FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

Hulyák Katalin

Dinamikus ökonometriai modellek

(Az egyszerű alkalmazkodási mechanizmusoktól a racionális várakozások figyelembevételéig)

Bevezetés

Ebben a cikkben arra törekszünk, hogy röviden, de kellő irodalmi hivatkozással, bemutassunk néhány olyan dinamikus ökonometriai módszert, pontosabban modellezési konstrukciót, amelyek felhasználhatók a gazdasági rendszer alkalmazkodási képességének mérésére. A tanulmány elsődleges célja elősegíteni azt, hogy a hazai közgazdasági—matematikai kutatás az eddigieknél nagyobb mértékben kihasználja e módszerek lehetőségeit. Természetesen számos hazai közgazdasági kutatásban foglalkoztak a gazdaságban érvényesülő alkalmazkodási vagy szabályozási mechanizmusokkal, de viszonylag kevés ilyen jellegű alkalmazott ökonometriai vizsgálatot találunk. Jelen cikkben elsősorban a külföldön széleskörűen alkalmazott dinamikus ökonometriai modellek elméleti hátterére fektetünk súlyt. Véleményünk szerint ugyanis éppen a módszerek mögött meghúzódó elmélet általános jellege, vagy legalábbis rugalmasan értelmezhető feltételei indokolják kísérleti alkalmazásukat.

Másodlagos célunk annak a bemutatása, hogy az ökonometriai modellek maguk sem veszítették el alkalmazkodási képességüket a változó körülmények között. Indokoltan lép fel szkepticizmus a merev struktúrához ragaszkodó klasszikus modellek felhasználási lehetőségeivel szemben, de szeretnénk érzékeltetni, hogy a módszerek és modellek terén sem állt meg a fejlődés, s új lehetőségeket nyújtanak újfajta vizsgálatokra. A bemutatandó módszerek háttere a dinamikus közgazdasági elmélet, s eszközeiket a sztochasztikus idősorelemzés nyújtja. Matematikai szempontból a modellek általában sztochasztikus differenciaegyenleteket tartalmaznak.

A dinamikus közgazdasági elmélet általános jellegének bemutatására néhány lényeges szempontot emelünk ki.

Az első lényeges tulajdonsága az elméletnek az, hogy az alkalmazkodás vagy igazodás valamilyen statisztikailag nem megfigyelhető, de lényeges szerepet játszó érték irányában történik. Példaképpen említhetjük valamely változó egyensúlyi értékét, kívánt vagy elvárt szintjét, norma szerinti értékét, vagy akár tervezett vagy optimális szintjét. A második szempont a dinamikus jelleg, az, hogy az alkalmazkodás e kívánt szinthez az időben folyik. A harmadik szempont az alkalmazkodási folyamat különbözőféle gyorsaságának feltételezése. A modellek keretébe az alkalmazkodás hiányától a teljes alkalmazkodásig terjedve mindenféle mechanizmus belefér. Ez utóbbi szempont egyben választ ad arra a kérdésre is, hogy érdemes-e ilyen modellekkel kísérletezni akkor, amikor a megfigyelési időszak egy részében nem, vagy csak alig beszélhetünk az alkalmazkodás érvényesüléséről.

Véleményünk szerint gazdaságunk eddig is kénytelen volt, és most is kénytelen alkalmazkodni a változó körülményekhez, akár ha késve és súrlódásokon keresztül is. (Gondoljunk például az olajárrobbanás késleltetett, de elhúzódó hatására.) Éppen e hatások kimutatása lehet e módszerek feladata. Ugyanakkor lényegesnek tartjuk, hogy az alkalmazkodás fogalmát a lehető legszélesebben értelmezzük, s ne csak a klasszikus példák (pl. áralkalmazkodás) körében maradjunk. Például megemlíthetjük az egyensúlyra való törekvést a fogyasztási-cikk piacon. Igaz, hogy a fogyasztói árak csak a hetvenes évek második felében alkalmazkodtak a piachoz a kereslet és a kínálat egyensúlyának biztosítása érdekében, de több más jelenség megfigyelése (pl. lakossági pénzmegtakarítások) meggyőzhet arról, hogy az egyensúlyra törekvés korábban is jellemezte a fogyasztási-cikk piacot.

A cikk két fő részre tagolódik. Az első részben bemutatjuk azokat az egyszerűbb alkalmazkodási hipotéziseket és modelleket, amelyek az osztott késleltetésű modellekhez vezetnek. Bizonyos szempontból az első részben ismertetett modellek általánosítását tartalmazza a tanulmány második része, amely bemutatja a racionális várakozások hipotézisét és alkalmazásukat dinamikus ökonometriai modellekben. Célunk elsősorban a modellek mögött húzódó elmélet ismertetése, valamint a modellkonstrukciók levezetése, nem foglalkozunk modellidentifikációs és becslési kérdésekkel.

1. Egyszerű alkalmazkodási hipotéziseken alapuló osztott késleltetésű modellek

Az osztott késleltetésű modellek irodalma rendkívül gazdag. A korai úttörő jelentőségű tanulmányok [4], [22], [28], [29] mellett, összefoglaló munkák és kézikönyvek [6], [10] is jelentek meg e témában. A hazai szakirodalomban is fellelhetők az osztott késleltetésű modellekkel foglalkozó módszertani tanulmányok [2], [15]. Jelen ismertetésünkben elsősorban K. F. WALLIS tanulmányára [35] támaszkodunk.

1.1. *A modellhez vezető egyszerű hipotézisek*

Osztott késleltetésű hatásról akkor beszélünk, amikor valamely magyarázó változóban bekövetkező változás a függő változóban nem egyszeri, hanem a következő megfigyelési periódusokban elosztva jelentkező, többszöri változást idéz elő. Például a cigaretta árának emelése valamely fogyasztó cigarettafogyasztását nem egyszerre csökkenti, hanem hónapról-hónapra, (vagy esetleg évről évre) fejti ki csökkentő hatását. Még időszerűbb példát felhozva, az energia árak ugrásszerű emelkedése nem azonnali (hanem esetleg csak néhány év múlva jelentkező) és nem egyszeri, energiatakarékossági intézkedést váltott ki.

Ezt az időben elosztva jelentkező hatást a következő formában fogalmazhatjuk meg:

$$y_t = \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j x_{t-j}, \tag{1.1}$$

azaz valamely y endogén változó t időszaki értékét az x egzogén változó t időszaki, $t-1$ időszaki, $t-2$, stb. időszaki értékének alakulása befolyásolja.

A β_j paraméter azt a hatást méri, amit az x egzogén változó $t-j$ időszaki változása az y változóban a t időszakban vált ki. GOLDBERGER [9] a β_j paramétereket multiplikátoroknak nevezi, éspedig β_0 az azonnali hatást kifejező közvetlen multiplikátor, $\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j$ pedig a teljes hatást kifejező totális multiplikátor.

Az (1.1) típusú egyenlet statisztikai becslésekor már a korai alkalmazásokkor praktikus okokból felmerült az az igény, hogy a β_j-k értékére egyszerűsítő, azaz megszorító kikötéseket kell tenni a becslés érdekében. Az empirikus munkában Koyck [22] tevékenysége volt kiemelkedő, aki egyben az elosztott késleltetésű modellnek interpretálható, közgazdasági tartalmat is adott, nevezetesen a *parciális alkalmazkodás* (partial adjustment) hipotézisét. Koyck feltételezte, hogy valamely időszaktól kezdődően a β_j koefficiensek geometriai haladvány szerint csökkennek, azaz

$$y_t = \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \lambda \beta_1 x_{t-2} + \lambda^2 \beta_1 x_{t-3} + \dots,$$

$$0 \leq \lambda < 1 .$$

Ha feltételezzük, hogy a csökkenés már a t-edik időpontban indul, akkor:

$$y_t = \beta \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j x_{t-j} .$$

Ebben az esetben a totális multiplikátor:

$$\beta \sum_j \lambda^j = \beta/(1-\lambda) .$$

Az y változó alkalmazkodása az x-ben bekövetkezett változást követően, megközelítően exponenciális görbe szerint megy végbe.

A Koyck féle transzformáció a modellt becsülhető formára hozza:

$$y_t - \lambda y_{t-1} = (\beta x_t + \lambda\beta x_{t-1} + \lambda^2 \beta x_{t-2} + \dots) - \lambda(\beta x_{t-1} + \lambda\beta x_{t-2} + \\ + \lambda^2 \beta x_{t-3} \dots) = \beta x_t,$$

azaz:

$$y_t = \lambda y_{t-1} + \beta x_t .$$

A $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ jelölést bevezetve:

$$\Delta y_t = \beta x_t - (1-\lambda) y_{t-1} . \tag{1.2}$$

Amikor y eléri $\bar{y}$-t, egyensúlyi értékét, azaz már nem változik tovább, akkor $y_{t-1} = y_t = \bar{y}$.

Mivel $\bar{y} = \beta x_t/(1-\lambda)$, a βx_t-re nyert kifejezést (1.2)-be helyettesítve:

$$\Delta y_t = (1-\lambda)(\bar{y} - y_{t-1}) . \tag{1.3}$$

Az (1.3) formájú egyenlet fejezi ki a parciális alkalmazkodás feltételezésének lényegét, amennyiben azt fogalmazza meg, hogy az y_t változó a kívánt $\bar{y}$ értékhez az időben alkalmazkodik, de csak részlegesen, vagyis a λ alkalmazkodási ráta szerinti mértékben.

Míg Koyck a geometriailag csökkenő paraméterű osztott késleltetésű modellhez utólag teremtette meg a közgazdasági hipotézist, a parciális alkalmazkodás feltételezésében, Cagan [4] ugyanehhez a modellhez az *adaptív várakozások* (adaptive expectations) hipotézisével jutott el. E hipotézis szerint *valamely x* *változóra vonatkozó várakozás (elvárás) időben úgy alakul, hogy a várt értéket fokozatosan igazítjuk, a tényérték*[1] *és az előző időszakra vonatkozó várt érték közötti eltérés figyelembevételével.*

Ha $\hat{x}_t$-vel jelöljük az x_t-re vonatkozó várakozást, akkor

$$\hat{x}_t - \hat{x}_{t-1} = (1 - \gamma)(x_t - \hat{x}_{t-1}), \tag{1.4}$$

vagy

$$\hat{x}_t = \gamma\hat{x}_{t-1} + (1 - \gamma)x_t, \quad 0 \leq \gamma < 1 .$$

Az x_t-re vonatkozó várakozás tehát az x változó elmúlt időszakokra vonatkozó x_{t-j} megfigyeléseinek súlyozott átlaga:

$$\hat{x}_t = (1 - \gamma)\sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j x_{t-j}.$$

Cagan az adaptív várakozások hipotézisét az árváltozásokra vonatkozó várakozások becslésére használta. Olyan regressziós egyenletet becsült, amelyben az $\hat{x}_t$ változó magyarázó változóként szerepelt:

$$y_t = \alpha + \beta\hat{x}_t = \alpha + \beta(1 - \gamma)\sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j x_{t-j}. \tag{1.5}$$

Az adaptív várakozások modelljében a γ paraméternek van kitüntetett jelentősége. Amennyiben γ értéke 0-hoz van közel, akkor az $(1 - \gamma)\gamma^j$ koefficiensek j növekedésével gyorsan csökkennek, azaz a jövőre vonatkozó várakozás inkább a közelmúlt tapasztalataitól függ. Ha γ értéke inkább 1-hez esik közel, akkor a múlt tapasztalatainak, vagyis a régebbi megfigyeléseknek nagyobb szerepük van a várakozások alakításában. NERLOVE [28] volt az első, aki rámutatott a *kétféle modell*, a parciális alkalmazkodáson alapuló modell és az adaptív várakozások modelljének „*dualitására*". A parciális alkalmazkodás modelljében az y endogén változó valamely kívánt (pl. egyensúlyi vagy normál) értéke függ az x egzogén változótól. Ha y_t^*-vel jelöljük ezt a kívánt szintet, akkor

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t .$$

Az (1.3) összefüggés szerint:

$$y_t - y_{t-1} = (1 - \lambda)(y_t^* - y_{t-1}), \qquad 0 \leq \lambda < 1$$

behelyettesítve:

$$y_t = \alpha(1 - \lambda) + \beta(1 - \lambda)x_t + \lambda y_{t-1} . \tag{1.6}$$

Ezzel szemben az adaptív várakozások modelljében az y endogén változó az x egzogén változóra vonatkozó várakozásoktól függ:

$$y_t = \alpha + \beta\hat{x}_t .$$

Az (1.4) összefüggés szerint:

$$\hat{x}_t = \gamma\hat{x}_{t-1} + (1 - \gamma)x_t , \qquad 0 \leq \gamma < 1$$

behelyettesítve:

$$y_t = \alpha(1 - \gamma) + \beta(1 - \gamma)x_t + \gamma y_{t-1} . \tag{1.7}$$

[1] A formula felírásakor egyesek az aktuális tényértéket, mások pedig az előző-időszaki tényértéket szerepeltetik.

Az (1.6) és (1.7) összefüggéseket összevetve látható, hogy a parciális alkalmazkodás modellje és az adaptív várakozások modellje determinisztikus formában megegyezik. Ha sztochasztikus formában írjuk fel mindkét modellt, az u_t, illetve v_t véletlen hibatényezők figyelembevételével, akkor a két modell végső formája különböző lesz.

A parciális alkalmazkodás modellje:

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t + u_t$$

$$y_t - y_{t-1} = (1-\lambda)(y_t^* - y_{t-1}) + v_t \qquad 0 \leq \lambda < 1 \tag{1.8}$$

$$y_t = \alpha(1-\lambda) + \beta(1-\lambda)x_t + \lambda y_{t-1} + (1-\lambda)u_t + v_t\,,$$

az adaptív várakozás modellje:

$$y_t = \alpha + \beta \hat{x}_t + u_t$$

$$\hat{x}_t = \gamma \hat{x}_{t-1} + (1-\gamma)x_t + v_t \qquad 0 \leq \gamma < 1$$

$$y_t = \alpha(1-\gamma) + \beta(1-\gamma)x_t + \gamma y_{t-1} + (u_t - \gamma u_{t-1} + \beta v_t)\,. \tag{1.9}$$

A hibatagokat is tartalmazó (1.8) és (1.9) összevetésével (feltételezve az u_t és v_t függetlenségét) látható, hogy a parciális alkalmazkodás végső formájában a véletlen változó nem tartalmaz autokorrelációt, azonban az adaptív várakozás modelljében a véletlen változó mozgó-átlagolású és így autokorrelációt tartalmaz. Ennek a körülménynek a modellek becslése szempontjából van jelentősége. Olyan modellekre ugyanis, amelyekben a függő változó késleltetett értéke a magyarázó változók között szerepel, és emellett a hibatag autokorrelációt is tartalmaz, a legkisebb négyzetek klasszikus módszere inkonzisztens becslést ad. Ennek ellenére a parciális alkalmazkodású és az adaptív várakozásokra illesztett modellek döntő többségét a klasszikus legkisebb négyzetek módszerével becsülik. Az ily módon előállított becslések szerint $(1-\lambda)$ becslése lefelé torzított, míg $(1-\gamma)$ becslésére felfelé torzított értéket kapunk. Mivel jelen cikkünkben nem kívánunk részletesen becslési problémákkal foglalkozni, csak megemlítjük, hogy kidolgoztak olyan módszereket [8], amelyek figyelembe veszik e modellek sajátos jellegét.

Inkább arra törekszünk, hogy ismertessük azokat a közgazdasági alkalmazásokat, ahol e modellformák hasznosnak bizonyultak.

1.2. *Parciális alkalmazkodási modellek*

A parciális alkalmazkodás hipotézisén alapuló modellekre a klasszikus példákat a keresletelemzés szolgáltatja.

Először a *tartós cikkek iránti keresletet* magyarázták a parciális alkalmazkodás modelljével. Ezekben az esetekben feltételezték, hogy a tartós cikkből kívánatos készletállomány, S_t^* a folyó jövedelemtől és áraktól függ. A jelen vásárlásai tehát úgy alakulnak, hogy a tényleges készlet alkalmazkodjon a kívánt készlethez (stock-adjustment).

S_t-vel jelölve a készletállományt:

$$S_t = (1-\lambda)S_t^* + \lambda S_{t-1}\,.$$

Ez az egyenlet, valamint az az összefüggés, amelyik azt fejezi ki, hogy a készlet elhasználódását is pótolni kell, együttesen egy olyan összefüggéssé transzformálható, amelynek függő változóját a vizsgált cikkre fordított kiadások alkotják:

$$q_t = S_t - S_{t-1} + \delta S_{t-1},$$

behelyettesítve:

$$q_t = (1 - \lambda) S_t^* - (1 - \lambda - \delta) S_{t-1},$$

ahol q_t-vel jelöljük a t-időszaki vásárlásokat, δ pedig az állomány amortizációs rátája.

Ha az S_t állományadatokat nem ismerjük, a Koyck-féle transzformációt alkalmazva az egyenletet olyan formára hozhatjuk, amelyben csak megfigyelhető változók szerepelnek (lásd pl. [34]-ben). Általában, a Koyck-féle transzformáció alkalmas olyan modellek transzformálására, amelyekben stock-típusú és flow-típusú változók együttesen szerepelnek. A transzformáció eredményeként csak flow-típusú változók maradnak az egyenletekben. Ilyen típusú modelleket többen becsültek, a gépkocsi, a hűtőszekrény és más tartós fogyasztási cikkek keresletének becslésére [11], [5].

Houthakker és Taylor a parciális alkalmazkodási modellt általánosították az összes fogyasztási cikkre [12].

A nem tartós cikkeknél a fogyasztási szokások állománya veszi át a tényleges állomány szerepét, s itt is a kívánt optimális szinthez történő alkalmazkodást tételezik fel. A Houthakker—Taylor-féle dinamikus keresleti függvény azonos formában illeszthető az összes fogyasztási cikkre, sőt felhasználásával el lehet dönteni az egyes cikkekről, hogy fogyasztásukat inkább a fogyasztói szokások uralják, avagy az optimális tartós állományra való törekvés. A Houthakker—Taylor keresleti függvényekre hazai alkalmazást is találunk [13]. Ugyancsak parciális alkalmazkodás feltételezésén alapul az az *aggregált fogyasztási függvény*, amelyben az előző évi fogyasztás szerepel a magyarázó változók között [37]. Ebben az esetben a λ alkalmazkodási koefficiens az összfogyasztás kívánt szintjéhez való alkalmazkodás gyorsaságáról tájékoztat.

A parciális alkalmazkodáson alapuló osztott késleltetésű modellek számos alkalmazását találjuk a *beruházások elemzésében*. Már Koyck idézett úttörő jelentőségű munkája [22] is a beruházásokra vonatkozott. Jorgenson [18], [19] beruházási függvénye többféle késleltetési struktúrát épít egybe. A beruházások iránti keresletet egyrészt egy kívánt (optimális vagy tervezett) állótőkeállomány határozza meg, amelyhez a beruházási ráfordítások parciálisan alkalmazkodnak. Egy másik késleltetési struktúra a beruházási ráfordítások és az üzembehelyezés közötti időeltolódást hivatott kifejezni.

A Jorgenson féle beruházási függvény végső formája:

$$I_t - \delta K_t = \lambda_1(I_{t-1} - \delta K_{t-1}) + \lambda_2(I_{t-2} - \delta K_{t-2}) + \alpha \sum_{j=s}^{s+3} \beta_j \Delta \frac{p_{t-j} Q_{t-j}}{C_{t-j}},$$

ahol I_t a t-időszaki beruházási ráfordítások változója, s a késleltető függvény kezdőpontját jelöli, értéke általában kettőtől négy negyedévig terjed. K_t a tőkeállomány, $p_t \cdot Q_t$ a hozzáadott érték folyó áron a t-időszakban, δ pedig az amortizációs ráta. (Jorgenson a K_t^* kívánt állóeszközállományt egy Cobb-Douglas féle termelési függvényből származtatja marginális termelékenységi feltételt véve figyelembe:

$$K_t^* = \alpha \frac{p_t Q_t}{C_t},$$

ahol α a termelés tőkére vonatkoztatott elaszticitása, C_t pedig a tőkére konstruált árváltozó.)

A Jorgenson-féle beruházási függvény a késleltetési struktúrán (struktúrákon) alapuló beruházási függvények egyik válfaja, több más formulát is alkalmaztak ezen a területen. Részben hasonló hipotézisekből kiindulva, magyar beruházási adatokra is illesztettek osztott késleltetésű modellt [16].

A termeléshez és értékesítéshez szükséges *készletállomány alkalmazkodási mechanizmusának* leírására ugyancsak széleskörben alkalmaznak parciális alkalmazkodási modelleket. Megemlítjük M. C. LOVELL modelljét [24], amely a következő két összefüggésen alapul:

$$In_t^* = \alpha + \beta \hat{x}_t$$

$$In_t^p = (1 - \lambda)\, In_t^* + \lambda\, In_{t-1}\,.$$

Az első egyenlet szerint a kívánt készletszint In_t^* az értékesítésre vonatkozó várakozásoktól $(\hat{x}_t)$ függ.[2] Ezért a tervezett készletszintet (In_t^p) a kívánt szinthez tartozó parciális alkalmazkodással írja le a második egyenlet.[3] A készletegyenleteken kívül a termelésre- és a tervezett termelésre vonatkozó összefüggések is szerepelnek Lovell modelljében.

A készletfelhalmozás alakulásának elemzése hazai gazdasági vizsgálatainknak is központi kérdése. Több kísérletet tettek a közelmúltban a készletmozgások modellezésére, egyrészt a jelenség belső ciklikus mozgásának meghatározására, másrészt a készletek más fontos gazdasági makrokategóriákkal való összefüggésének vizsgálatára [32], [3], [17]. E vizsgálatokban is alkalmaztak osztott késleltetésű modelleket.

A parciális alkalmazkodás egy további felhasználása a *pénzkészlet iránti kereslet* meghatározása [23]. Míg a kívánt pénz optimális mennyisége (M_t^*) a jövedelem, a gazdagság és a kamatlábak függvénye, addig a tényleges pénzkészlet (M_t) iránti keresletet a következő alkalmazkodási egyenlettel közelíthetjük:

$$M_t = (1 - \lambda)\, M_t^* + \lambda M_{t-1}\,.$$

Az eddig felsorolt példák a parciális alkalmazkodási modell klasszikus felhasználási lehetőségeit mutatták be, a következőkben megemlítjük azokat az alkalmazásokat, amelyek a *disequilibrium helyzetek elemzésére* szolgálnak. Ezekben az esetekben nem arról van szó, hogy az alkalmazkodás az illető változó kívánt vagy optimális szintjének elérésére törekszik, hanem valamely változó alkalmazkodása az érintett terület (vagy piac) egyensúlyának biztosítását vagy létrejöttét szolgálja. Erre klasszikus példa az *áralkalmazkodási mechanizmus* szerepeltetése disequilibrium modellben. Feltételezve, hogy a kereslet D_t és a kínálat S_t nincs egyensúlyban $D_t \neq S_t$, az áralkalmazkodási mechanizmus:

$$P_t = P_{t-1} + \gamma(D_t - S_t),$$

[2] Megjegyezzük, hogy egyes modellek egyszerre tartalmazzák a parciális alkalmazkodás és az adaptív várakozások feltételezését.

[3] Az alkalmazkodási modellekben általában nem tételezik fel a „kívánt" és a „tervezett" értékek egyenlőségét. Míg az előbbi kategória nem-megfigyelhető fiktív érték, az utóbbi egy önkényesen meghatározott érték.

azaz az árváltozások a túlkereslet (túlkínálat) függvényében alakulnak, vagyis alkalmazkodásukkal az egyensúly létrejöttét segítik elő (lásd pl. [30]). Az ár-alkalmazkodás mintájára más változókat is fel lehet használni hasonló formában a túlkereslet (túlkínálat) mérésére (lásd pl. [14]-ben).

A tervgazdálkodásban kialakult disequilibrium helyzetek modelljeiben használható a *tervalkalmazkodási mechanizmus* [31]. Ennek egyik válfaja a következő:

$$Q^p_{t+1,t} = Q^p_{t,t-1} + \lambda(P_t - S_t),$$

ahol $Q^p_{t+1,t}$ a t időszakban a $t+1$ időszakra tervezett értéket jelöli. Azaz feltételezik, hogy maga a tervezés alkalmazkodik a kialakult nem-egyensúlyi $P_t \neq S_t$ helyzethez, úgy, hogy az egyensúly javuljon.

1.3 *Adaptív várakozásokon alapuló modellek*

Ahogy az 1.1 pontban bemutattuk, az adaptív várakozásokon alapuló hipotézis egzakt formában ugyanahhoz az osztott késleltetésű modellhez vezet, mint a parciális alkalmazkodás hipotézise. Annak ellenére, hogy a kétféle hipotézis között a határvonal nem éles, sőt olyan modellek is találhatók, amelyek egyszerre tartalmazzák mindkét típusú feltételezést, megállapíthatjuk, hogy az adaptív várakozásokon alapuló modellek nem annyira elterjedtek, mint a parciális alkalmazkodási modellek. A következőkben felsoroljuk azokat a fő területeket, ahol ez utóbbiak alkalmazása jellemző.

Klasszikus példát jelent az *árváltozások, illetőleg az infláció alakulására vonatkozó várakozások* modellezése [4]. Nyilvánvaló, hogy a gazdasági alanyok (tervezők, vállalatok és fogyasztók) jelen magatartását és döntéseit befolyásolják azok az elképzelések, amelyeket az árak ezévi-jövőévi alakulásáról kialakitottak. Ezeknek az elképzeléseknek az alakulására nyújt egy egyszerű hipotézist az adaptív várakozások feltételezése. Amennyiben y_t-vel jelöljük azt a változót, amelyre hat az árra vonatkozó várakozás: $\hat{P}_{t+1}$, akkor a modell alakja a következő:

$$y_t = \alpha + \beta \hat{P}_{t+1}$$

$$\hat{P}_{t+1} = (1-\gamma)\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j P_{t-j}$$

$$y_t = \alpha(1-\gamma) + \beta(1-\gamma) P_t + \gamma y_{t-1}.$$

A készletek modellezésében is fontos szerepet játszanak várakozások, akár az áralakulásra, akár a következő időszaki értékesítésekre vonatkozóan [25].

Szintén klasszikus alkalmazásnak számít az M. FRIEDMAN [7] féle *fogyasztási függvényben a fogyasztó jövedelmére vonatkozó várakozások* figyelembevétele. A várt jövedelmek változóját a tényleges jövedelmek idősoraiból konstruálják, súlyozott átlag formájában. Ez a típusú jövedelemváltozó előrejezését adja egy olyan jövedelemnek, amely egy permanens- és egy tranziens komponensből tevődik össze. Általánosan is mondható, hogy ilyen típusú változók konstruálására alkalmas az adaptív várakozások hipotézise.

Végül megemlítünk egy olyan alkalmazást [1], amely a *spekulációs nemzetközi pénzmozgásokat* vizsgálta a kanadai változó cserearánytól való függőségében. Ezek a pénzmozgások nem annyira a tényleges aktuális cserearánytól

$[r_t]$ függöttek, hanem a cserearány egy normális, elvárt, nem megfigyelhető szintjétől $[\hat{r}_t]$:

$$\hat{r}_t - \hat{r}_{t-1} = (1-\gamma)(r_t - \hat{r}_{t-1}).$$

A modellben becsült értékek azt mutatták, hogy azok akik spekulációkba bocsátkoztak, elég mereven ragaszkodtak elképzeléseikhez, s csak lassan alkalmazkodtak a tényleges cserearány változásokhoz.

2. A racionális várakozások hipotézisén alapuló modellek

Az előző fejezet 1.3 pontjában az adaptív várakozások hipotézisén alapuló osztott késleltetésű modelleknél is láttuk, hogy különböző gazdasági jelenségek alakulására vonatkozó várakozások, elképzelések gyakran szerepet játszanak a gazdasági alanyok döntéshozatalában, tervezett és megvalósult viselkedésükben. Éppen ezért a várakozásokat elég széles körben felhasználták az alkalmazott ökonometriában is. A várakozásokra vonatkozó direkt megfigyelések (közvéleménykutatás vagy egyéb információk) ritkán állnak rendelkezésre. Ezért a várakozásokat származtatott változókkal helyettesítik. A származtatás módjára különböző hipotéziseket használnak fel. Ilyen hipotézis az „adaptív várakozás", amelynek alapja az a gondolat, hogy a jövőre vonatkozó várakozásokat a múltbeli értékek határozzák meg. Egy alternatív, s az utóbbi években igen gyakran használt hipotézis a *racionális várakozások hipotézise*, amelyet MUTH [27] dolgozott ki 1960-ban. Mielőtt részletesebben bemutatnánk MUTH úttörő jelentőségű munkáját, kiemeljük e hipotézis lényegi tulajdonságát, amely egyben megkülönbözteti a racionális várakozásokon alapuló modelleket az 1. részben bemutatott egyszerűbb modellektől is.

A racionális várakozások lényege az a feltételezés, hogy a gazdasági alanyok valamely változóra vonatkozó várakozásaikat úgy képezik, hogy közben figyelembe veszik az egész gazdasági rendszert, azaz a többi változó között fennálló interdependens kapcsolatokat is. Ennek a feltételezésnek két olyan következménye van, amelyek minőségileg megkülönböztetik a racionális várakozások modelljeit az 1. részben bemutatott egyszerű alkalmazkodási modellektől. Az egyik ilyen tulajdonság a *rendszerszemlélet*, az az eltérés, hogy míg az egyszerű alkalmazkodási modellekben egyetlen endogén változónak és egy egzogén változónak a folyó és múltbeli értékei közötti dinamikus kapcsolatát írjuk le, addig a racionális várakozásokkal nem elszigetelt összefüggést vizsgálunk, hanem a változókat és várakozásaikat a teljes gazdasági rendszerben (illetve ennek modelljében) ábrázoljuk.

Amennyiben ez a modell szimultán egyenletekből álló ökonometriai modell, akkor a változók endogén és egzogén minősítése természetesen továbbra is szükséges, de most már a rendszer összes endogén változója áll szemben egyszerre a rendszer összes egzogén változójával. „Racionálisan" csak ezen dinamikus kapcsolatrendszeren belül képezhetjük a várakozásokat. A másik tulajdonság az első lényegi tulajdonságból eredő formai sajátság, az, hogy míg az egyszerű alkalmazkodási modellek általában egy vagy legfeljebb két egyenletből állnak, a racionális várakozásokat figyelembe vevő modellek *mindig több egyenletes modellek*.

Megemlítjük, hogy a racionális várakozások hipotézise a gondolat születése óta eltelt húsz évben rendkívül népszerű lett. A növekvő számú alkalmazással egyidőben közgazdasági- és matematikai kutatásokat folytattak és folytatnak a közgazdasági és módszertani háttér teljesebbé tételére [26]. Várható, hogy az elkövetkezendő években, amikor a gyorsabban változó gazdasági feltételek új és új követelményeket támasztanak az ökonometriai modellekkel szemben, a racionális várakozások hipotézisén alapuló módszerek fejlődése még nagyobb lendületet kap.

Úgy gondoljuk, hogy érdemes e módszer hazai felhasználási lehetőségeinek a megfontolása is, hiszen akarva vagy akaratlanul nálunk is kialakulnak elvárások, s e várakozások befolyásolják gazdasági alanyaink (pl. a vállalatok, a tervezők, a fogyasztók stb.) magatartását és döntéseit.

A következőkben előbb bemutatjuk Muth alaphipotézisét, majd fő vonalakban ismertetünk néhány olyan esetet, amely érzékelteti, hogy hogyan jelennek meg a racionális várakozások ökonometriai modellekben.

2.1 *Racionális várakozások és az ármozgások elmélete*
A téma felvetése Muth bevezető tanulmányában [27]

A gazdasági jelenségek rövidtávú ingadozásának elemzése már régen igazolta azt a feltételezést, hogy alakulásukra hatással vannak azok az elképzelések, várakozások, amelyek a gazdaság alanyaiban kialakulnak az események bekövetkezése előtt. Viszonylag kevesebbet foglalkoztak azzal, hogy hogyan, milyen módon képezik ezeket a várakozásokat. A ,,racionális várakozások'' hipotézise azt a feltételezést tartalmazza, hogy a várakozásokat úgy képezik, hogy azok ugyanazok legyenek, mint a releváns gazdasági elmélet előrejelzései. Annak ellenére, hogy léteznek különbségek a különböző egyedi várakozások között, ezek a várakozások ugyanazon az információs bázison alapulnak, s tendencia jelleggel ugyanazon eredményt adják. Más oldalról közelítve, feltételezhetjük, hogy a gazdasági alanyok kénytelenek ,,tanulni'' az időben, nem hagyhatnak figyelmen kívül információt, s lehetőleg rendszer-szemléletben gondolkoznak. A várakozások ,,racionális'' alakítása tehát nem azt jelenti, hogy a gazdasági alanyok érdekeiknek megfelelően, ésszerűen vagy optimálisan döntik el, hogy mit tegyenek, hanem csak azt, hogy szubjektív ítéleteik, elképzeléseik nem térhetnek el hosszabb távon a gazdasági valóságtól. Ez a feltételezés, szemben a korábbi elméletekkel, nem azt állítja, hogy a dinamikus modellek túl ,,racionálisak'' a valósághoz képest, hanem azt, hogy a modellek nem eléggé veszik figyelembe a ,,racionalitást''.

Elméletének bővebb kifejtésére és igazolására Muth két konkrét és viszonylag egyszerű gazdasági szituációt leíró modellt elemez.

a) *Ármozgások egy izolált piacon*

A rövidtávú áringadozásokra vonatkozó várakozások hatását vizsgáljuk egy egyszerű (egytermékes) piac körülményei között.

A modell egyenletei a következők:

$$\begin{aligned} C_t &= -\beta p_t && \text{(kereslet)} \\ Q_t &= \gamma p_t^e + u_t && \text{(kínálat)} \\ Q_t &= C_t && \text{(piaci egyensúly)} \qquad (2.1) \end{aligned}$$

ahol Q_t-vel jelöljük a vizsgált termékből a t időszakban gyártott volument, C_t-vel a termék fogyasztására fordított pénzösszegeket jelöljük, p_t a t időszaki ár, p_t^e pedig az a t időszaki piaci árra vonatkozó várakozás, amelyet a $t-1$ időszakban az akkor elérhető információ alapján kialakítottak. A kínálati függvényben u_t a véletlen hatásokat reprezentáló változó. Az összes változót az egyensúlyi értéküktől való eltérésekre értelmezzük.

Ha a Q_t változót kiküszöböljük a (2.1) egyenletből, akkor a modell a következő összefüggésre redukálható:

$$p_t = -\frac{\gamma}{\beta} p_t^e - \frac{1}{\beta} u_t. \tag{2.2}$$

A modellel előállított előrejelzést úgy kapjuk, hogy a változók helyére várható értéküket írjuk. (Első lépésben feltételezzük, hogy $Eu_t = 0$.)

$$Ep_t = -\frac{\gamma}{\beta} p_t^e. \tag{2.3}$$

Ha a modell előrejelzése lényegesen jobb mint a várakozások értéke, akkor ez a körülmény az előrejelzést előállító cégnek extra nyereség elérését teszi lehetővé (pl. készletezési spekulációkkal).

Ez a lehetőség nem áll fenn többé, ha feltételezzük, hogy a vállalat várakozása éppen egybeesik a modell előrejelzésével, azaz

$$Ep_t = p_t^e. \tag{2.4}$$

(2.4.) hipotézis fejezi ki a racionalitási feltétel lényegét. Ha $\gamma/\beta \neq -1$, akkor a (2.4) racionalitási feltétel csak úgy állhat fenn, ha $p_t^e = 0$, azaz a várt ár éppen az egyensúlyi ár (azaz az egyensúlyi ártól való eltérés 0).

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a kínálati függvényben szereplő véletlen változó nem jelezhető előre, s ezért várható értékét, nullát helyettesítettük be a (2.2) függvénybe. A legtöbb piacon mind a keresleti, mind a kínálati oldalon figyelembe kell venni sztochasztikus változókat (lényegében az árváltozón kívüli egyéb hatásokat is ezek közé soroljuk ebben az egyszerű modellben). Ha ezek megfigyelhetők, feltételes várható értéküket használhatjuk fel előrejelzésükre. Felhasználva a (2.2)—(2.4) összefüggéseket, az árra vonatkozó várakozást a következő összefüggés fejezi ki:

$$p_t^e = -\frac{1}{\beta+\gamma} Eu_t. \tag{2.5}$$

Ha most nem tételezzük fel azt, hogy az u_t változó normális eloszlású független változó zérus várható értékkel, akkor az Eu_t értékét a múlt megfigyelései alapján becsüljük. Nézzük meg hogyan alakulnak a várakozások szeriálisan korrelált u_t véletlen változóknál. Akkor az u_t változót ε_t nulla várható értékű és σ^2 varianciájú független normális változó mozgó átlagolásával írhatjuk fel:

$$u_t = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \, \varepsilon_{t-1}, \qquad E\varepsilon_j = 0, \qquad E\varepsilon_i \, \varepsilon_j = \begin{cases} \sigma^2 \text{ ha } i = j \\ 0 \text{ ha } i \neq j. \end{cases} \tag{2.6}$$

A p_t árváltozások (az egyensúlyi ártól való eltérések) ezért szintén az ε_t-ből származtathatók:

$$p_t = \sum_{i=0}^{\infty} W_i \, \varepsilon_{t-i} \, . \tag{2.7}$$

Az árra vonatkozó várakozás a $t - 1$ időszakban csak annyiban tér el a (2.7) összefüggéstől, hogy a t időszaki ε_t érték helyére várható értékét, nullát helyettesítjük:

$$p_t^e = W_0 E \, \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} W_i \, \varepsilon_{t-1} = \sum_{i=1}^{\infty} W_i \, \varepsilon_{t-i} . \tag{2.8}$$

Általánosan, $p_{t,L}$-lel jelölve a $t + L$ időszakra vonatkozó, a t időszakban kialakított várakozást:

$$p_{t-L,L} = \sum_{i=L}^{\infty} W_i \, \varepsilon_{t-i} \, . \tag{2.9}$$

A (2.7) és (2.8) összefüggést (2.1)-be helyettesítve és felhasználva az egyensúlyi feltételt:

$$W_0 \varepsilon_t + \left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right) \sum_{i=1}^{\infty} W_i \, \varepsilon_{t-i} = -\frac{1}{\beta} \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \, \varepsilon_{t-i} \, . \tag{2.10}$$

A (2.10) összefüggés olyan azonosság, amely ε_j bármely értéke mellett érvényesül, ezért az ε_j-re vonatkozó megfelelő együtthatóknak egyenlőknek kell lenniük:

$$W_0 = -\frac{1}{\beta} \omega_0$$

$$W_i = -\frac{1}{\beta + \gamma} \omega_1 . \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{2.11}$$

A (2.11) összefüggésrendszer az ár és az árra vonatkozó várakozás közötti kapcsolat paramétereit fejezi ki, de úgy, hogy mindkét változót az ε_t független véletlen változó lineáris kombinációjaként állítottuk elő. A mi célunk viszont az, hogy az árra vonatkozó várakozást az árváltozó múltbeli értékeiből tudjuk meghatározni valamilyen

$$p_t^e = \sum_{j=1}^{\infty} V_j \, p_{t-j} \tag{2.12}$$

formában.

A V_j súlyokat a W_j súlyokból a következőképpen határozhatjuk meg. Helyettesítsük a (2.7) és (2.8) összefüggéseket (2.12)-be:

$$\sum_{i=1}^{\infty} W_i \, \varepsilon_{t-i} = \sum_{j=1}^{\infty} V_j \sum_{i=0}^{\infty} W_i \, \varepsilon_{t-i-j} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{i} V_j \, W_{i-j} \right) \varepsilon_{t-i} \, . \tag{2.13}$$

Mivel (2.13)-ban az azonosságnak fenn kell állnia ε_t minden értékére

$$W_i = \sum_{j=1}^{i} V_j \, W_{i-j} . \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{2.14}$$

A (2.14) egyenletrendszer trianguláris szerkezetű, ezért szukcesszív módon megoldható a V_1, V_2, V_3 . . . koefficiensekre.

A levezetésből látható, hogy a racionális várakozások modellje, az adaptív várakozások modelljéhez hasonlóan, a múlt áringadozásaiból vezeti le a jövő árváltozására vonatkozó várakozásokat. A lényeges különbséget viszont az okozza, hogy míg a modell koefficiensei (a súlyok) az adaptív várakozási modellben a közgazdasági környezettől teljesen függetlenül pusztán az érintett változó múltbeli értékeinek alapján határozódnak meg, addig a racionális várakozások modelljében ezek a súlyok (2.10) szerint a közgazdasági környezetet leíró modelltől, jelenleg a (2.1) piaci keresleti és kínálati egyenletek β és γ paramétereitől függnek. Ez a körülmény jelenti a ,,racionalitást''. Az árváltozásokra irányuló várakozások tehát nemcsak a múlt időszakok árváltozásaitól függenek, hanem a keresleti és kínálati függvénytől is, azaz keresleti és kínálati tényezők is közrejátszanak az árak alakulására vonatkozó megfontolásokban.

b) *Készletezési spekulációk*

Különösen érdekes hatások figyelhetők meg az árra vonatkozó várakozások és a készletezési politika között. A készletek keresleti függvénye függ a folyó ár és a jövőre vonatkozó várt ár különbségétől. Míg a várt áremelkedés a készletállomány növelésének irányában hat, árcsökkenés kilátásában fordított a helyzet.

A spekulációs készletezés eredményeként nyereségre tehet szert a vállalat. Ha π_t-vel jelöljük a várt nyereséget, akkor ez a spekulatív készletváltozás In_t és az árváltozás szorzata:

$$\pi_t = In_t(p_{t+1} - p_t). \tag{2.15}$$

Maga a spekulatív készletváltozás a folyó ár és a jövőre vonatkozó várt ár közötti eltérés függvénye

$$In_t = \alpha(p^e_{t+1} - p_t). \tag{2.16}$$

A (2.16) készletegyenlettel kiegészítve, a (2.1) modell a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned} C_t &= -\beta p_t && \text{(kereslet)} \\ Q_t &= \gamma p^e_t + u_t && \text{(kínálat)} \\ In_t &= \alpha(p^e_{t+1} - p_t) && \text{(készletspekuláció).} \end{aligned} \tag{2.17}$$

A piaci egyensúlyi feltétel itt:

$$C_t + In_t = Q_t + In_{t-1}. \tag{2.18}$$

Megmutatható [26], hogy ebben az esetben az árra vonatkozó várakozás az előző időszaki ár függvénye:

$$p^e_t = \lambda p_{t-1}. \tag{2.19}$$

A λ paraméter értéke 0 és 1 közé esik és a modell többi (α, β és γ) paraméterétől függ. Amennyiben λ értéke 1-hez van közel, akkor az áralakulásra erősen hat a készletezés. Ha λ 0-hoz esik közel, akkor a modell lényegében a (2.1) induló modellünk, amelyben még nem volt szerepe a készletezésnek.

Ha a (2.19) kifejezést (2.17)-be helyettesítjük és a modellt redukáljuk a (2.18) egyensúlyi feltételt felhasználva, akkor a modell a következő lesz:

$$-[\beta + \alpha(1-\lambda)]p_t = [\gamma\lambda - \alpha(1-\lambda)]p_{t-1} + \varepsilon_t. \tag{2.20}$$

Ebben a formában a korábbi β és γ paraméterek mellett az α és λ paraméterek is helyet kapnak, s így a racionális ár-várakozásokra a kereslet, a kínálat és a készletezés is hatást gyakorol, a megfelelő α, β, γ és λ paramétereken keresztül.

2.2 *Racionális várakozások szimultán ökonometriai modellekben*

A várakozások „racionális" jellegének lényege az, hogy azokat nem elszigetelten, hanem az egész gazdasági rendszer interdependens összefüggésrendszerét figyelembe véve képezik. Ezért a racionális várakozások alkalmazása egyrészt egy szimultán egyenletrendszerből álló ökonometriai modellt igényel, másrészt maguk a várakozások is e modell keretében határozhatók meg. A szimultán egyenletrendszerből álló ökonometriai modellek mintegy negyven éves múltra tekinthetnek vissza, és a racionális várakozások hipotézise is mintegy húsz éve született meg. Új jelenség viszont a racionális várakozások szerepeltetése ökonometriai modellben. A következőkben K. F. WALLIS 1980-ban megjelent tanulmánya [36] alapján bemutatjuk azokat a főbb eseteket, amelyekben a racionális várakozások megjelennek szimultán ökonometriai modellekben.

Induljunk ki a szimultán egyenletrendszerből álló ökonometriai modell általános strukturális formájából:

$$By_t + \Gamma x_t = u_t \qquad t = 1, \ldots, T$$

Ez egy olyan g strukturális egyenletből álló lineáris modell, amelyben y_t a kölcsönösen összefüggő endogén változók g elemű vektora, x_t a predeterminált (egzogén és késleltetett endogén) változók k elemű vektora, u_t a véletlen változó g-elemű vektora, B és Γ a strukturális paraméterek $g \times g$, illetve $g \times k$ rendű mátrixai.

Ebben a formában minden egyes egyenlet egy részét írja le a gazdaságnak, amelyben valamelyik endogén változót fejezzük ki endogén- és predeterminált változók függvényében. Annak érdekében, hogy explicitté tegyük, hogy a kölcsönösen összefüggő endogén változók hogyan függenek a predeterminált változóktól, a rendszert redukált formára hozzuk:

$$y_t = \Pi x_t + v_t,$$

ahol Π a redukált forma $g \times k$ rendű koefficiens mátrixa, v_t pedig a redukált rendszer g-elemű véletlen változó vektora:

$$\Pi = -B^{-1}\Gamma, \qquad v_t = B^{-1}u_t.$$

1. eset

Induljunk ki az előbbi „klasszikus" modellből úgy, hogy a megfigyelhető y_t és x_t endogén és egzogén változókon kívül a modellben y^*_{1t} változókat is, azaz endogén változókra vonatkozó nem megfigyelhető várakozásokat is szerepeltetünk. Ekkor a modell a következő formájú lesz:

$$By_t + A_1 y^*_{1t} + \Gamma x_t = u_t,$$

ahol a korábbi vektorok és mátrixok mellett az y_{1t}^* h elemű vektor ($h \leq g$), és az A_1 $g \times h$ elemű koefficiens mátrix is megjelenik.

Feltesszük tehát, hogy a strukturális egyenletekben az endogén változók értékére vonatkozó várakozások is megjelennek. A racionális várakozások hipotézise szerint az y_{1t} endogén változókra vonatkozó várakozások a $t-1$ időszakban rendelkezésre álló összes információra[4] mint feltételre vonatkoztatott várható értékek:

$$y_{1t}^* = E(y_{1t} \mid \Omega_{t-1}).$$

A modell redukált formája:

$$y_t = -B^{-1} A_1 y_{1t}^* - B^{-1} \Gamma x_t + B^{-1} u_t.$$

Particionálva:

$$y_{1t} = \Pi_{11} y_{1t}^* + \Pi_{12} x_t + v_{1t}$$
$$y_{2t} = \Pi_{21} y_{1t}^* + \Pi_{22} x_t + v_{2t},$$

Feltételes várható értékeket véve az első mátrixegyenletben:

$$E(y_{1t} \mid \Omega_{t-1}) = \Pi_{11} E(y_{1t} \mid \Omega_{t-1}) + \Pi_{12} E(x_t \mid \Omega_{t-1}) + E(v_{1t} \mid \Omega_{t-1}).$$

Feltételezve, hogy a v_{1t} véletlen változó nem tartalmaz autokorrelációt és hogy az $(I - \Pi_{11})$ mátrix nem-szinguláris, valamint $\hat{x}_t$-t írva $E(x_t \mid \Omega_{t-1})$ helyére:

$$y_{1t}^* = (I - \Pi_{11})^{-1} \Pi_{12} \hat{x}_t.$$

Azaz a racionális várakozások nem mások, mint a predeterminált változókra vonatkozó előrejelzések lineáris kombinációi. A racionális várakozásokra nyert kifejezést behelyettesítve a particionált redukált formába:

$$y_{1t} = P_{11} \hat{x}_t + P_{12} x_t + v_{1t}$$
$$y_{2t} = P_{21} \hat{x}_t + P_{22} x_t + v_{2t},$$

ahol:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11}(1 - \Pi_{11})^{-1}\Pi_{12} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21}(1 - \Pi_{11})^{-1}\Pi_{12} & \Pi_{22} \end{bmatrix}.$$

A racionális várakozások hibájára az

$$y_{1t} - y_{1t}^* = \Pi_{12}(x_t - \hat{x}_t) + v_{1t}$$

összefüggés adódik, amely szerint ez a hiba az egzogén változók előrejelzési hibájától és a folyó időszak véletlen zavaró tényezőjétől függ.

Ha a kiinduló strukturális rendszer A_1 mátrixát kiegészítjük egy $g \times (g-h)$ rendű zérusokból álló blokkal az $A = [A_1 \vdots 0]$ $g \times g$ méretű mátrix felhasználásával:

$$By_t + Ay_t^* + \Gamma x_t = u_t.$$

[4] Az Ω_{t-1} jelölés egészen általánosan a modellbe foglalt összes információt jelöl a $t-1$-dik időszakban. Feltételezik, hogy a modell tartalmazza az összes lényeges információt.

Ekkor a racionális várakozások felírhatók a strukturális paraméter-mátrixok segítségével:

$$y_t^* = -(B + A)^{-1} \Gamma \hat{x}_t.$$

A racionális várakozások hibája pedig:

$$y_t - y_t^* = - B^{-1} \Gamma(x_t - \hat{x}_t) + B^{-1} u_t.$$

2. eset

Az előző esethez képest dinamikus továbbfejlesztés, ha a strukturális rendszerbe nemcsak a t-időszaki várakozásokat építjük be, hanem a jövő $t+1$, $t+2, \dots t+T$ időszakokból álló teljes periódusra vonatkozó várakozásokat. Akkor az egyenletrendszer a következő formájú lesz:

$$By_t + \sum_{j=0}^{\tau} A_{1j} y_{1,t+j}^* + \Gamma x_t = u_t.$$

A redukált forma:

$$y_t = - \sum_{j=0}^{\tau} B^{-1} A_{1j} y_{1,t+j}^* - B^{-1} \Gamma x_t + B^{-1} u_t.$$

Az y_{1t}-re vonatkozó részt külön kifejezve:

$$y_{1t} = \sum_{j=0}^{\tau} \Pi_{11,j} y_{1,t+j}^* + \Pi_{12} x_t + v_{1t}.$$

Feltételes várható értékeket véve és feltételezve a hibatényező autokorrelálatlanságát $(y_{1,t+j}^*) = E(y_{1,t+j} \mid \Omega_{t-1})$;

$$(1 - \Pi_{11,0}) y_{1,t}^* = \sum_{j=1}^{\tau} \Pi_{11,j} y_{1,t+j} + \Pi_{12} E(x_t \mid \Omega_{t-1}),$$

amely többváltozós τ-ad rendű differenciaegyenlet. Ennek létezik megoldása y_{1t}^*-re nézve az $\hat{x}_{t+j} = E(x_{t+j} \mid \Omega_{t-1})$ $j = 0, 1, 2, \dots$ változókban kifejezve, amennyiben az egyenlet stabil.[5]

A racionális várakozás hibájára ebben az esetben is az:

$$y_{1t} - y_{1t}^* = (\Pi_{11,0} - I) y_{1t}^* + \sum_{j=1}^{\tau} \Pi_{11,j} y_{1,t+j}^* + \Pi_{12} x_t + v_{1t} = \Pi_{12}(x_t - \hat{x}_t) + v_{1t}$$

összefüggés adódik.

3. eset

Végül vázoljuk azt az esetet, amikor a dinamikus szimultán egyenletrendszerből álló modellben nemcsak az endogén változókra vonatkozó várakozások jelennek meg, hanem mind az endogén, mind az egzogén változók késleltetett értékeit is megengedjük.

Ekkor a strukturális rendszer a következő lesz:

$$B(L) y_t + A y_t^* + \Gamma(L) x_t = u_t.$$

[5] Nem arról van szó, hogy csak stabil esetben létezik megoldás, hanem csak arról, hogy a stabilitásra tett feltétel mellett írható fel a megoldás ilyen formában (lásd [36]-ban).

ahol $B(L)$ és $\Gamma(L)$ az L késleltető operátor polinomjait jelöli ($Lz_t = z_{t-1}$):

$$B(L) = B_0 + B_1 L + \ldots + B_r L^r$$

$$\Gamma(L) = \Gamma_0 + \Gamma_1 L + \ldots + \Gamma_s L^s.$$

Azaz a modellben megjelennek az endogén változók 1, 2. . . . r időszakkal, az egzogén változók 1, 2, . . . s időszakkal késleltetett értékei is.

A racionális várakozásokat ismét úgy származtatjuk, hogy vesszük a feltételes várható értékeket:

$$y_t^* = -(B_0 + A)^{-1} E[\{\Gamma(L) x_t + B_1 y_{t-1} + \ldots + B_r y_{t-r}\} \mid \Omega_{t-r}].$$

A figyelembe vett információ most az endogén változók késleltetett értékeit is tartalmazza, s a kifejezésben csak az x_t egzogén változókat kell előrejelezni:

$$y_t^* = -(B_0 + A)^{-1} \{\Gamma_0 \hat{x}_t + \Gamma_1 x_{t-1} + \ldots + \Gamma_s x_{t-s} + \\ + B_1 y_{t-1} + \ldots + B_r y_{t-r}\}.$$

Tehát lényegében a racionális várakozások formálásában ugyanazok a változók ugyanolyan késleltetéssel jelentkeznek, mint a strukturális formában.

A racionális várakozások hibája ebben az esetben is csak a folyó egzogén változók előrejelzési hibájától és a folyó zavaróténvezőtől függ:

$$y_t - y_t^* = -B_0^{-1} \Gamma_0 (x_t - \hat{x}_t) + B_0^{-1} u_t .$$

(Beérkezett: 1984. március 14-én.)

IRODALOM

1. Arndt, S. W.: International Short Term Capital Movements: A Distributed Lag Model of Speculation in Foreign Exchange. *Econometrica* 36. 1968. 59–70.
2. Bánkövi, Gy., Veliczki, J., Ziermann, M.: Prediction of Macroeconomic Time Series by System of Distributed Lag Equations, Colloquia Mathematica Societatis János Bólyai, 12. *Progress in Operations Research.* Ed. Prékopa A. North-Holland P. C., Amsterdam (1974) 71–81.
3. Budavári P.–Náray L.: *A készletfelhalmozás és a növekedés néhány összefüggése a magyar gazdaságban* OT Közgazdasági Főosztály. Budapest, 1982. 15.
4. Cagan, P. D.: The Monetary Dynamics of Hyperinflation In: *Studies in the Quantity Theory of Money,* edited by M. Friedman. Chicago 1956.
5. Chow, G. C.: Statistical Demand Functions for Automobiles and their Use for Forecasting. In: *The Demand for Durable Goods,* adited by A. C. Harberger, Chicago. 1960.
6. Dhrymes, O. J.: *Distributed Lags,* Nort-Holland P. Co. Amsterdam, 1981.
7. Friedman, M., *A Theory of the Consumption Function.* Princeton: Princeton University Press, 1957.
8. Fuller, W. A. and Martin, J. E.: The Effects of Autocorrelated Errors on the Statistical Estimation of Distributed Lag Models. *J. Farm. Econ.* 43 (1961)
9. Goldberger, A. S.: *Impact Multipliers and Dynamic Properties of the Klein–Goldberger Model.* Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1959
10. Griliches, Z.: Distributed lags: A survey. *Econometrica* vol. 35. (1967) 16–49.
11. Harberger, A. C., ed. *The Demand for Durable Goods.* Chicago, University of Chicago Press, 1960.
12. Houthakker, H. S. and Taylor, L. D.: *Consumer Demand in the United States 1929–1970.* Cambridge: Harvard University Press, 1966.
13. Hulyák K.: A lakosság fogyasztásának elemzése dinamikus keresleti függvényekkel, *Statisztikai Szemle,* 1980. december 1224–1245.

14. HULYÁK K.: Egyensúlyhiányok a lakossági fogyasztásban, (I., II.) *Statisztikai Szemle*, 1983. március és április.
15. HUNYADI L.: *Népgazdasági folyamatok késleltetési struktúrájának elemzése. Osztott késleltetési modellek elmélete és gyakorlati alkalmazási lehetőségei.* A magyar népgazdaság ökonometriai makromodelljének munkaanyagai XVIII. SZÁMKI, 1981.
16. HUNYADI L.: *A H-2 modell szerkezete és becslései* A magyar népgazdaság ökonometriai makromodellezésének eredményei IV. SZÁMKI, 1980.
17. HUNYADI L.: *A készletváltozások egy aggregált modellje* (kézirat) OT TGI 1982.
18. JORGENSON, D. W.: Anticipations and Investment Behavior Ch. 2 of Duesenberry et al. *The Brookings Quarterly* Econometric Model of the U. S. Economy. Chicago, 1965.
19. JORGENSON, D. W.: Capital Theory and Investment Behavior *Amer. Econ. Rev.* 53 (1963) 247—259.
20. KORNAI J., MARTOS B.: *Szabályozás árjelzések nélkül* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981.
21. KORNAI J.: *Növekedés, hiány és hatékonyság.* A szocialista gazdaság egy makrodinamikus modellje. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1982.
22. KOYCK, L. M.: *Distributed Lags and Investment Analysis.* Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1954.
23. DE LEEUW, F.: The Demand for Money: Speed of Adjustment Interest Rates, and Wealth, In: *Monetary Process and Policy: A symposium* edited by G. Horwich Homewood, 1966.
24. LOVELL, M. C.: Manufacturers Inventories, Sales Expectations and the Acceleration Principle *Econometrica* 29 (1961) 293—314.
25. LOVELL, M. C.: Sales Anticipations, Planned Inventory Investment, and Realizations. In: *Determinants of Investment Behavior*, Universities-National Bureau Conference Series, No 18. New York, 1967.
26. LUCAS R. E. and SARGENT T. J. (editors): *Rational Expectations and Econometric Practice*, George Allen and Unwin, London, 1981.
27. MUTH, J. F.: Rational Expectations and the Theory of Price Movements. *Econometrica*, 29 (1961) 315—335.
28. NERLOVE, M.: Estimates of the Elasticities of Supply of Selected Agricultural Commodities. *J. Farm Ecom.* 38 (1956) 496—509.
29. NERLOVE, M.: *Distributed Lags and Demand Analysis.* United States Department of Agriculture Handbook No. 141. Washington, 1958.
30. QUANDT, R. E.: Econometric Disequilibrium Models, *Econometric Reviews* I. 1982.
31. QUANDT, R. E. and CHAREMZA, W.: Models and Estimation of Disequilibrium in Centrally Planned Economies, *Review of Economic Studies* 1982.
32. RIECKE, W.: *Szimultán modell a készletfelhalmozás és a külkereskedelem közötti összefüggésre a magyar gazdaságban* Budapest, 1982. augusztus.
33. SIMONOVITS A.: Normák, várakozások és stabilitás egy lineáris dinamikus modellben. *Szigma*, 12. (1979) 31—56.
34. STONE, R. and ROWE, D. A.: The Durability of Consumers' Durable Goods. *Econometrica* 28. (1960) 407—16.
35. WALLIS, K. F.: Some Recent Developments in Applied Econometrics: Dynamic Models and Simultaneous Equation Systems. *Journal of Economic Literature*, 7. (1969) 771—796.
36. WALLIS, K. F.: Econometric Implications of the Rational Expectations Hypothesis, *Econometrica* 48. (1980) 49—75.
37. ZELLNER, A. (ed.) *Readings in Economic Statistics and Econometrics.* Boston. Little Brown Co. 1968.