. \tag{5.4.}$$

Szavakban kifejezve tehát a tőke exponense (,,hozama'') a következőképpen függ a munka termelékenységének és a munkának tőkével való felszereltségének növekedésétől:

hozam = termelékenység növekedése/felszereltség növekedése.

Tehát ha például a termelés évi 2%-kal és a létszám évi 1%-kal nő, akkor a munkatermelékenység értelemszerűen évi 1%-kal nő.[7] Ha ugyanakkor a tőke évi 6%-kal nő, akkor a munka tőkével való felszereltsége 5%-kal növekszik évente. Így a tőke ,,hozama'' 0,01/0,05 = 0,2 lesz, s a létszám ,,hozama'' 1 — 0,2 = 0,8.

Világos, hogy ilyen ,,növekedési ollók'' csak az iparosítási korszak sajátosságaiból adódnak és csak azokból adódhatnak. Ha a munkaerőforrások kiapadnak — tehát ha a munkáslétszám nem vagy csak igen csekély mértékben nő, akkor a tőke ,,hozama'' a termelés és a tőkeállomány növekedésének hányadosaként adódik. Mivel az intenzív szakaszban a tőkeigényesség csökken-

[7] Mivel $T/L = \mu_1/\mu_3 e^{(\lambda_1 - \lambda_3)t}$.

het — tehát a tőkeállomány lassabban nőhet, mint a termelés, így a tőke kitevője szükségképpen nagyobbá válik 1-nél, a munka „hozama" teljesen eltűnik vagy negatívvá válik, s az eredeti Cobb-Douglas függvény felmondja a szolgálatot. Ezért kellett a második világháború utáni számításokban, a fejlett országokra vonatkozóan újból és újból helyesbíteni a termelési függvények alakját, először a „technikai fejlődés" együtthatóját bevezetve,[8] majd a CES és egyéb függvények osztályában keresve az összefüggéseket jobban leíró egyenleteket.

6. A statisztikai illesztésről

Bármennyire is meglepő a következő állítás — mert ellentmond egész eddig kialakult ökonometriai gyakorlatunknak — az eddig levezetett összefüggésekből kiviláglik, hogy a fent ismertetett esetekben, tehát a Pareto-eloszlások, a Jánossy-féle NG mutatók és a Cobb—Douglas függvények esetében Logaritmiában nem bízhatjuk magunkat az egyébként jól bevált regressziószámítás technikájára, illetőleg az csak egyváltozós alakjában, tehát egy-egy hatványfüggvény kitevőjének (esetleg együtthatójának) becslésére alkalmas. A többváltozós alak — a változók közt fennálló sajátos összefüggés következtében — szükségszerűen hibás következtetésekre vezet.

A Cobb—Douglas függvények becslésével kapcsolatban ez a probléma már gyakorlatilag felmerült, amikor a tapasztalatok alapján, látva a statisztikai becslés bizonytalanságát, ezt a változók úgynevezett multikollinearitásával indokolták. A multikollinearitás azonban csak bizonytalanná teszi a becslést, de nem teszi lehetetlenné. A számítások során felmerülő mátrix inverzióját azért teszi bizonytalanná, mert ez a mátrix a multikollinearitás következtében „rosszul kondicionált", legnagyobb és legkisebb sajátértékének aránya túl nagy.

Valójában ennél rosszabb a helyzet: a mátrix inverziója nemcsak bizonytalan, hanem — az elméletileg tiszta, „pontosan mért" esetben — lehetetlen is, mivel e mátrix *szükségképpen szinguláris*, sőt már másodrendű minorainak determinánsa is zérus, tehát egyetlen diádból áll és rangja 1-gyel egyenlő.

Tegyük fel ugyanis, hogy az (5.1.) egyenletben szereplőnél általánosabb $T = a K^{\beta} L^{\gamma}$ Cobb—Douglas függvényt akarjuk számítani, azaz a β és γ kitevő értékét becsülni, mégpedig a T termelésre, K tőkeállományra és L létszámra vonatkozó statisztikai adatsor, illetőleg ezek logaritmusa alapján. Azaz a

$$\ln T = \beta \ln K + \gamma \ln L \tag{6.1.}$$

logaritmikusan lineáris kétváltozós regressziószámítást kívánjuk elvégezni. (Az a együttható értékét itt figyelmen kívül hagyhatjuk, mert a 3. pontban levezettük, hogy értékét egységnyivé, logaritmusát tehát zérussá lehet tenni a mértékegységek megfelelő megválasztásával, s most feltesszük, hogy adatainkat eleve ilyen mértékegységekben mértük.) Világos, hogy az ilyen illesztés nemcsak a Cobb—Douglas függvény meghatározását szolgálhatná, hanem ezt alkalmaznánk, ha több (jelen esetben két) NG mutatónak a nemzeti növede-

[8] Azaz a $T = e^{\gamma t} K^{\beta} L^{1-\beta}$ alakban a technikai fejlődést jellemző γ együttható alkalmas arra, hogy β értékét „leszorítsa", mivel $\lambda_3 = 0$ esetén $\beta = \lambda_1/\lambda_2 - \gamma/\lambda_2$.

lemre gyakorolt együttes hatását kívánnánk megbecsülni, ha tehát például éppen a tőkét és a munkát tekintenénk a megfelelő NG mutatóknak (de választhatnánk az elektromos energiát és az acéltermelést is).

Logaritmiában azonban, ha a statisztikai adatok pontosak, akkor mind $\ln K$, mind pedig $\ln L$ adatsora $\ln T$ adatsorának egy-egy többszöröse lesz — ennek következtében tehát $\ln K$ adatsora is valamilyen többszöröse lesz $\ln L$ adatsorának, s így a belőlük képzett mátrix szinguláris és Penrose értelmében sem invertálható, mivel rangja 1.

Ha a gyakorlatban mégis elvégezhető az invertálás, tudniillik ha a mérési hibák következtében $\ln K$ és $\ln L$ adatsora lineárisan függetlenné válik, akkor az eredmény igen bizonytalan (mert a mátrix továbbra is igen közel van egy szinguláris mátrixhoz, s így legkisebb sajátértéke igen kicsiny), s ami még kellemetlenebb: a kapott megoldás nemcsak bizonytalan, hanem *teljes egészében* a mérési hibák függvénye.

Az így kapott, gyökerükben hibás becslések ezen után nem használhatók sem arra, hogy a „valódi" értékek valamilyen közelítésének tartsuk őket, sem pedig arra, hogy esetleges torz voltuk miatt, negativitásukkal vagy értelmezhetetlenül nagy értékükkel érvelve a fenti modellekben leírt elméletet cáfoljuk velük.

Ahogy e kérdéskört jelenleg látom, csupán a minden változóra külön-külön elvégzett statisztikai becslés a járható út, a mérési hibák utólagos kiegyenlítésével, ahogy erre pl. Jánossy műve 159. oldalán tesz javaslatot a geometriai átlagolás módszerét alkalmazva. Lehetséges tehát olyan eset, amikor a többváltozós regresszió módszere nemcsak rosszabb eredményre vezet, mint a többszörösen elvégzett regresszió, hanem egyenesen értelmetlen és értelmezhetetlen eredményeket ad.

(*Beérkezett: 1984. március 7-én.*)

IRODALOM

1. ACZÉL, I. (1961): *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendugen.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin.
2. COBB, C.—DOUGLAS, P. (1928): A Theory of Production. *AER;* Vol. 18. Supplement 139—165. pp.
3. JÁNOSSY F. (1963): *A gazdasági fejlettség mérhetősége és új mérési módszere* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest.
4. MALINVAUD, E. (1974): *Az ökonometria statisztikai módszerei* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest.
5. PÓLYA G. (1928): *Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion im Matrizkalkül.* Sitzberichte. Akademie Berlin. 96—99. pp.
6. RÉNYI A. (1966): *Valószínűségszámítás* Tankönyvkiadó, Budapest.
7. THEISS E. (1935): Statisztikai törvényszerűség a jövedelemeloszlásban. *Közgazdasági Szemle,* jan./febr. 1—38. old.

ROAMING IN LOGARITHMIA

The exponential nature of economic processes can be deduced from simple assumptions. If the processes are strictly (and not only approximately) exponential, the relationship between them can always be written in the form of a power function. Special forms of this relationship are the NG indicators of Jánossy, the Pareto distributions and the Cobb—Douglas functions. In the case of strictly exponential processes the methods of linear regression cannot be employed because they yield misleading results.

ПУТЕШЕСТВИЕ В ЛОГАРИТМИЮ

Благодаря своему экспоненциальному характеру экономические явления могут быть описаны с помощью простых предположений. Если явления имеют строгий (а не только приближенно) экспоненциальный характер, то связь между ними всегда можно описать в виде степенной функции. Специальные виды этой связи NG-показатели Яношши, распределения Парето и функции Кобб-Дагласа.

В случае строго экспоненциальных явлений методы регрессионного расчета неприменимы или дают неверный результат.