

ENTRÓPIA MINT PÉNZÜGYI KOCKÁZATI MÉRTÉK¹ORMOS MIHÁLY – ZIBRICZKY DÁVID
BME Pénzügyek Tanszék

Az entrópiát, mint pénzügyi kockázati mértéket vizsgáljuk. Dolgozatunkban bemutatjuk, hogy az értékpapírok és portfóliók napi hozamán mért differenciális entrópia alkalmas azok kockázati prémiumának magyarázatára, összehasonlítva a tőkepiaci árazási modell (CAPM) béta paraméterével, egyszerűbb és pontosabb becslést adhat. Elemzéseink alapján az entrópiára is érvényes a diverzifikációs hatás: véletlenszerű portfóliók elemszámának növelésével csökkenő kockázatot mértünk, illetve entrópia – várható hozam koordináta-rendszerben a diverzifikálás hatására a portfóliók hiperbola mentén sűrűsödnek, hasonlóan a varianciához. Empirikus vizsgálatunk során véletlenszerűen 150 értékpapírt választottunk a Standard & Poor's 500 részvényindexből, majd ezek napi logaritmikus hozamán 25 éves időtartamra vonatkozóan végeztünk méréseket. Regressziós elemzéseink eredményei alapján az entrópia mint kockázati mérték jobb magyarázó erővel bír a várható hozamra vonatkozóan, mint a variancia, illetve a CAPM bétája.

Kulcsszavak: entrópia; eszközárzás; kockázat becslés; szisztematikus kockázat. *JEL:* G12; C58

1 Bevezetés

Tanulmányunk során egyensúlyi eszközárzásai modellt építünk egy új kockázati mértékre, az entrópiára alapozva. Az entrópia a valószínűségi változó rendezetlenségét, bizonytalanságát, kiszámíthatatlanságát karakterizáló mérték. Esetünkben, amikor egyes befektetések teljesítményértékeléséről szólnak, az entrópia részvények vagy portfóliók hozam-bizonytalanságát, ingadozásának mértékét, rendezetlenségét adja, persze anélkül, hogy a hozam eloszlásáról bármit is állítanánk. A Markowitz-féle portfólió-elméletre (Markowitz, 1952) épülő tőkepiaci eszközárzásai modell során (Capital Asset Pricing Model, CAPM) (Treynor, 1962; Sharpe, 1964; Lintner 1965a,b; Mossin, 1966) egy egyszerű lineáris regressziót alkalmazunk. Ez a megközelítés arra épít, hogy a hozam stacioner és normális eloszlású valószínűségi változó; habár tudjuk, hogy valójában ez a feltételezés a valóságban nem áll fenn (Fama és MacBeth, 1973; Brown és Warner, 1985; Affleck-Graves és McDonald, 1989; Erdős

¹Szeretnénk megköszönni a két anonim bíráló megjegyzéseit, amelyek nagyban járultak hozzá egy jobban áttekinthető és letisztultabb dolgozat elkészítéséhez. Köszönjük a European Financial Systems 2013 (Telc) és a 5th International Conference on "Economic Challenges in Enlarged Europe" (Tallinn) konferenciák résztvevőinek hozzászólását eredményeinkhez. Ormos Mihály munkáját a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj támogatta. Beérkezett: 2015. augusztus 1. E-mail: ormos@finance.bme.hu, zibriczky@finance.bme.hu.

és Ormos, 2009). Az entrópia abból a szempontból tűnik ideális kockázati mértéknek, hogy nem kell élnünk efféle korlátozó feltételezéssel a valószínűségi változóra, azaz hozamra vonatkozóan. Dolgozatunk legfontosabb célja, hogy egyensúlyi modellünkben az entrópiát mint kockázati mértéket alkalmazva mutassuk be az egyensúlyt. A tőkepiaci eszközárzási modell szerint minden pillanatban egyensúly áll fenn a várható hozam és releváns kockázatot reprezentáló béta között. A CAPM bétája a piaci portfólió és az adott befektetési lehetőség kovarianciájának, valamint az adott befektetés varianciájának hányadosa. Amennyiben egy adott valószínűségi változó normális eloszlású, akkor ennek entrópiája a szórástól mindössze egy konstans tényezőben tér el, azaz ideális esetben nem lenne lényegi különbség a két kockázati mérték között. Eredményeink alapján azonban, tekintettel arra, hogy a hozamok nem normális eloszlásúak, a szórás, a béta és az entrópia szignifikánsan eltérő magyarázó erővel bírnak, akár egyedi értékpapírokat, akár portfóliókat vizsgálunk. Dolgozatunkban bemutatjuk, hogy az entrópia ideális alternatíva egy befektetési lehetőség kockázatának mérésére. Mindazonáltal megjegyezzük, hogy ma már a tradicionális kockázati mértékeken túl sok más, a kockázat reprezentálására született mutatót is bemutatathatnánk, mint a VaR (Value at Risk) a CVaR (Conditional Value at Risk), az Omega, a EDR (Expected Downside Risk), SVar (semivariance), vagy éppen a downside béta. Ezek a kockázati mérték nagyban hozzájárultak a tőkepiacokon tapasztalható bizonytalanság számszerűsítéséhez, azonban ezen mértékek egyensúlyi modellben történő alkalmazása nem tekint vissza túl hosszú múltra, ezért dolgozatunkban a valóban klasszikusnak tekinthető kockázati mértékekkel (szórás és CAPM béta) való összevetésére koncentrálunk. Amennyiben nagyszámú részvény és ezekből összeállított portfólió hozamát akarjuk magyarázni különböző kockázati mértékek segítségével egyszerű, a legkisebb négyzetek módszerére épülő regresszióval, az entrópia, mint kockázati mérték magasabb magyarázó erőt mutat a tradicionális kockázati mértékekhez viszonyítva akár mintán belül, akár a mintán kívül. Tanulmányunkban kitérünk arra is, hogy az entrópia, hasonlóan a varianciához, a diverzifikáció függvényében csökken; ugyanakkor annak ellenére, hogy nem szisztematikus kockázatot ragad meg, mégis erősebb magyarázó-képességgel rendelkezik, mint CAPM béta egyedi értékpapírok és nem hatékony portfóliók esetén is. Jól diverzifikált portfóliók tekintetében elmondhatjuk, hogy az entrópia magyarázó ereje 30%-kal magasabb, mint a CAPM béta paraméterének.

Ezen túlmenően megvizsgáltuk, hogy miként viselkedik az entrópia a szokásos kockázati mértékekhez képest változó piaci környezetben; a teljes mintaperiódust felosztottuk bika (emelkedő) és medve (csökkenő) periódusokra. Eredményeink szerint bika piacon az entrópia magyarázó ereje szignifikánsan magasabb, míg medve piacon ez nem tapasztalható. Eredményeink azt mutatják, hogy a különböző kockázati mértékek hasonlóan viselkednek a különböző rezsimekben, azaz pozitív kapcsolatot mutatnak a bika piacon, míg negatívát a medve piacon. Ez utóbbi eredmény megerősíti azt a hipotézist, hogy az entrópia alapú kockázatomérés, hasonlóan a tradicionális kockázatbecsléshez, ellentétes kapcsolatot mutat emelkedő és csökkenő piaci körülmények

között. Dolgozatunkban megvizsgáljuk és összevetjük az entrópia és a CAPM hozam előrejelző-képességét is az egyszerű illeszkedési jóságon túl, így képet kaphatunk arról, hogy a különböző kockázati mértékek mennyire jó előrejelző képességgel rendelkeznek. Eredményeink meglepőek abból a szempontból, hogy a CAPM béta egy szisztematikus kockázati mérték, míg az entrópia és a szórás a teljes kockázatot megragadó változó; mégis az entrópia közel 40%-kal magasabb előrejelző képességgel rendelkezik, mint a CAPM tradicionális kockázati mértéke és ingadozása átlagosan 40%-kal kisebb. Eredményeink szerint az előrejelző képesség tekintetében a szórás és az entrópia hasonlóan viselkedik. További hozzájárulása a dolgozatunknak a befektetéselmélet mélyebb megértéséhez, hogy meglehetősen egyszerű entrópiabecslési módszert mutatunk be.

Dolgozatunkban nem foglalkoztunk az entrópia Artzner és szerzőtársai (1999) által kimunkált kockázati mérték koherencia vizsgálatával. Artznerék szerint egy kockázati mérték koherensnek tekinthető, ha teljesíti az invariancia, szubadditivitás, pozitív homogenitás, monotonitás feltételeit. Intuitív módon belátható, hogy a koherencia axiómáit a javasolt kockázati mérték nagy valószínűséggel teljesíti, azonban jelenleg ezek analitikus és empirikus igazolása nem képezi vizsgálatunk tárgyát.

2 Adatok

Empirikus vizsgálatunkat a Standard & Poor's 500 index 150 véletlenszerűen választott értékpapírján végezzük, melyek forgalomban voltak az 1987-től 2011-ig vizsgált 25 éves periódusban. A piaci hozam adatokat a „Center for Research in Security Prices” (CRSP) adatbázisból vettük, amely alapján a későbbiekben RM piaci hozamot számoljuk. Ez a piaci, kapitalizációval súlyozott, osztalékkal korrigált index hozama (VWRETD), amely a New Yorki tőzsde (New York Stock Exchange: NYSE), az American Stock Exchange (AMEX) és a NASDAQ részvények hozamait összegzi. A kockázatmentes hozam, amely az egyhónapos amerikai diszkont-kincstárjegy hozama, hasonlóan a CRSP-ből származik. Az elemzéseket napi logaritmikus hozamokon végeztük, mivel számíthattunk rá, hogy a napi hozamok esetén elvethetjük a normalitás nullhipotézisét (az egyes értékpapírok leíró statisztikáit a Függelék F-1. táblázata tartalmazza). Erdős és Ormos (2009), illetve Erdős és szerzőtársai (2011) tanulmányaiban összefoglalta a nem normális napi hozameloszlásokból adódó eszközárzási modellezés nehézségeit. Munkánk során arra teszünk kísérletet, hogy a napi hozamokon végzett kockázatbecslés alapján összevessük az egyes kockázati mértékek és a hozamok közti kapcsolatot.

3 Módszertan

Az entrópia egy matematikailag definiált mérték, melyet egy rendszerben végbemenő folyamatok kimeneteinek megjósolhatatlanságára, rendezetlenségének karakterizálására alkalmaznak. Elsőként Rudolf Clausius (1870) vezet-

te be a termodinamikában egy izolált rendszerben történő visszafordítható folyamat során bekövetkező hőenergia változás leírására. Elméletét később több más tudományterületen is alkalmazták. Az entrópia értelmezése a statisztikus mechanikában egy olyan bizonytalansági mérték, amely egy rendszer makroszkopikus tulajdonságainak (nyomás, hőmérséklet, térfogat) megfigyelése után az elemek elhelyezkedésének véletlenszerűségét jellemzi. Az entrópia ezen megközelítését Ludwig Boltzmann (1970) alkalmazta először tanulmányai során, 1872-ben. Konfigurációs entrópiának nevezte a nagyságrendjét azon variációknak, amelyben a rendszer elemei el tudnak rendeződni. Szoros összefüggést talált az entrópia függvény termodinamikai és statisztikus leírásában, mivel azok csak egy ún. Boltzmann-állandóban térnek el egymástól. Az entrópia egy másik fontos alkalmazási területe az információelmélet, amelynek megalkotója Shannon volt (1948). Egy informatikai rendszerben a hírforrás sztochasztikus kibernetikus rendszerként funkcionál, melyben egy adott üzenet fogadása valószínűségi változóként kezelhető. Az entrópia az egyedi információmennyiség várható értéke, melyet egy üzenetküldés során a rendszer küld. Minél valószínűtlenebb egy üzenet fogadása, annál több információt tartalmaz, így nagyobb az entrópiája. Mivel az entrópia az adott üzenettel érkező várható információmennyiség, egyben mértéke annak a maximális tömörítési aránynak, amellyel információvesztés nélkül lehet üzenetet küldeni.

Pénzügyi vonatkozásban Philipatos és Wilson (1972) alkalmazta először az entrópiát. Munkájuk során a Markowitz-féle hozam-variancia modell („mean-variance model”, MVM) analógiájára hozam-entrópia alapú portfóliókat konstruáltak. A szerzők szerint az entrópia általánosabb mérőszám a varianciához képest, nem fogalmaz meg semmilyen feltételt a hozamok eloszlásáról. Nawrocki és Harding (1986) a befektetések kockázatának mérésére az ún. „state-value weighted” entrópia modellt alkalmazta, ami az entrópia becslésnek egy diszkrét változata. Az értékpapírok hozamainak előrejelzésében Maasoumi és Racine (2002) rávilágított arra, hogy az entrópiának számos előnyös tulajdonsága van, továbbá képes nem-lineáris összefüggéseket modellezni az értékpapírok idősorában. Huang (2008) szerint az entrópia képes a portfóliók kockázatának leírására, konklúziójuk szerint minél alacsonyabb a portfólió entrópiája, annál biztonságosabb. Publikációjukban fuzzy-alapú variancia és entrópia modelleket is építettek a portfólió választási problémára. Xu és szerzőtársai (2011) egy ún. „ λ -mean” hibrid entrópia modellt hoztak létre, mellyel egy alternatív megoldást nyújtottak a hozam-kockázat alapú portfólió kiválasztási problémára.

Az entrópiát nemcsak kockázat- és várható hozambecslésre, de a portfóliók diverzifikációjának mérésére is alkalmazták. A diverzifikációs hatás hatékonyabb modellezéséről számol be Dionisio és szerzőtársai (2006), mivel az entrópia több információt képes reprezentálni a hozameloszlásról, mint a variancia, mivel az normális eloszlást feltételez a hozamokról. A szerzők szerint lineáris egyensúlyi modell esetén a kölcsönös információtartalom és a feltételes entrópia mérték pontosabb a szisztematikus és vállalatspecifikus kockázat becslésében. Bera és szerzőtársai (2008) az entrópiát mint diverzifikációs mértéket alkalmazták a portfólió optimalizálás pontosítására. Qin és szer-

zótársai (2008) a portfólió választási problémára az ún. Kapur-féle kereszt-entropia minimalizálási problémáját vezették be és mérték fuzzy-alapú simulációban. Jana és szerzőtársai (2009) az entrópiát mint további változót alkalmazták portfólió újrasúlyozási problémákhoz, mely során a tranzakciós költséget is figyelembe vették. Usta és Kantar (2011) portfólió diverzifikálási problémában alkalmazta az entrópiát a sztenderd módszerekkel együtt. Munkájukban a hozam-varianca-ferdeség modellt („mean-variance-skewness” modell) kiegészítették az entrópiával, mellyel pontosabb eredményeket mértek mintán kívül („out of sample”) az eredeti modellhez képest. Kirchner és Zunckel (2011) véleménye alapján az entropia hatékonyabban képes kimutatni a diverzifikáció kockázatsökkentő hatását a varianciával szemben, bár tanulmányukban normális eloszlást feltételeztek az összes értékpapír napi hozamáról. Az entropia pénzügyi területen való alkalmazhatóságáról Zhou és szerzőtársai (2013) összefoglaló cikket publikáltak, melyben kitérnek a portfólió választási, illetve eszközárzási elméletekre, konkrét eredményeket azonban nem említnek.

A fent citált közlemények eredményei alapján az entropia egy használható kockázati mérték lehet, bár valódi alkalmazhatóságát eddig kevésbé részletezték, jóval inkább elméleti oldalról vizsgálták. Dolgozatunk elsődleges célja, hogy kimutassuk és empirikusan is igazoljuk, hogy az entropia alapú kockázati mérték egyrészt pontosabb, másrészt nem bonyolultabb, mint a béta vagy variancia alapú egyensúlyi modellek. Ezen túlmenően arra is kíváncsiak vagyunk, hogy az entropia hozam-előrejelző képessége meghaladja-e a klasszikus CAPM modell és variancia ez irányú teljesítményét.

3.1 Diszkrét entropia függvény

Legyen X^* egy diszkrét valószínűségi változó, mely k különböző értéket vehet fel. Jelöljük X^* lehetséges értékkészletét (o_1, o_2, \dots, o_k) -val és a hozzá tartozó valószínűségeket $p_i = \Pr(X^* = o_i)$ -vel, ahol $p_i \geq 0$ és $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. X^* valószínűségi változóra értelmezett általánosított diszkrét entropia függvény (Rényi, 1961) a következő formában írható fel:

$$H_\alpha(X^*) = \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\sum_{i=1}^k p_i^\alpha \right), \quad (1)$$

ahol α az entropia rendje, melyre $\alpha \geq 0$, továbbá a logaritmusfüggvény alapja 2. Az entropia függvény rendje kifejezi az egyenletes eloszlástól vett eltérés entrópiában megjelenő érzékenységét. A leggyakrabban használt rendek $\alpha = 1$ és $\alpha = 2$.

Az $\alpha = 1$ egy speciális esete az általános entropia függvénynek. Bár az (1) egyenletbe való $\alpha = 1$ helyettesítéssel 0 nevezőt kapnánk, a l'Hospital-szabály segítségével levezethető, hogy $\alpha \rightarrow 1$ esetén H_α a Shannon-féle entrópiához tart, jelölésben

$$H_1(X^*) = - \sum_{i=1}^k p_i \log(p_i). \quad (2)$$

Az $\alpha = 2$ esetet Rényi (vagy „Collision”) entrópiának nevezzük, melyet a következő formulával jelölünk:

$$H_2(X^*) = -\log\left(\sum_{i=1}^k p_i^2\right). \quad (3)$$

$H_\alpha(X)$ α rend függvényében nem növekvő, illetve véges kimeneti halmaz esetén mindkét speciális entrópiafüggvény nagyobb, mint nulla. Jensen-egyenlőséggel belátható a következő reláció

$$0 < H_2(X^*) \leq H_1(X^*), \quad (4)$$

mely szerint bármely diszkrét változó esetén a Rényi entrópia értéke pozitív, és nem nagyobb, mint a Shannon-féle entrópia.

A valószínűségi változók kiszámíthatatlanságának karakterizálására Rényi- és Shannon-entrópián kívül további függvényeket vezettek be a szakirodalomban. Gyakrabban alkalmazott megoldások a Havrda-Charvát entrópia (Havrda, 1967), Tsallis entrópia (Tsallis, 1988), a speciálisan pénzügyi problémákra bevezetett inkrementális entrópia (Ou, 2005), illetve fuzzy alapú entrópia (Li, 2008). Ezen függvények alkalmazását jelen dolgozatunk nem vizsgálja részletesebben. A diszkrét függvények bemutatása az entrópia világosabb megértését szolgálja. A későbbiekben az empirikus vizsgálataink során a folytonos alakra koncentrálnak majd, melyet differenciális entrópia függvénynek neveznek a szakirodalomban.

3.2 Differenciális entrópia függvény

Legyen X egy folytonos valószínűségi változó, mely értékeit a valós számok halmazáról (\mathbb{R}) veszi $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Analóg módon az (1) egyenlethez, a differenciális (folytonos) entrópia függvény a következő formulával definiálható:

$$H_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \int f(x)^\alpha dx. \quad (5)$$

Összehasonlítva (1) és (5) képleteket, a folytonosságon kívül ezek csak a logaritmus alapjaiban különböznek. Bár az entrópia értéke függ a logaritmus alapjától, megmutatható, hogy két különböző alapú logaritmus függvény értéke csak konstans tényezőben tér el. Ezen tulajdonság miatt az entrópia alapú kockázati mérték magyarázó erő vizsgálata során irreleváns, hogy melyik alapot használjuk, így természetes alapú logaritmust választunk a differenciális entrópia függvényhez. Folytonos esetben a speciális esetek ($\alpha = 1$ és $\alpha = 2$) képlete a következő:

$$H_1(X) = - \int f(x) \ln f(x) dx, \quad (6)$$

$$H_2(X) = - \ln \int f^2(x) dx. \quad (7)$$

Fontos különbség a diszkrét és differenciális entrópia függvény között, hogy míg diszkrét esetben az entrópia nem-negatív értéket vehet fel, addig a differenciális esetben negatív értéket is kaphat, jelölésben

$$H_\alpha(X) \in \mathbb{R} . \tag{8}$$

Benavides (2011) szerint Dirac-delta függvény esetén a differenciális entrópia $-\infty$ -hez tart, illetve teljesen a valós x tengelyre simuló egyenletes eloszlás esetén ∞ -hez.

A gyakorlatban a sztenderd kockázati mértékeket, mint a szórást és a CAPM bétát napi vagy havi folytonos, azaz logaritmikus hozam adatok alapján becslik meg. Az entrópia alapú kockázatbecslő módszer tervezése során mi is ezt az elvet követjük, így a módszerek magyarázó ereje összevethető lesz. Mivel az értékpapírok napi vagy havi hozama a valós számok halmazáról veheti fel az értékét, munkánk elsősorban a differenciális entrópia alkalmazhatóságára összpontosít. Bár a kockázatbecslési probléma a hozam adatok csoportosításával visszavezethető diszkrét esetre is, e megközelítést a jelen dolgozatunk nem tárgyalja.

3.3 Entrópia becslése hisztogram-alapú módszerrel

Legyen (x_1, x_2, \dots, x_n) X folytonos valószínűségi változó egy megfigyelésének sorozata. Becsüljük meg $f(x)$ sűrűségfüggvényt ezen a mintán, jelöljük ezt $f_n(x)$ -szel. $H_\alpha(X)$ entrópia „plug-in” integrálbecslése ez alapján a következő:

$$H_{\alpha,n}(X) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \int_{A_n} f_n(x)^\alpha dx \tag{9}$$

ahol A_n az integrálás tartománya, mely kiszűri $f_n(x)$ farokrészeit, ahol a becslés értéke nagyon alacsony. Javasoljuk a tartomány becslését $A_n = (\min(x), \max(x))$ formában. A „plug-in” típusú módszer azon megközelítésen alapszik, hogy először a sűrűségfüggvényt becsüljük meg, majd ezt alkalmazzuk az entrópia kiszámítására.

A sűrűségfüggvény egyik legegyszerűbb becslési módszere a hisztogram-alapú sűrűségfüggvény becslés. Legyen $b_n = \max(x) - \min(x)$ a tartomány mérete, amit osszunk fel g darab egyenlő szélességű osztályra („bin”-re). Jelöljük a felosztási pontokat t_j -vel, ahol két egymást követő vágási pont közé eső osztály szélessége konstans: $h = b_n/g = t_{j+1} - t_j$. A sűrűségfüggvény hisztogram-alapú becslése ezek alapján a következő:

$$f_n(x) = \frac{\nu_j}{nh} , \tag{10}$$

ha $x \in (t_j, t_{j+1})$, ahol ν_j azon pontok száma, melyek a j -edik osztályba esnek. A módszer paramétere az osztályok száma (g), melynek meghatározására több módszer is létezik, például négyzetgyök szabály, Scott-szabály (Scott, 1979), Freedman-Diaconis szabály (Freedman, 1981). A becslési módszerek hatékonyságát jelen dolgozatban nem vizsgáljuk.

Az entrópia becslése „plug-in” módszerrel nehezen implementálható, mivel integrálási műveletet tartalmaz. A hisztogram tulajdonságai, illetve (6), (7), (9) és (10) egyenletek alapján levezethető a Shannon- és Rényi entrópia egyszerűbben kezelhető, „built-in” becslése a

$$H_{1,n}(X) = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^g \nu_j \ln\left(\frac{\nu_j}{nh}\right) \quad (11)$$

és

$$H_{2,n}(X) = -\ln \sum_{j=1}^g h\left(\frac{\nu_j}{nh}\right) \quad (12)$$

formulákban. A „built-in” módszer megközelítése az, hogy a sűrűségfüggvény becslése és az entrópia kiszámítása egy képletben valósul meg. A levezetés segítségével az integrálást összeadássá alakítottuk, mely egyszerűbben implementálható.

Munkánk során két további sűrűségfüggvény becslési módszert is megvizsgáltunk, nevezetesen a magfüggvény-alapú és „sample spacing” alapú módszereket. Eredményeink alapján a hisztogram-alapú becslés bizonyult a legpontosabbnak, így az egyéb sűrűségfüggvény becslési módszerek tárgyalása nem képezi szerves részét a közlemény mondanivalójának. A sűrűségfüggvény becslési módszerek összehasonlítását az F2 Függelékben részletezzük.

3.4 Kockázatbecslési metódus

Legyen adott D adatsor:

$$D : \{ S, R, R_M, R_F \}, \quad (13)$$

ahol az adatsor összetevői (1) az értékpapírok halmaza $S : \{S_1, \dots, S_l\}$, (2) az ezekhez tartozó empirikus megfigyelések $R : \{R_1, \dots, R_l\}$, ahol $R_i = (r_{i1}, \dots, r_{in})$, (3) a piaci hozamra vonatkozó empirikus hozam adatok $R_M = (r_{M1}, \dots, r_{Mn})$, (4) a kockázatmentes hozam adatok $R_F = (r_{F1}, \dots, r_{Fn})$, ahol l az értékpapírok száma, n a megfigyelések száma (minta mérete).

Dolgozatunk célja az entrópia, mint kockázati mérték alkalmazása. Jelen vizsgálatban a kockázati mértékeket mint magyarázó változót fogjuk alkalmazni a kockázati prémium előrejelzésére. Ahhoz, hogy bármely (jelen esetben egyváltozós) kockázati mérték előrejelző képességét megmutassuk, egy általános keretet definiálunk. Jelöljük κ_* -gal egy kockázatbecslési függvényt, amely egy adott eszközhöz egy olyan értéket rendel, ami a megfigyelt eszköz kockázatát karakterizálja. κ_* egy absztrakt jelölés, mely nem követeli meg annak implementációját, csak arra utal, hogy egy olyan függvényt alkalmazunk, mely a pénzügyi kockázat karakterizálását hivatott szolgálni. κ_* definiálása a mérési módszer következő lépése, mely során megadjuk, milyen kockázatbecslési módszereket szeretnénk tesztelni. A módszert jelezzük κ_* indexében, jelöljük például az entrópia alapú kockázati mértéket κ_H -vel. Legyen az i -edik értékpapírt leíró egyváltozós kockázati mérték $\kappa_*(S_i)$. Jelöljük a kockázat megfigyelés alapján történő becslését $\hat{\kappa}_*(S_i)$ -vel.

Megközelítésünk szerint az értékpapír hozamadatainak bizonytalansága, így annak entrópiája interpretálható kockázatként. Minél egyenletesebb a hozamok eloszlásfüggvénye (vagy más megközelítésben minél nagyobb azok szóródása), annál magasabb az entrópia értéke. Másik oldalról pedig minél valószínűbb egy hozam (vagy ahhoz közeli érték) bekövetkezése, annál kisebb az entrópia, így a kockázat is. Mivel a hozam adatok valós halmazból vehetik fel értékeiket, differenciális entrópiával modellezzük a kockázatot. A differenciális entrópia tulajdonságaiból belátható, hogy negatív értéket is felvehet (8). A jobb értelmezhetőség érdekében a megbecsült differenciális entrópiát az exponenciális függvény kitevőjeként alkalmazzuk, ezzel definiálva saját entrópia alapú kockázati mértékünket a következő formulában:

$$\hat{\kappa}_H(S_i) = e^{H_n(R_i - R_F)} . \tag{14}$$

Mivel a kockázatot magát csak becsülni tudjuk, ezért κ jelölés helyett $\hat{\kappa}$ -t alkalmazunk. Az exponenciális transzformálás eredményeképpen $\hat{\kappa}_H$ csak nem-negatív értékeket vehet fel $\hat{\kappa}_H \in [0, +\infty)$. Könnyen beláthatjuk, hogy amennyiben a hozamok eloszlása normális, a Shannon-féle kockázati mértékünk mindössze egy konstansban tér el a szórástól. Ennek levezetését az F3 Függelékben részletezzük. A $\hat{\kappa}_H$ függvény egyéb tulajdonságainak elemzésétől e dolgozatban eltekintünk.

Az általunk definiált entrópia-alapú kockázati mérték pontosságát referencia (ún. „baseline”) mértékekkel szeretnénk összevetni. A közgazdasági szakirodalomban legszélesebben alkalmazott kockázati mérték a szórás vagy a variancia (Markowitz, 1952), illetve a tőkepiaci eszközárzadási modell (CAPM) (Treyner, 1962; Sharpe, 1964; Lintner 1965a,b; Mossin, 1966) bétája. Jelöljük ezeket κ_σ -val, illetve κ_β -val. Ezen kockázati mértékekre vonatkozó becslés (13) jelöléseit alkalmazva a következő:

$$\hat{\kappa}_\sigma(S_i) = \sigma(R_i - R_F) \tag{15}$$

és

$$\hat{\kappa}_\beta(S_i) = \beta_i = \frac{\text{cov}(R_i - R_F, R_M - R_F)}{\sigma^2(R_M - R_F)} , \tag{16}$$

ahol β a CAPM béta, $\sigma(\cdot)$ és $\text{cov}(\cdot)$ az argumentumban lévő változók szórása, valamint kovarianciája. Az empirikus vizsgálatok során ezen két kockázat-becslési módszert fogjuk az entrópia függvényekkel összevetni.

3.5 Magyarázó- és előrejelző képesség

A kockázati mértékek magyarázó erejének vizsgálatára két alapvető megközelítést alkalmazunk: a kockázati mértékek tanító mintán belüli („in-sample”) magyarázó képességét a kockázati prémiumra vonatkozóan, illetve a tanító mintán kívüli („out-of-sample”) jövőbeli kockázati prémium előrejelző képességét.

3.5.1 Mintán belüli magyarázóképeség

Legyen V egy célváltozó $v = (v_1, \dots, v_l)$ megfigyelési vektorral, illetve U egy magyarázó változó $u = (u_1, \dots, u_l)$ vektorral. Ahhoz, hogy meghatározzuk U lineáris magyarázóképeségét V -re vonatkozóan, lineáris regressziós becslést alkalmazunk a megfigyelési vektorokra: $V = a_0 + a_1 U + \varepsilon$. A modell paramétereit (a_0 és a_1) a legkisebb négyzetek módszerével („ordinary least squares”, OLS) határozhatók meg². Ezek alapján a célváltozó becslése a megfigyelési pontokban $\hat{v}_i = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 u_i$, ahol \hat{a}_0 és \hat{a}_1 együtthatók a_0 és a_1 empirikus becslései. A regressziós becslés pontosságára (más szóval a lineáris magyarázó képességére) vonatkozó leggyakrabban alkalmazott mérték az illeszkedés jó-sága, vagy más néven determinációs együttható, jelölésben R^2 .

Arra vagyunk kíváncsiak, milyen pontosan képesek a fent tárgyalt kockázati mértékek megmagyarázni a kockázati prémiumot az alkalmazott adatsoron. Jelöljük az adott kockázati mérték magyarázó erejét $\eta(\kappa)$ -val. A célunk ezen értékek becslése és az eredmények összevetése. Legyen U magyarázó változó az értékpapírok kockázati mértéke, az l hosszú megfigyelési mintával:

$$u_\kappa = (\hat{\kappa}_*(S_1), \dots, \hat{\kappa}_*(S_l)), \quad (17)$$

ahol κ index a kockázati mérték szerinti magyarázó változó definíciót hangsúlyozza, és V célváltozó az elvárt kockázati prémium, szintén l hosszúságú megfigyelési mintával:

$$v_\mu = (E[R_1 - R_F], \dots, E[R_l - R_F]), \quad (18)$$

ahol μ index a várható érték szerinti célváltozó definíciót hangsúlyozza, $E[\cdot]$ az argumentum várható értéke. (17) és (18) változó definiálással κ kockázati mérték mintán belüli magyarázó képességének empirikus becslése a következő:

$$\hat{\eta}(\kappa) = R^2(v_\mu, u_\kappa). \quad (19)$$

3.5.2 Mintán kívüli előrejelző képeség

Osszuk fel két diszjunkt megfigyelési halmazra (I és O) a (13)-ban definiált $D : \{S, R, R_M, R_F\}$ adatsorunkat:

$$D^I : \{S, R^I, R_M^I, R_F^I\}, \quad D^O : \{S, R^O, R_M^O, R_F^O\}, \quad (20)$$

ahol az értékpapírok hozama $R^I : \{R_1^I, \dots, R_l^I\}$, $R_i^I = (r_{i1}, \dots, r_{im})$ és $R^O : \{R_1^O, \dots, R_l^O\}$, $R_i^O = (r_{i,m+1}, \dots, r_{i,m+p})$; a felosztás a piaci hozamokra vonatkozóan $R_M^I = (r_{M1}, \dots, r_{Mm})$ és $R_M^O = (r_{M,m+1}, \dots, r_{M,m+p})$, a kockázatmentes hozamra $R_F^I = (r_{F1}, \dots, r_{Fm})$ és $R_F^O = (r_{F,m+1}, \dots, r_{F,m+p})$, ahol $|R_i^I| = m$, $|R_i^O| = p$, $1 \leq i \leq l$ és $m + p = n$.

²A későbbi tesztek során látszik majd, hogy az adatok nem homoszkedasztikusak. Azaz vagy Newey és West (1987)-féle korrekciót, vagy kvantilis regressziót kellene futtatnunk, azonban a sztenderd egyensúlyi árazási modellekben rendre OLS regresszióval találkozunk, ezért mi is ezt a módszertant követtük.

Az U magyarázó változó értékei az értékpapírok D^I halmazon becült kockázati mértékei

$$u_{\kappa}^I = (\hat{\kappa}_*(S_1), \dots, \hat{\kappa}_*(S_l)), \quad (21)$$

V célváltozó az értékpapírok elvárt kockázati prémiuma D^O adatsoron mért megfigyelési mintával

$$v_{\mu}^O = (E[R_1^O - R_F^O], \dots, E[R_l^O - R_F^O]). \quad (22)$$

(19), (21) és (22) egyenletek alapján κ kockázati mérték előrejelző képességének becslése

$$\hat{\eta}_O(\kappa) = R^2(v_{\mu}^O, u_{\kappa}^I). \quad (23)$$

3.5.3 Szignifikancia vizsgálat

„Bootstrapping” mintagenerálási módszerrel megvizsgáltuk, hogy az egyes kockázati mértékek (szórás, CAPM béta, Shannon- és Rényi entrópia) mintán belüli magyarázó, és mintán kívüli előrejelző képessége között szignifikáns eltérés mutatkozik-e. A módszer során 1000 iterációt hajtottunk végre minden kockázati mérték párosításra. Egy iteráció során a 150 vizsgált értékpapírból 25-öt véletlenszerűen kivettünk és a maradék 125-re alkalmaztuk a kockázatbecslést és R^2 mérést. Az iterációk végeredményeképpen 1000 darab R^2 értéket kaptunk minden kockázati mértékre. Két kockázati mérték pontossága között szignifikáns eltérés mérhető, ha a t -teszt alapján az R^2 -ek átlaga szignifikánsan eltér.

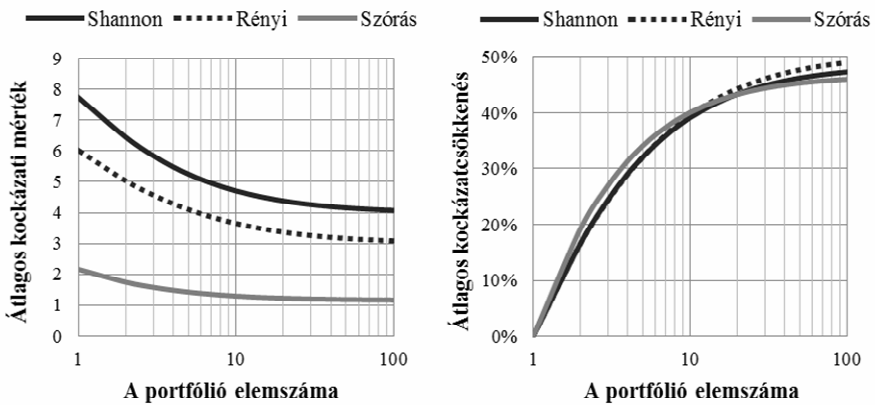
4 Eredmények

Empirikus eredményeinket négy részben mutatjuk be. Először megvizsgáljuk, hogyan viselkednek az egyes kockázati mértékek a portfólió elemszámának növelésével véletlenszerűen összeállított portfóliók esetén, illetve ez mennyiben egyeztethető össze a klasszikus portfólió-elméletben leírtakkal. Ezután összehasonlítjuk a szórás, a CAPM béta, a Shannon- és Rényi entrópia mintán belüli magyarázó képességét a teljes adatsoron (hosszú távon). A harmadik alfejezetben megvizsgáljuk, hogyan teljesítenek a kockázati mértékek abban az esetben, ha emelkedő vagy eső trendet azonosítunk. Végül összehasonlítjuk a mértékek magyarázó és előrejelző képességét rövid távon, illetve megvizsgáljuk azok időbeli stabilitását. A mérésekhez kifejezetten erre a célra, Java programozási nyelven fejlesztett, saját szoftvert használunk.

4.1 Diverzifikáció hatása az entrópiára

Az entrópia, mint kockázati mérték vizsgálata során kíváncsiak vagyunk arra, hogy képes-e a diverzifikációs hatás kimutatására. Ehhez nagyságrendileg 10 millió egyenlően súlyozott, különböző elemszámú portfóliót generáltunk véletlenszerűen választva a 150 darab vizsgált értékpapírból. Az elemszám alatt jelen esetben a portfólióba helyezett értékpapírok számát értjük. Egy-

és kételemű portfólió esetén minden kombinációt (azaz 150, illetve 22350 darabot), egyébként kettőnél magasabb elemszám esetén legfeljebb 100 ezer véletlenszerű portfóliót generáltunk egészen 100 elemszámig (így végül nagyjából 10 millió különböző, de minden esetben egyenlően súlyozott portfólió vizsgálatát tette lehetővé). Minden egyes portfólióra a napi kockázati prímiumok alapján megbecsültük a kockázati mértékeket (nevezetesen a szórást, Shannon- és Rényi entrópiát), majd minden egyes elemszám esetén ezeket átlagoltuk. Mindkét entrópia függvény esetén hisztogram-alapú becslési módszert alkalmaztunk, 175 darab osztályt a Shannon- és 50 darab osztályt a Rényi entrópia esetén³. Mivel a CAPM béta a szisztematikus, a piaci portfólióban történő diverzifikáció után fennmaradó kockázat modellezésére képes, ezért a béta kockázati mértéket kihagytuk az elemzés ezen részéből.



1. ábra. Átlagos kockázat illetve kockázatsökkenés a portfólió elemszámának függvényében

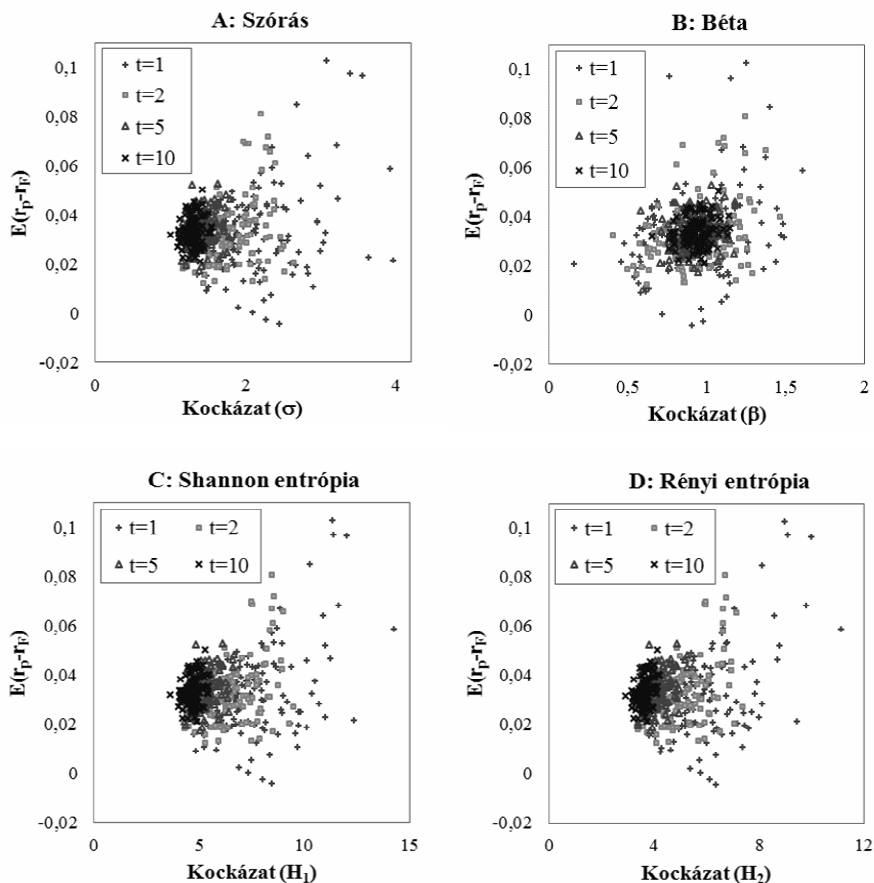
Megjegyzés. A Standard & Poor's 500 részvényindex 150 véletlenszerűen választott értékpapírjaiból 10 millió, különböző elemszámú, egyenlően súlyozott portfóliót generáltunk (elemszámanként legfeljebb 100 ezret, vagy az összes permutációnak megfelelő egy- és kételemű portfóliók esetén). A portfóliók kockázatát szórással (szürke folytonos görbe), Shannon-féle entrópiával (fekete folytonos vonal), illetve Rényi entrópiával (fekete szaggatott görbe) becsültük meg a teljes periódus alapján. Mindkét entrópia alapú kockázati mértéket hisztogram-alapú sűrűségfüggvénnyel becsültünk, Shannon-féle entrópia esetén 175 darab osztállyal, Rényi entrópia esetén 50 osztállyal. A bal oldali ábra a portfóliók átlagos kockázatát mutatja az elemszám függvényében, a jobb oldali ábra pedig a diverzifikálás hatására történő átlagos kockázatsökkenés mértékét az egyelemű portfólió átlagos kockázatához képest.

Az 1. ábra alapján a diverzifikációs hatás mind a szórás, mind az entrópia alapú kockázati mérték alapján kimutatható. 10 véletlenszerű elemből össze-

³Összehasonlítottuk a hisztogram-, "sample spacing"- és magfüggvény-alapú becslési módszerek pontosságát, eredményeik szerint a hisztogram-alapú becslés bizonyult a legjobbnak a magyarázó- és előrejelző képesség tekintetében. Eredményeinket a Függelék F-3. táblázatában részletezzük.

állított portfólió kockázata átlagosan nagyjából 40%-kal alacsonyabb egy egyelemes portfólióhoz képest mindhárom mérték esetén. Összességében a diverzifikációs hatás karakterizálásában az entrópia hasonlóan viselkedik, mint a szórás.

Ugyancsak megvizsgáltuk, hogyan rendeződnek a különböző portfóliók a várható hozam – kockázat koordináta-rendszerben a diverzifikálás hatására. 150 darab egyelemű, illetve 200-200 darab egyenlően súlyozott 2, 5 és 10 elemű portfóliót generáltunk véletlenszerűen, majd megbecsültük ezek kockázatát szórással, bétával, Shannon- és Rényi entrópiával.



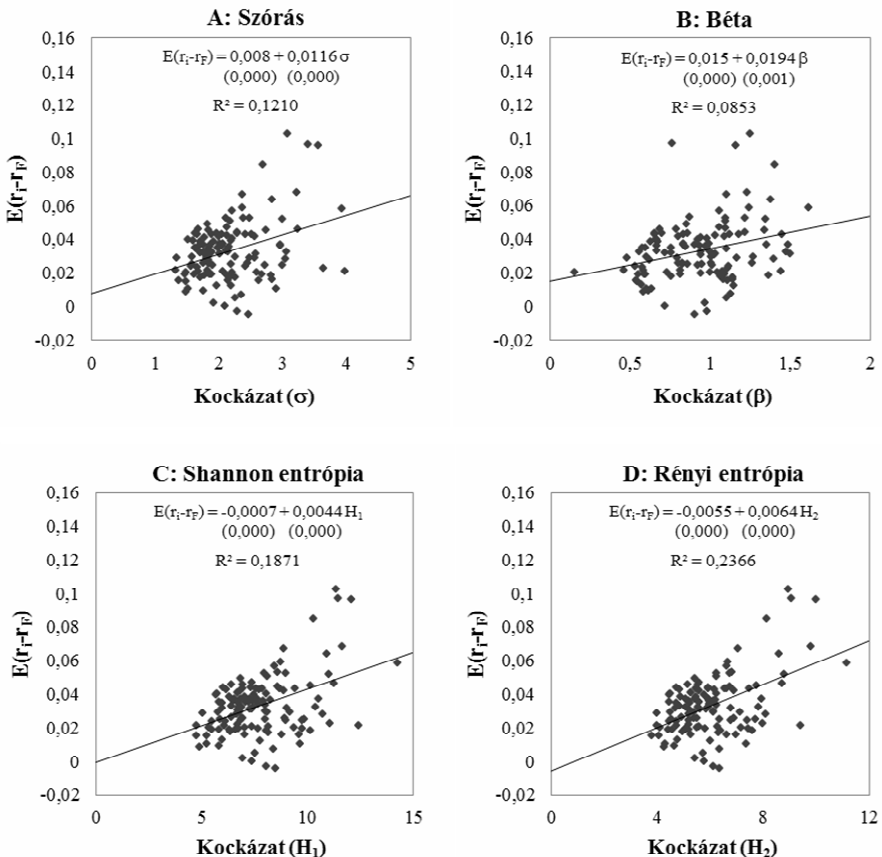
2. ábra. Különböző elemszámú portfóliók elhelyezkedése a várható kockázati prémium – kockázat koordináta-rendszerben

Megjegyzés. Az egyes panelek a portfóliók várható kockázati prémiumát mutatják a különböző kockázati mértékekkel számítva; a portfóliók elemszáma (mérete) – melyet t -vel jelölünk – az ábrákon látható. Az elemzésünkhöz használt 150 részvény felhasználásával 150 darab egyelemű portfóliót készítettünk, illetve 200-200 egyenlően súlyozott portfóliót generáltunk 2, 5, és 10 véletlenszerűen választott részvény segítségével. A portfóliók kockázatát

szórással, CAPM bétával, Shannon-féle entrópiával, illetve Rényi entrópiával becsültük meg napi logaritmikus hozamokat felhasználva az 1987 és 2011 periódusra vonatkozóan. Mindkét entrópia alapú kockázati mérték esetén hisztogram-alapú sűrűségfüggvény becslést alkalmaztunk, Shannon-féle entrópia esetén 175 darab osztállyal, Rényi entrópia esetén 50 osztállyal.

A 2. ábra a várható kockázati prémium és a kockázat viszonyát mutatja véletlenszerűen generált portfóliók esetén különböző kockázati mértékek szerint. Megfigyelhető, hogy a szórás és az entrópia alapú kockázati mértékek karakterisztikája hasonló: a portfóliók elemszámának növelésével hiperbola alakzatban sűrűsödnek, a Markowitz-féle portfólió-elmélettel egybevágóan (Markowitz, 1952). A béta esetén viszont más jellegű elhelyezkedés körvonalazódik, a portfólió elemszámának növelésével egy középpont körül sűrűsödnek a portfóliókat reprezentáló pontok.

4.2 Hosszú távú magyarázó képesség



3. ábra. A kockázati mértékek hosszú távú magyarázó képessége

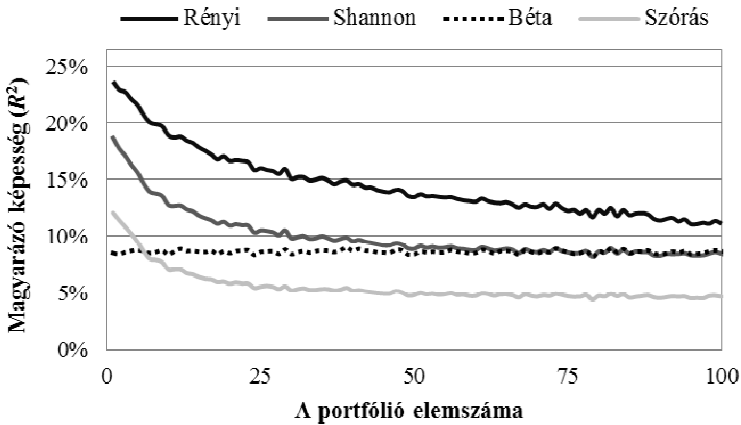
Megjegyzés: A négy panel az egyes kockázati mértékek és a várható kockázati prémium közötti összefüggést ábrázolja a vizsgált teljes periódusra. A Standard & Poor's 500 részvényindexből 150 darab értékpapírt választottunk véletlenszerűen, melyek forgalomban voltak 1987-től kezdve 2011 végéig. A teljes perióduson megfigyelt napi logaritmikus hozamok alapján megbecsültük az egyes értékpapírok kockázatát szórás, CAPM béta, Shannon- és Rényi entrópia alapú kockázatbecslő módszerekkel. Mindkét entrópia alapú kockázati mérték esetén hisztogram-alapú sűrűségfüggvény becslést alkalmaztunk, Shannon-féle entrópia esetén 175 darab osztállyal, Rényi entrópia esetén 50 osztállyal. Egy pont egy értékpapír reprezentációja, a pontokra lineáris regressziós egyenest illesztettünk, majd lemértük az illeszkedésének jóságát (R^2). A paneleken feltüntettük a regressziós egyenes képletét, a determinációs együtthatót, illetve zárójelben az egyes paraméterekhez tartozó p -értéket.

Ahhoz, hogy lemérjük az egyes kockázati mértékek (szórás, CAPM béta, Shannon- és Rényi entrópia) várható kockázati prémiumra vonatkozó magyarázó képességét, a teljes perióduson (jelölésben $p1$) vett napi logaritmikus hozamokon megbecsültük azok nagyságát. A módszertanban bemutatott regressziós egyenes illeszkedésének jóságával (R^2) közelítettük a kockázati mértékek $\eta(\kappa)$ magyarázó erejét, ahol U magyarázó változónak az értékpapírok kockázati mértékét, V célváltozónak a várható kockázati prémiumot választottuk.

A 3. ábra összefoglalja a vizsgált kockázati mértékek magyarázó képességét, várható napi kockázati prémium – kockázat koordináta-rendszerben. Az illeszkedés jósága alapján a béta teljesít a leggyengébben, 8,53%-os R^2 -tel. Bár a szórás magyarázó ereje (12,10%) magasabb, mint a bétáé, mindkét entrópia alapú kockázati mérték szignifikánsan⁴ jobban teljesít, Shannon entrópia esetén 18,71%-kal, Rényi entrópia esetén pedig 23,66%-kal. A lineáris regressziós egyenes egyenlete szerint az átlagos, nem megmagyarázott kockázati prémium (Y tengelymetszet, vagy Jensen alfa (Jensen, 1968)) abszolút értéke az entrópia alapú kockázati mértékek esetén alacsonyabb (0,0007 és 0,0055), mint a hagyományos kockázati mértékek esetén (a szórás esetén 0,0080, a béta esetén 0,0150). Megfigyelhető, hogy az illeszkedés jósága, illetve a Jensen alfa abszolút értéke fordítottan arányosan mozog jelen esetben.

Megmértük a magyarázó képességet különböző elemszámú portfólió esetén is. Elemszámunként legfeljebb 100-100 ezer, vagy a maximális permutációnak megfelelő számú véletlenszerű portfóliót generáltunk, illetve lemértük esetenként a legfeljebb 100 ezer pontra illesztett regressziós egyenes illeszkedésének jóságát. Az eredményeinket a 4. ábrán foglaljuk össze.

⁴A „bootstrapping” módszer alapján az entrópia-alapú kockázati mértékek szignifikánsan különböznek a szórástól és a CAPM bétától 1%-os szignifikancia szinten.



4. ábra. A kockázati mértékek hosszú távú magyarázó erejének változása az elemszámok függvényében

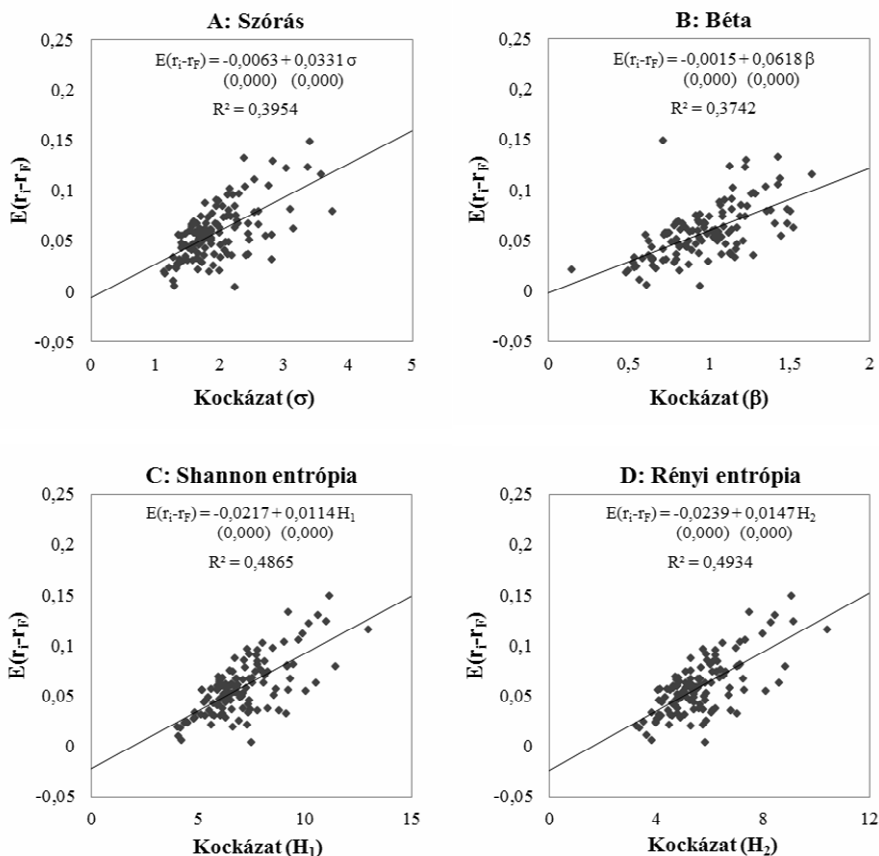
Megjegyzés: Az ábra összehasonlítja a szórás, CAPM béta, Shannon- és Rényi entrópia magyarázó képességét (R^2) a portfólió elemszámának függvényében. A Standard & Poor's 500 részvényindex 150 véletlenszerűen választott értékpapírjaiból 10 millió, különböző elemszámú, egyenlően súlyozott portfóliót generáltunk (elemszámonként legfeljebb 100 ezret). A generált portfóliók teljes perióduson vett napi logaritmikus hozama alapján megbecsültük a kockázati mértékeket, majd az egyes elemszámokra lineáris regressziós egyenest illesztettük és lemértük az illeszkedésének jóságát. Az ábrán világosszürke görbe jelzi a szórást, fekete szaggatott görbe a CAPM bétát, szürke folytonos görbe a Shannon-féle entrópiát, illetve fekete görbe a Rényi entrópiát.

A 4. ábra illusztrálja, hogyan változik a magyarázó képesség a diverzifikálás hatására. Megfigyelhető, hogy míg a szórás és entrópia alapú kockázati mértékek esetén ez a portfólió elemszámának növelésével csökken, a béta esetén konstans érték körül mozog. A karakterisztika magyarázata a következő. Egyrészt a béta csak a szisztematikus (nem diverzifikálható) kockázatot modellezi, így a konstans érték indokolt, másrészt a szórás és entrópia alapú kockázati mértékek a vállalat specifikus kockázatot is képesek mérni, így kevésbé jól diverzifikált (magasabb egyedi kockázatú) portfóliók esetén ezek további magyarázó erővel bírnak. A magyarázó képesség csökkenése ellenére mindkét entrópia alapú kockázati mérték legalább olyan jó teljesít, mint a béta. Jól diverzifikált (100 elemű) portfóliók esetén a Rényi entrópia magyarázóképesége nagyságrendileg 30%-kal magasabb, mint a CAPM bétáé, a Shannon entrópia esetén közel azonosak a teljesítmények.

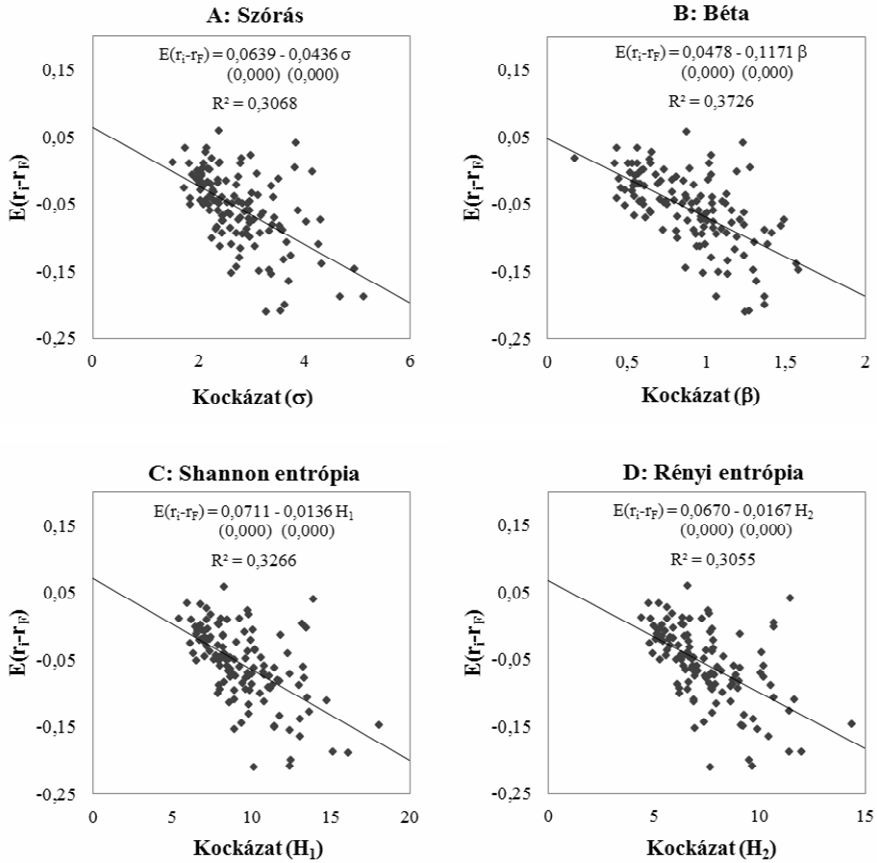
4.3 Magyarázó képesség a piaci trend ismeretében

Az eredeti, 25 éves periódusú, napi logaritmikus hozam adatokat két mintára osztottuk fel attól függően, hogy emelkedő („bika piac”) vagy csökkenő („medve piac”) trendű periódusban történtek a megfigyelések.

Ezzel két olyan megfigyelési halmazt kaptunk, amelynek pontjai vagy emelkedő, vagy csökkenő periódusban történtek. Az emelkedő trendű mintát „p1+”-val, a csökkenőt „p1-”-val jelöljük. A 25 éves periódus felosztását az F4 Függelékben foglaltuk össze. Ezen két diszjunkt mintán külön-külön lefutattuk a 4.2 fejezetben részletezett hosszú távú magyarázó képesség mérésére bemutatott módszert, ugyanazon paraméterekkel. Az elemzéssel kapott eredményeinket az 5. és 6. ábra foglalja össze.



5. ábra. A kockázati mértékek magyarázó képessége emelkedő trendű mintában



6. ábra. A kockázati mértékek magyarázó képessége csökkenő trendű mintában

Megjegyzés: Az 5-6. ábrákon a négy panel az egyes kockázati mértékek és a várható kockázati prémium közötti összefüggést ábrázolja emelkedő (illetve csökkenő) trendű periódusokban. A Standard & Poor's 500 részvényindexből 150 darab értékpapírt választottunk véletlenszerűen, melyek forgalomban voltak 1987-től kezdve 2011 végéig. Az azonos trendben (bika illetve medve piacon) mozgó periódusokon megfigyelt napi logaritmikus hozamok alapján megbecsültük az egyes értékpapírok kockázatát szórás, CAPM béta, Shannon- és Rényi entrópia alapú kockázatbecslő módszerekkel. Mindkét entrópia alapú kockázati mérték esetén hisztogram-alapú sűrűségfüggvény becslést alkalmaztunk, Shannon-féle entrópia esetén 175, Rényi entrópia esetén 50 osztállyal. Egy pont egy értékpapír reprezentációja, a pontokra lineáris regressziós egyenest illesztettünk, majd lemértük az illeszkedésének jóságát (R^2). A paneleken feltüntettük a regressziós egyenes képletét, a determinációs együtthatót, illetve zárójelben az egyes paraméterekhez tartozó p -értéket.

A bika és medve piacokra elvégzett kísérleteink eredménye mutatja, hogy a különböző kockázati mértékek hasonlóan viselkednek a különböző piaci körülmények között: azaz az elméleti modellnek megfelelően a hozam és

kockázat között pozitív kapcsolatot látunk emelkedő piaci rezsimben, viszont minden kockázati mérték esetén negatív kapcsolat látszik csökkenő piaci viszonyok között. Jelen eredményünk interpretálásakor világosan kell látni, hogy semmi különösét nem fedeztünk fel, hiszen a jelenség már eddig is ismert volt (Silver, 1975; DeBondt és Thaler, 1987; Chawla, 2003), azonban az a tény, hogy az entrópia is hasonló karakterisztikákat mutat, abból a szempontból lehet fontos eredmény, hogy alkalmazása az eddig megszokottaknak megfelelő értelmezési tartományban történhet meg. Bika piacon minden kockázati mértékkel kifejezetten erős magyarázó képességet mértünk: 39,54% a szórás, 37,42% a CAPM béta, 48,65% a Shannon entrópia, valamint 49,34% a Rényi entrópia esetén⁵. Emelkedő piacon a regressziós egyenes pozitív meredekségű, hasonlóan a teljes mintára vonatkozó mérésünk során tapasztaltakhoz; azaz a magasabb kockázatvállalásért magasabb hozamra számíthatunk. Ezzel ellentétben, amikor a piacok esnek, azaz medve piaci körülmények között a magasabb kockázatvállalást nem jutalmazza a piac magasabb hozammal, sőt valójában a kockázati prémium a kockázat függvényében csökken, azaz a regressziós egyenes meredeksége negatívvá válik. Meg kell jegyeznünk, hogy ezen megfigyelés esetén a béta magyarázó ereje (37,26%) meghaladja az entrópiáét (Shannon- valamint Rényi entrópia esetén 32,66%, illetve 30,55%). Összességében azt állíthatjuk, hogy eredményeink egybevágóak a sztenderd eszközárzási modellek eredményeivel. Amennyiben a rezsim-függőség is jól láthatóvá válik, lényegesen pontosabb becslést kapunk, mint ezen információ felhasználása nélkül. Mindazonáltal meg kell jegyeznünk, hogy a teljes mintára vonatkozó eredmények abból a szempontból mégis relevánsabbak tűnnek, mivel a befektető egy adott pillanatban nem tudja eldönteni, hogy épp emelkedő, vagy csökkenő piacon fektet be, így annak előrejelzése bizonytalanává válik.

4.4 Rövid távú magyarázó és előrejelző képesség

Bár jelentős eredményeket érhetünk el mintán belül (például túltanulással), ebből még nem következik, hogy a mintán kívül is pontos lesz a modellünk. Az előrejelző képesség mérésére a következő módszert alkalmaztuk. 1987-től kezdve tízéves periódusokat vettünk 1-1 éves eltolással egészen 2002-ben kezdődő 10 éves periódusig bezárólag. Az első periódus 1987-től 1996-ig, az utolsó 2002-től 2011-ig tart, 1 éves eltolásokkal ez a 25 éves teljes adatsoron 16 darab tízéves periódust jelent. A tízéves periódusokat 5-5 éves tanító és teszt periódusokra bontottuk fel, melyeket $p2i$ és $p2o$ -val jelölünk a továbbiakban. Minden tízéves periódusban megbecsültük a kockázati mértékeket az első 5 éves perióduson ($p2i$), majd lineáris regressziót és R^2 mérést alkalmaztunk az azonos (mintán belül, $p2i$), illetve következő 5 éves periódus (mintán kívül, $p2o$) várható kockázati prémiumának becslésére. A kockázati mértékek rövid távú magyarázó és előrejelző képessége a vizsgált periódusok R^2 -ének átlaga mintán belül és kívül. Az eredményeket az 1. táblázatban foglaltuk össze, a

⁵A „bootstrapping” módszer alapján az entrópia-alapú kockázati mértékek szignifikánsan különböznek a szórástól és a CAPM bétától 1%-os szignifikancia szinten.

teljesség kedvéért kiegészítve az előző alfejezetekben teljes perióduson, illetve különböző trendeken mért hosszú távú magyarázó képességgel.

Kockázati mérték	$\hat{\eta}_{p1}$ (%)	$\hat{\eta}_{p1+}$ (%)	$\hat{\eta}_{p1-}$ (%)	$\bar{\eta}_{p2i}$ (%)	$\bar{\eta}_{p2o}$ (%)	$\sigma_R(\hat{\eta}_{p2i})$	$\sigma_R(\hat{\eta}_{p2o})$
Szórás	12,10	39,5	30,7	8,73	9,04	0,59	0,77
CAPM béta	8,53	37,4	37,3	13,12	6,54	0,98	1,09
Shannon entrópia	18,71	48,6	32,7	14,77	9,18	0,60	0,78
Rényi entrópia	23,66	49,3	30,5	14,34	8,55	0,51	0,76

1. táblázat. A kockázati prémiumra vonatkozó magyarázó és előrejelző képesség különböző mintákban

Megjegyzés. A táblázat összefoglalja a megvizsgált kockázati mértékek magyarázó (mintán belüli R^2) és előrejelző (mintán kívüli R^2) képességét különböző mintákon mérve. A Standard & Poor's 500 részvényindexből 150 értékpapírt választottunk véletlenszerűen, melyek forgalomban voltak 1987-től kezdve és 2011 végig. Ezen értékpapírok napi logaritmikus hozamán szórás, CAPM béta, Shannon- és Rényi entrópia alapú kockázatbecslő módszerekkel megbecsültük azok kockázatát: (1) hosszú távon, 1987-től 2011-ig bezárólag; (2) emelkedő trendben (bika piacon); (3) csökkenő trendben (medve piacon); (4) 16 darab 10-éves perióduson (1987–1996)-tól kezdve, (2002–2011)-ig 1-1 éves eltolással, felosztva 5-5 éves mintán belüli és mintán kívüli mérési mintára. Mindkét entrópia alapú kockázati mérték esetén histogram-alapú sűrűségfüggvény becslést alkalmaztunk, Shannon-féle entrópia esetén 175 osztállyal, Rényi entrópia esetén 50 osztállyal. $\hat{\eta}_{p1}$ jelöli az egyes kockázati mértékek hosszú távú magyarázó képességét, $\hat{\eta}_{p1+}$ és $\hat{\eta}_{p1-}$ jelzi a magyarázó erőt, amennyiben a trend azonosított, $\bar{\eta}_{p2i}$ az átlagos mintán belüli magyarázó képesség a 10 éves rövidebb periódusok első 5 évében, $\bar{\eta}_{p2o}$ pedig a második 5 évben mért átlagos előrejelző képesség. Az utolsó két oszlop a rövidebb periódusokon mért teljesítmények relatív szórását összegzi.⁶

Eredményeink alapján a szórás hasonló pontossággal magyarázza, illetve jelzi előre a várható hozamot 5 éves periódusra vonatkozóan (8,73% és 9,04%). A CAPM béta és az entrópia modellek esetén a rövid távú mintán belüli magyarázó képesség jelentősen magasabb az előrejelző képességnél (CAPM esetén: 13,12% és 6,54%; Shannon entrópia esetén: 14,77% és 9,18%, míg Rényi entrópia esetén: 14,34% és 8,55%). A szórás mintán belüli pontossága szignifikánsan alacsonyabb a többi modellhez képest (8,73% szemben a 13,12%, 14,77%, 14,34% értékekkel), előrejelző képessége viszont meglepően magas (9,04%, szemben a 6,54%, 9,18%, 8,55% értékekkel). A CAPM béta esetén a megfigyelés fordított, 5 éves mintán belül jelentősen magasabb, mint a teljes mintán mérve (rövid távon 13,12%, hosszú távon 8,53%), előrejelző képessége viszont jelentősen alacsonyabb (6,54%), ami azt sugallja, hogy a modell nagy valószínűséggel túltanult a tanító perióduson. Az entrópia alapú kockázati mértékek rövid távú magyarázó-, ill. előrejelző képessége relatíve

⁶A rövidebb periódusokra vonatkozó részletes eredményeinket kérésre rendelkezésre bocsátjuk.

magas (Shannon entrópia 14,77% és 9,18%, illetve Rényi entrópia 14,34% és 8,55%, szemben a szórással: 8,73% és 9,04%, illetve a CAPM bétával: 13,12% és 6,54%). Eredményeink meglepőek abból a szempontból, bár a CAPM béta egy szisztematikus kockázati mérték, mégis az entrópia közel 40%-kal magasabb előrejelző képességgel rendelkezik (9,18% szemben a 6,54%-kal). Shannon entrópia alkalmazásával medve piacon kívül minden esetben pontosabb becsléseket mértünk mind a szóráshoz, mind a CAPM bétához képest. A két entrópia függvény közül hosszú távon a Rényi entrópia (23,66%), rövid távon a Shannon entrópia (14,77% és 9,18%) bizonyult pontosabbnak az empirikus vizsgálatok alapján⁷. Az 5 éves periódusokon mért R^2 ingadozás (relatív szórása) alapján elmondható, hogy a legkevésbé megbízható modell a CAPM béta mintán belül 0,98-as, illetve mintán kívül 1,09-es relatív szórással, ami 40%-kal magasabb az entrópia alapú kockázati mértékekhez képest. A szórás és az entrópia alapú kockázati mértékek esetén hasonló ingadozást mértünk, nagyságrendileg mintán belül 0,60, illetve mintán kívül 0,75 körüli értékeket, legmegbízhatóbb rövid távú modellnek a Rényi entrópia bizonyult. Eredményeinket összefoglalva azt az állítást fogalmazzuk meg, hogy a béta kizárólag csökkenő piacokon alkalmasabb kockázat mérésre, mint az entrópia alapú kockázati mértékek. Minden más esetben az entrópia túlszárnyalja a CAPM bétát és a Markowitz-féle modell varianciáját, így jobb és megbízhatóbb kockázati mértéknek tűnik.

5 Összegzés

Az entrópia alapú kockázati mérték ötvözi a szórás és a CAPM béta különböző mintákon mért pontosságát. Ahogyan a szórás, az entrópia is képes a diverzifikációs hatás kimutatására, a kockázati prémiumra vonatkozó rövid távú előrejelző képessége nagyobb. A bétával szemben a modell számításához nincs szükség a valóságban megragadhatatlan piaci portfólió hozamának ismeretére, a várható kockázati prémiumra vonatkozó mintán belüli magyarázó ereje nagyobb, főleg hosszú távon, amikor a piaci trend nem beazonosított. Jegyezzük meg, hogy egy adott pillanatban ez nem is lehetséges, kizárólag későbbi periódusokban tudjuk megállapítani, hogy a múlt egy adott pillanata bika vagy medve piachoz tartozott-e. Amennyiben a piaci trend azonosítható, az entrópia és a béta magyarázó ereje között nincs egyértelmű reláció. Pontosság, stabilitás szempontjából az entrópia alapú kockázati mérték a legkiegyensúlyozottabb, mivel a rövid távú időablakokon mért magyarázó és előrejelző képesség relatív szórása a legalacsonyabb. Az entrópia becslőmódszerek között a hisztogram-alapú megközelítést találtuk a legpontosabbnak, így bevezettünk egy-egy egyszerű formulát a Shannon- és Rényi entrópia becslésére, elősegítve ezzel az entrópia alapú pénzügyi kockázatbecslés széles körű alkalmazhatóságát.

⁷A „bootstrapping” módszer alapján az entrópia-alapú kockázati mértékek pontossága, amennyiben magasabbak, szignifikánsan különböznek a szórástól és a CAPM bétától 1%-os szignifikancia szinten.

Függelékek

F1 Leíró statisztika

Vállalat neve	CRSP azon.	$r - r_j$	Lapos- ság	Ferde- ség	J-B teszt	szig. szint	σ	β	H_1	H_2
Honeywell International	10145	0,0344	22,93	0,24	137910,2	***	2,13	1,10	7,64	5,94
Beam Inc.	10225	0,0262	7,36	0,28	14278,8	***	1,75	0,83	6,37	4,91
Archer Daniels Midland Co	10516	0,0375	8,50	-0,03	18964,9	***	2,05	0,83	7,24	5,92
Brown Shoe Co Inc. New	10866	0,0161	11,89	0,37	37185,2	***	2,82	1,14	9,59	6,96
Brunswick Corp	10874	0,0326	26,59	0,68	185986,0	***	3,06	1,47	10,35	7,82
Unisys Corp	10890	0,0214	32,22	1,34	274237,1	***	3,97	1,44	12,38	9,42
DuPont	11703	0,0207	5,05	-0,11	6688,0	***	1,84	0,99	6,99	5,50
Eaton Corp	11762	0,0349	14,13	-0,07	52363,9	***	1,82	0,98	6,71	5,20
General Dynamics Corp	12052	0,0332	10,79	0,06	30522,3	***	1,76	0,66	6,35	4,84
Ingersoll Rand Plc	12431	0,0446	9,64	-0,25	24451,7	***	2,28	1,21	8,56	6,71
IBM Corp.	12490	0,0309	10,31	-0,02	27881,8	***	1,85	0,94	6,76	5,21
ITT Corp.	12570	0,0372	8,80	0,12	20320,8	***	1,74	0,90	6,51	5,07
N L Industries Inc.	13303	0,0465	6,11	0,42	9965,6	***	3,22	1,09	11,23	8,68
P G & E Corp	13688	0,0130	63,24	-0,43	1049189,8	***	1,96	0,57	5,92	4,73
PepsiCo Inc.	13856	0,0432	6,83	0,32	12346,1	***	1,66	0,65	6,13	4,82
ConocoPhillips	13928	0,0440	7,20	0,01	13585,2	***	1,95	0,85	7,28	5,91
Apple Inc.	14593	0,1027	20,06	-0,42	105725,7	***	3,07	1,25	11,34	8,95
Sunoco Inc.	14656	0,0254	11,21	-0,06	32955,2	***	2,18	0,95	7,97	6,33
Foot Locker Inc.	15456	0,0248	7,60	0,38	15308,9	***	2,71	1,01	9,70	7,39
RadioShack Corp	15560	0,0196	9,37	-0,02	23013,4	***	2,66	1,09	9,70	7,42
Texas Instruments Inc.	15579	0,0641	4,71	0,18	5849,7	***	2,83	1,37	10,87	8,57
Goodyear Tire&Rubber Co	16432	0,0186	7,37	-0,11	14262,6	***	2,81	1,36	10,12	7,58
Hershey Co	16600	0,0350	21,66	0,40	123190,7	***	1,64	0,59	5,96	4,69
Kroger Company	16678	0,0438	139,09	-4,13	5092483,4	***	2,28	0,70	7,82	6,54
CVS Caremark Corp	17005	0,0353	11,76	-0,35	36383,2	***	1,97	0,75	7,17	5,56
Bassett Furniture Ind.	17137	0,0108	16,95	0,72	75867,9	***	2,89	0,60	9,65	7,35
General Mills Inc.	17144	0,0289	6,11	0,18	9816,4	***	1,33	0,48	5,04	3,98
McGraw Hill Cos Inc.	17478	0,0326	11,75	0,40	36364,0	***	1,89	0,94	6,73	5,06
Kimberly Clark Corp	17750	0,0297	16,20	-0,52	69119,0	***	1,56	0,60	5,74	4,47
United Technologies Corp	17830	0,0411	14,63	-0,58	56472,3	***	1,77	0,94	6,64	5,25
Procter & Gamble Co	18163	0,0398	48,10	-1,67	609852,2	***	1,59	0,66	5,65	4,44
Penney J C Co Inc.	18403	0,0244	5,31	0,39	7553,0	***	2,41	1,11	8,96	6,78
Southern Co	18411	0,0216	12,04	0,00	38001,7	***	1,31	0,46	4,71	3,97
Caterpillar Inc.	18542	0,0530	5,93	-0,08	9233,8	***	2,10	1,09	7,94	6,23
Colgate Palmolive Co	18729	0,0440	12,91	0,07	43712,7	***	1,62	0,65	6,00	4,70
F M C Corp	19166	0,0474	15,71	-0,22	64755,9	***	2,11	1,06	7,33	5,54
Deere & Co	19350	0,0571	4,59	0,00	5527,4	***	2,20	1,05	8,43	6,60
Bristol Myers Squibb Co	19393	0,0219	14,35	-0,46	54208,6	***	1,82	0,81	6,65	5,17
Walgreen Co	19502	0,0460	5,35	0,09	7510,2	***	1,83	0,78	6,91	5,51
Crane Co	20204	0,0428	5,90	0,04	9135,8	***	2,11	1,03	7,68	6,14
Abbott Laboratories	20482	0,0365	4,82	-0,17	6112,0	***	1,69	0,66	6,48	5,18
Dow Chemical Co	20626	0,0197	8,26	-0,17	17941,8	***	2,10	1,09	7,61	5,80
Genesco Inc.	21055	0,0965	10,77	-0,06	30437,5	***	3,56	1,15	12,03	9,96
Lockheed Martin Corp	21178	0,0281	12,79	-0,09	42907,8	***	1,83	0,62	6,63	5,17
International Paper Co	21573	0,0173	11,03	0,07	31913,2	***	2,24	1,13	8,11	6,29
Pfizer Inc.	21936	0,0359	4,40	-0,15	5098,0	***	1,84	0,84	7,05	5,57
Cooper Industries Plc	21979	0,0316	16,29	-0,16	69587,8	***	2,00	1,03	7,23	5,60
Emerson Electric Co	22103	0,0310	6,77	0,05	12034,6	***	1,78	1,02	6,65	5,21
Johnson & Johnson	22111	0,0403	9,07	-0,23	21637,2	***	1,50	0,66	5,70	4,48
PPG Industries Inc.	22509	0,0259	7,30	0,03	13958,1	***	1,83	1,00	6,87	5,35
3M Co	22592	0,0255	15,79	-0,62	65777,1	***	1,58	0,82	5,85	4,51
Merck & Co Inc. New	22752	0,0292	12,79	-0,57	43226,6	***	1,80	0,79	6,76	5,36
Motorola Solutions Inc.	22779	0,0456	7,07	-0,15	13123,2	***	2,73	1,33	10,09	7,74
FirstEnergy Corp	23026	0,0090	12,54	0,22	41267,3	***	1,48	0,58	4,85	4,23
Heinz H J Co	23077	0,0193	4,35	0,17	4991,5	***	1,46	0,55	5,44	4,38
Textron Inc.	23579	0,0295	42,58	0,29	47524,6	***	2,48	1,26	8,08	6,10
Public Service EG Inc.	23712	0,0106	10,84	0,13	30819,9	***	1,51	0,63	5,21	4,30
Entergy Corp New	24010	0,0243	13,40	0,10	47085,0	***	1,56	0,53	5,47	4,43
NextEra Energy Inc.	24205	0,0156	15,38	0,00	62068,1	***	1,36	0,54	4,72	3,79
Constellation Energy G.	24221	0,0096	56,57	-2,24	844580,9	***	1,74	0,61	5,81	4,62

Vállalat neve	CRSP azon.	$r - r_j$	Lapos-ság	Ferde-ség	J-B teszt	szig. szint	σ	β	H_1	H_2
Alcoa Inc.	24643	0,0259	9,44	0,10	23380,0	***	2,43	1,26	8,88	6,88
Raytheon Co	24942	0,0194	66,16	-1,91	1151917,6	***	1,85	0,59	6,30	5,06
ONEOK Inc. New	25232	0,0421	24,63	-0,06	159092,7	***	2,00	0,80	6,83	5,56
Campbell Soup Co	25320	0,0238	7,28	0,36	14044,2	***	1,66	0,57	6,10	4,71
Harris Corp	25582	0,0362	8,61	0,11	19457,3	***	2,15	0,97	7,87	6,09
Ford Motor Co Del	25785	0,0293	14,31	0,55	54057,6	***	2,56	1,16	9,16	7,13
Disney Walt Co	26403	0,0433	13,59	-0,16	48446,9	***	2,04	1,12	7,52	5,90
Biglari Holdings Inc.	26607	0,0972	64,45	-0,69	1089956,4	***	3,39	0,76	11,40	9,06
ASA Gold&Precious M.	26649	0,0207	5,51	0,24	8018,1	***	2,19	0,15	8,14	6,25
Kellogg Co	26825	0,0194	22,71	0,06	135320,1	***	1,60	0,60	5,80	4,56
Ryder Systems Inc.	27633	0,0183	5,12	-0,12	6893,3	***	2,18	1,06	8,00	6,39
Baxter International Inc.	27887	0,0323	16,32	-1,03	71001,4	***	1,87	0,72	6,86	5,53
Duke Energy Corp New	27959	0,0152	13,84	-0,10	50266,3	***	1,47	0,54	5,21	4,03
Xerox Corp	27983	0,0158	20,40	0,29	109275,8	***	2,62	1,10	8,76	6,59
Unilever N V	28310	0,0321	69,52	0,16	1267835,1	***	1,70	0,75	5,92	4,67
Hess Corp	28484	0,0406	10,35	-0,51	28395,1	***	2,20	0,98	8,00	6,21
Masco Corp	34032	0,0075	5,90	0,09	9148,4	***	2,34	1,13	8,36	6,34
Occidental Petrol. Corp	34833	0,0364	9,43	-0,05	23341,6	***	2,04	0,93	7,38	5,96
Sherwin Williams Co	36468	0,0433	9,88	-0,16	25616,3	***	1,88	0,83	6,93	5,45
Thomas & Betts Corp	38578	0,0210	19,22	-0,89	97748,4	***	2,05	1,07	7,33	5,58
RR Donnelley & Sons Co	38682	0,0023	16,56	-0,33	72036,9	***	1,90	0,96	6,88	5,39
Skyline Corp	38850	-0,0043	8,00	0,38	16927,6	***	2,45	0,90	8,45	6,34
Mattel Inc.	39538	0,0532	12,50	-0,26	41071,9	***	2,38	0,87	8,56	6,79
Becton Dickinson & Co	39642	0,0389	12,14	-0,32	38742,3	***	1,71	0,63	6,29	4,88
Computer Sciences Corp	40125	0,0300	22,40	-1,11	132907,5	***	2,24	1,00	7,98	6,12
Cummins Inc.	41080	0,0529	7,40	0,26	14447,6	***	2,48	1,21	8,96	6,73
Con Way Inc.	41929	0,0205	4,79	0,12	6027,2	***	2,59	1,04	9,34	7,16
Meredith Corp	42796	0,0248	7,07	0,23	13150,1	***	1,89	0,92	6,80	5,16
Allegheny Technologies	43123	0,0373	6,46	0,39	11096,0	***	2,95	1,35	10,51	7,91
Stanley Black & Decker	43350	0,0316	5,18	0,24	7087,0	***	2,01	1,01	7,37	5,81
McDonald's Corp	43449	0,0463	5,49	-0,09	7898,4	***	1,67	0,69	6,37	5,12
Supervalu Inc.	44951	0,0005	9,18	-0,61	22470,5	***	2,09	0,72	7,35	5,75
Rowan Companies Inc.	45495	0,0684	2,97	0,21	2353,4	***	3,21	1,23	11,61	9,78
Clorox Co	46578	0,0355	11,24	-0,26	33192,1	***	1,62	0,57	5,81	4,45
Genuine Parts Co	46674	0,0207	5,25	0,20	7275,9	***	1,47	0,73	5,29	4,07
Bard C R Inc.	46877	0,0389	8,16	0,09	17472,0	***	1,92	0,67	7,01	5,43
Rite Aid Corp	46922	0,0229	21,20	0,69	118424,0	***	3,63	1,10	11,01	7,98
New York Times Co	47466	-0,0026	9,05	0,61	21850,1	***	2,27	0,97	8,01	6,10
C N A Financial Corp	47626	0,0161	25,24	-0,03	167044,1	***	2,14	1,08	7,01	5,27
JPMorgan Chase & Co	47896	0,0317	12,51	0,46	41257,9	***	2,58	1,49	9,00	6,74
Gannett Inc.	47941	0,0054	29,95	0,80	235880,4	***	2,25	1,10	7,50	5,72
Lincoln National Corp In	49015	0,0368	46,75	0,94	574264,5	***	2,95	1,49	8,21	6,17
Target Corp	49154	0,0510	13,18	-0,31	45655,7	***	2,17	1,09	8,07	6,21
Potlatch Corp New	49744	0,0126	14,15	0,05	52500,8	***	2,18	1,15	7,74	5,98
Lilly Eli & Co	50876	0,0260	18,78	-0,74	93119,5	***	1,85	0,80	6,92	5,49
Tenet Healthcare Corp	52337	0,0251	47,69	0,43	596699,9	***	2,99	0,86	9,83	7,70
Pulte Group Inc.	54148	0,0521	4,57	0,42	5646,1	***	2,99	1,34	11,00	8,78
S P X Corp	55212	0,0422	12,59	-0,74	42115,5	***	2,55	1,09	8,86	6,87
Walmart Stores Inc.	55976	0,0494	3,71	0,17	3629,7	***	1,82	0,85	6,80	5,41
Louisiana Pacific Corp	56223	0,0284	9,38	0,06	23057,6	***	3,04	1,40	10,69	8,10
ConAgra Inc.	56274	0,0215	13,81	-0,61	50389,0	***	1,66	0,58	6,05	4,69
Ball Corp	57568	0,0372	8,94	0,05	20958,2	***	1,87	0,83	6,81	5,40
American Express Co	59176	0,0433	9,44	0,13	23407,2	***	2,40	1,45	8,67	6,59
Molson Coors-B Co	59248	0,0326	7,71	-0,20	15650,8	***	2,13	0,56	7,41	5,89
Intel Corp	59328	0,0848	6,10	-0,08	9765,4	***	2,68	1,40	10,25	8,12
Snap On Inc.	60206	0,0198	7,46	0,13	14626,5	***	1,87	0,94	6,72	5,06
Paccar Inc.	60506	0,0592	4,04	0,11	4282,2	***	2,36	1,24	8,70	6,64
FedEx Corp	60628	0,0336	4,18	0,14	4596,3	***	2,11	0,99	7,97	6,21
Advanced Micro Devices	61241	0,0587	7,73	-0,05	15653,9	***	3,92	1,61	14,25	11,13
Lowes Companies Inc.	61399	0,0672	4,53	0,08	5380,9	***	2,35	1,10	8,85	7,03
Cigna Corp	64186	0,0398	27,41	-0,79	197707,2	***	2,18	0,92	7,42	5,75
Limited Brands Inc.	64282	0,0434	4,65	0,14	5700,5	***	2,51	1,18	9,38	7,44
Norfolk Southern Corp	64311	0,0377	5,01	0,05	6572,6	***	2,01	0,99	7,61	5,89
Verizon Communications	65875	0,0179	11,90	0,57	37487,6	***	1,70	0,75	6,34	4,96
A T & T Inc.	66093	0,0191	10,85	0,13	30881,4	***	1,76	0,81	6,55	5,18

F-1. táblázat. Az értékpapírok leíró statisztikái

Megjegyzés. A táblázat összegzi a 150 véletlenszerűen választott értékpapír kockázatmentes hozammal csökkentett napi hozamán (kockázati prémium) számított leíró statisztikáit és kockázati mértékeit. Mind a kockázatmentes napi hozam, mind részvények napi hozama esetén logaritmikus (folytonos) hozamadatokat alkalmaztunk. „J-B teszt” jelzi a Jarque-Bera teszt eredményét, a „szig. szint” jelzi a nem normális eloszlásra vonatkozó legalacsonyabb szignifikancia szintet, amit 0.01 esetén ***-gal jelölünk. A J-B teszt pontos értéke 9,21 0.01-es szignifikancia szint esetén. Amennyiben a J-B teszt értéke magasabb, mint a 0.01-es szignifikancia szint határa, a normalitás nullhipotézisét elvetjük. A táblázat eredményei alapján a normalitás hipotézise az összes vizsgált értékpapír esetén elvethető. Az összegzett kockázati mértékek a szórás (σ), CAPM béta (β), Shannon entrópia (H_1) és Rényi entrópia (H_2).

F2 Sűrűségfüggvény becslési módszerek

Az entrópia magfüggvény-alapú becslése

A sűrűségfüggvény becslésére alkalmazott magfüggvény-alapú becslés a következő képlettel írható le:

$$f_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \quad (24)$$

ahol $K(\cdot)$ a magfüggvény és h a sáv szélesség paramétere. A leggyakrabban használt magfüggvényeket az F-2. táblázatban gyűjtöttük össze.

Magfüggvény	$K(z)$
Egyenletes	$\frac{1}{2} I_{\{ z \leq 1\}}$
Gauss	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$
Epanechnikov	$\frac{3}{4} (1 - z^2) I_{\{ z \leq 1\}}$
Háromszög	$(1 - z) I_{\{ z \leq 1\}}$
Harmadfokú	$\frac{35}{32} (1 - z^2) I_{\{ z \leq 1\}}$
Koszinus	$\frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2} z\right) I_{\{ z \leq 1\}}$

F-2. táblázat. A leggyakrabban használt magfüggvények

Megjegyzés. A táblázat összegzi a magfüggvény-alapú sűrűségbecsléshez leggyakrabban használt függvényeket (Härdle, 2004). I jelöli az indikátor függvényt. Az indikátorfüggvény, vagy más néven karakterisztikus függvény, olyan függvény, amely jelzi, hogy az értelmezési tartományának pontjai elemei-e egy halmaznak. Értéke 1, ha igaz a kifejezés, máskülönben 0. Ily módon $I_{\{|z| \leq 1\}}$ értéke 1, ha $|z| \leq 1$, egyébként 0. Härdle (2004) szerint a magfüggvény-alapú sűrűségbecslés során a sáv szélesség helyes megválasztása sokkal fontosabb, mint maga a magfüggvény kiválasztása, így gyakorlati megfontolásból (pl.: számítási idő csökkentése) elsősorban az indikátor alapú magfüggvényeket preferáljuk.

Számításigény szempontjából az indikátor-alapú Epanechnikov magfüggvényt javasoljuk:

$$K(z) = \frac{3}{4}(1 - z^2)I_{\{|z| \leq 1\}}. \quad (25)$$

Az egyik leggyakrabban használt módszer a sávszélesség becslésére a Silverman-féle ökölszabály (1986):

$$\hat{h}_S = 1.06 \min \left\{ \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \frac{\text{IQR}(X)}{1.34} \right\} n^{-1/5}, \quad (26)$$

ahol $\text{IQR}(X)$ X valószínűségi változó interkvartilis terjedelme. Bár a formula normális eloszlást feltételez, jó kezdőértéke lehet pontosabb optimalizáló metódusoknak (Turlach, 1993). Dolgozatunkban a sávszélesség optimalizálására nem térünk ki részletesen, ez további kutatási irány lehet az entrópia becslés mélyebb módszertani elemzésében.

Az entrópia „sample spacing”-alapú becslése

Legyen $x_{n,1} \leq x_{n,2} \leq \dots \leq x_{n,n}$ egy monoton nem-csökkenő rendezése x_1, x_2, \dots, x_n mintának, ahol $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$. Nevezzük $[x_{n,(i-1)m+1}, x_{n,im+1})$ intervallumot az értéktartomány m -rendű felosztás i -edik osztályának. A felosztás alapján a következő sűrűségfüggvény becslést definiálhatjuk (Beirlant, 1997):

$$f_n(x) = \frac{m}{n} \frac{1}{x_{n,im+1} - x_{n,(i-1)m+1}}, \quad (27)$$

ha $x \in [x_{n,(i-1)m+1}, x_{n,im+1})$. Ezt a becslési módszert egyszerű „sample spacing”-alapú sűrűségbecslésnek nevezzük.

Wachowiak és szerzőtársai (2005) az m -rendű felosztás egy másik változatát vezették be, melyet „Correa” becslésnek neveztek el:

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \frac{\sum_{j=i-m/2}^{i+m/2} (x_j - \bar{x}_i)(j - i)}{\sum_{j=i-m/2}^{i+m/2} (x_j - \bar{x}_i)^2}, \quad (28)$$

ha $i : x \in [x_{n,i}, x_{n,i+1})$; $\bar{x}_i = \frac{1}{m+1} \sum_{j=i-m/2}^{i+m/2} x_j$ és $1 \leq j \leq n$. A módszer paramétere a felosztás m rendje. Gyakorlati okokból (például különböző mennyiségű mintaszám) javasoljuk, hogy m értéke n függvénye legyen. Jelöljük ezt m_n -nel, amit a következő képlettel számítunk ki:

$$m_n = \left\lceil \frac{n}{g} \right\rceil, \quad (29)$$

ahol g a kívánt osztályok száma a felosztás után, a zárójelek a felső egészrészt jelentik.

Beirlant és szerzőtársai (1997) további entrópiabecslő módszereket foglaltak össze, például behelyettesítés („resubstitution”), adatfelosztás („splitting-data”) vagy keresztvalidáció alapú („cross-validation”) módszereket.

Sűrűségfüggvény becslési módszerek összehasonlítása

Sűrűségfüggvény becslés	$\hat{\eta}_{p1}$ (%)	$\bar{\eta}_{p2i}$ (%)	$\bar{\eta}_{p2o}$ (%)	$\sigma_R(\hat{\eta}_{p2i})$	$\sigma_R(\bar{\eta}_{p2o})$
Hisztogram	18,71	14,77	9,18	0,60	0,78
Sample Spacing (egyszerű)	21,10	16,39	8,88	0,56	0,80
Sample Spacing (Correa)	20,49	16,40	8,66	0,57	0,80
Kernel (Egyenletes)	18,92	15,81	8,79	0,58	0,76
Kernel (Gauss)	18,89	14,53	9,11	0,57	0,74
Kernel (Epanechnikov)	19,05	15,81	8,62	0,60	0,77
Kernel (Háromszög)	18,61	15,80	8,52	0,61	0,78
Kernel (Harmadfokú)	18,45	15,92	8,36	0,61	0,78
Kernel (Koszinusz)	18,89	14,81	9,03	0,58	0,75

F-3. táblázat. Különböző sűrűségfüggvény becslő módszerrel számított Shannon-entrópia magyarázó képessége

Megjegyzés. Annak eldöntésére, hogy melyik sűrűségfüggvény becslő módszert alkalmazzuk az entrópia becsléséhez, összehasonlítottuk a leggyakrabban alkalmazott módszereket. A táblázat összegzi a megvizsgált sűrűségfüggvény becslő módszer alkalmazásával kapott Shannon entrópia magyarázó (mintán belüli R^2) és előrejelző (mintán kívüli R^2) képességét különböző mintákon mérve. A Standard & Poor's 500 részvényindexből 150 darab értékpapírt választottunk véletlenszerűen, melyek forgalomban voltak 1987-től kezdve 2011 végéig. Ezen értékpapírok napi logaritmikusan hozamán különböző sűrűségfüggvény becslő módszereket alkalmaztunk a Shannon-féle entrópia közelítésére, különböző mintákat nevezetesen (1) hosszú távon, 1987-től 2011-ig bezárólag; (2) 16 darab 10 éves perióduson (1987-1996)-tól kezdve, (2002-2011)-ig 1-1 éves eltolással, felosztva 5-5 éves mintán belüli és mintán kívüli mérési mintára. A hisztogram- és „sample spacing”-alapú sűrűségbecslés esetén 175 osztályt alkalmaztunk, a magfüggvény-alapú módszerek esetén a sávszélességet „Szimplex” keresési módszerrel választottuk ki. $\hat{\eta}_{p1}$ jelöli az egyes kockázati mértékek hosszú távú magyarázó képességét, $\bar{\eta}_{p2i}$ az átlagos mintán belüli magyarázó képesség a 10 éves rövidebb periódusok első 5 évében, $\bar{\eta}_{p2o}$ pedig a második 5 évben mért átlagos előrejelző képesség. Az utolsó két oszlop a rövidebb periódusokon mért teljesítmények relatív szórását összegzi. Bár mintán belül a „sample spacing” módszer teljesít a legjobban, a hisztogram-alapú becslés összességében pontosabb eredményt ad a magyarázó és előrejelző képességet tekintve.

F3 A Shannon-féle entrópia normális eloszlás esetén

Legyen $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ normális eloszlású folytonos valószínűségi változó μ várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Norwich (1993) szerint ebben X valószínűségi változó Shannon entrópiája

$$H_1(X) = \frac{1}{2} \ln(2\pi e \sigma^2). \quad (30)$$

Az általunk definiált Shannon entrópia féle kockázati mérték (14) szerint $\hat{\kappa}_{H_1}(S_i) = e^{H_1(R_i - R_F)}$. Amennyiben az értékpapír kockázati prémiumának

$R_i - R_F$ eloszlása normális, (14) és (30) alapján a következő összefüggés írható fel:

$$\hat{\kappa}_{H_1}(S_i) = e^{\frac{1}{2} \ln(2\pi e \sigma^2)},$$

mely tovább egyszerűsítve

$$\hat{\kappa}_{H_1}(S_i) = \sigma \sqrt{2\pi e}. \tag{31}$$

A képletből látszik, hogy normális eloszlás esetén az entrópia alapú kockázati mértékünk a szórástól csak a $\sqrt{2\pi e}$ konstansban tér el.

F4 Piaci rezsimiek

Első nap	Utolsó nap	Piaci trend
1987-01-02	2000-01-31	emelkedő
2000-02-01	2002-08-31	csökkenő
2002-09-01	2007-04-30	emelkedő
2007-05-01	2009-01-31	csökkenő
2009-02-01	2011-04-30	emelkedő
2011-05-01	2011-08-31	csökkenő
2011-09-01	2011-12-31	emelkedő

F-4. táblázat. Periódusok címkézése piaci trend alapján

Megjegyzés. A táblázat az elemzéshez alkalmazott periódust (1987-2011) rövidebb trendekre osztja. A trendeket a CRSP adatbázisában található, kapitalizációval súlyozott, osztalékkal korrigált piaci index havi logaritmikus hozama alapján határoztuk meg.

Irodalom

1. Affleck-Graves, J., and B. McDonald. (1989). Nonnormalities and Tests of Asset Pricing Theories. *The Journal of Finance*, 44(4), 889–908. doi:10.1111/j.1540-6261.1989.tb02629.x
2. Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. & Heath, D. (1999). Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203–228. doi:10.1111/1467-9965.00068
3. Beirlant, J., Dudewicz, E. J., Györfi, L. & Van der Meulen, E. C. (1997). Nonparametric entropy estimation: An overview. *International Journal of Mathematical and Statistical Sciences*, 6(1), 17–40.
4. Benavides, E. M. (2011). *Advanced engineering design: an integrated approach*. Elsevier. doi:10.1533/9780857095046
5. Bera, A. K. & Park, S. Y. (2008). Optimal portfolio diversification using the maximum entropy principle. *Econometric Reviews*, 27(4-6), 484–512. doi: 10.1080/07474930801960394
6. Boltzmann, L. (1970). Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. In *Kinetische Theorie II SE – 3*, 67, 115–225. Vieweg+Teubner Verlag. doi:10.1007/978-3-322-84986-1_3
7. Brown, S. J. & Warner, J. B. (1985). Using daily stock returns: The case of event studies. *Journal of Financial Economics*, 14(1), 3–31. doi:10.1016/0304-405X(85)90042-X

8. Chawla, D. (2003). Stability of Alphas and Betas over Bull and Bear Markets: An Empirical Examination. *Vision: The Journal of Business Perspective*, 7(2), 57–77. doi:10.1177/097226290300700205
9. Clausius, R. (1870). XVI. On a mechanical theorem applicable to heat. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 40(265), 122–127. doi:10.1080/14786447008640370
10. DeBondt, W. F. & Thaler, R. H. (1987). Further evidence on investor overreaction and stock market seasonality. *The Journal of Finance*, 42(3), 557–581. doi:10.1111/j.1540- 6261.1987.tb04569.x
11. Dionisio, A., Menezes, R. & Mendes, D. A. (2006). An econophysics approach to analyse uncertainty in financial markets: an application to the Portuguese stock market. *The European Physical Journal B*, 50(1), 161–164. doi:10.1140/epjb/e2006-00113-2
12. Erdős, P. & Ormos, M. (2009). Return calculation methodology: Evidence from the Hungarian mutual fund industry. *Acta Oeconomica*, 59(4), 391–409. doi:10.1556/AOecon.59.2009.4.2
13. Erdős, P., Ormos, M. & Zibriczky, D. (2011). Non-parametric and semi-parametric asset pricing. *Economic Modelling*, 28(3), 1150–1162. doi:10.1016/j.econmod.2010.12.008
14. Fama, E. F., & MacBeth, J. D. (1973). Risk, return, and equilibrium: Empirical tests. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 607–636. doi:10.1086/260061
15. Freedman, D. & Diaconis, P. (1981). On the histogram as a density estimator: L2 theory. *Probability theory and related fields*, 57(4), 453–476. doi:10.1007/BF01025868
16. Havrda, J. & Charvát, F. (1967). Quantification method of classification processes. Concept of structural α -entropy. *Kybernetika*, 3(1), 30–35. doi:10.1.1.163.683
17. Härdle, W. (2004). *Nonparametric and semiparametric models*. Springer. doi: 10.1007/978-3-642-17146-8
18. Huang, X. (2008). Mean- entropy models for fuzzy portfolio selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16(4), 1096–1101. doi:10.1109/TFUZZ.2008.924200
19. Jana, P., Roy, T. K. & Mazumder, S. K. (2009). Multi-objective possibilistic model for portfolio selection with transaction cost. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 228(1), 188–196. doi:10.1016/j.cam.2008.09.008
20. Jensen, M. C. (1968). The performance of mutual funds in the period 1945–1964. *The Journal of Finance*, 23(2), 389–416. doi:10.1111/j.1540-6261.1968.tb00815.x
21. Kirchner, U. & Zunckel, C. (2011). *Measuring Portfolio Diversification*, 2011. arXiv preprint arXiv:11024722.
22. Li, P. & Liu, B. (2008). Entropy of credibility distributions for fuzzy variables. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16(1), 123–129. doi:10.1109/TFUZZ.2007.894975
23. Lintner, J. (1965a). The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *Review of Economics and Statistics*, 73, 13–37. doi:10.2307/1924119
24. Lintner, J. (1965b). Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification. *Journal of Finance*, 20(4), 587–615. doi:10.1111/j.1540-6261.1965.tb02930.x

25. Maasoumi, E. & Racine, J. (2002). Entropy and predictability of stock market returns. *Journal of Econometrics*, 107, 291–312. doi:10.1.1.27.1423
26. Markowitz, H. (1952). Portfolio selection*. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91. doi:10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x
27. Mossin, J. (1966). Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica*, 34(4), 768–783. doi:10.2307/1910098
28. Nawrocki, D. N. & Harding, W. H. (1986). State-value weighted entropy as a measure of investment risk. *Applied Economics*, 18(4), 411–419. doi:10.1080/00036848600000038
29. Newey, W., & West, K. (1987). A Simple, Positive Semi-definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. *Econometrica*, 55(3), 703–708. doi:10.2307/1913610
30. Norwich, K. H. (1993). *The Entropy of the Normal Distribution. Information, sensation, and perception* (pp. 81–87). San Diego: Academic Press.
31. Ou, J. (2005). Theory of portfolio and risk based on incremental entropy. *The Journal of Risk Finance*, 6(1), 31–39. doi:10.1108/15265940510574754
32. Philippatos, G. C. & Wilson, C. J. (1972). Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios. *Applied Economics*, 4(3), 209–220. doi:10.1080/00036847200000017
33. Qin, Z., Li, X. & Ji, X. (2009). Portfolio selection based on fuzzy cross-entropy. *Journal of Computational and Applied mathematics*, 228(1), 139–149. doi:10.1016/j.cam.2008.09.010
34. Rényi, A. (1961). On Measures of Entropy and Information. *Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*; Berkeley, Calif. University of California Press. pp. 547–561.
35. Scott, D. W. (1979). On optimal and data-based histograms. *Biometrika*, 66(3), 605–610. doi:10.1093/biomet/66.3.605
36. Shannon, C. E. (1948). A Mathematical Theory of Communication. *Bell System Technical Journal*, 27, 379–423. doi:10.1002/j.1538-7305.1948.tb00917.x
37. Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19(3), 425–442. doi:10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x
38. Silver, A. (1975). Beta: Up, Down, and Sideways. *The Journal of Portfolio Management*, 1(4), 54–60. doi:10.3905/jpm.1975.408534
39. Silverman, B. W. (1986). *Density estimation for statistics and data analysis*. CRC Press. Monographs on Statistics and Applied Probability, 26. doi:10.1007/978-1-4899-3324-9
40. Treynor, J. L. (1962). Toward a Theory of Market Value of Risky Assets. R. Korajczyk (Ed.), *Asset Pricing and Portfolio Performance*. London: Risk Books. 1999
41. Tsallis, C. (1988). Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52(1-2), 479–487. doi:10.1007/BF01016429
42. Turlach, B. A. (1993). Bandwidth selection in kernel density estimation: A review. Université catholique de Louvain. doi:10.1.1.44.6770
43. Usta, I. & Kantar, Y. M. (2011). Mean-variance-skewness-entropy measures: a multi-objective approach for portfolio selection. *Entropy*, 13(1), 117–133. doi:10.3390/e13010117

44. Wachowiak, M. P., Smolikova, R., Tourassi, G. D. & Elmaghraby, A. S. (2005). Estimation of generalized entropies with sample spacing. *Pattern Analysis and Applications*, 8(1-2), 95–101. doi:10.1007/s10044-005-0247-4
45. Xu, J., Zhou, X. & Wu, D. D. (2011). Portfolio selection using λ -mean and hybrid entropy. *Annals of operations research*, 185(1), 213–229. doi:10.1007/s10479-009-0550-3
46. Zhou, R., Cai, R. & Tong, G. (2013). Applications of entropy in finance: a review. *Entropy*, 15(11), 4909–4931. doi:10.3390/e15114909

ENTROPY AS FINANCIAL RISK MEASURE

This paper investigates entropy as a novel financial risk measure. We show that differential entropy of the daily returns of single assets and portfolios can capture their risk premium. Entropy gains more accurate estimation on expected return with simpler methodology compared to the Capital Asset Pricing Model (CAPM) beta. Our analysis show that the diversification effect can be captured in entropy: increasing number of assets involved into a portfolio decreasing risk; furthermore, in an entropy – expected return system diversification generates a hyperbolic disposition of portfolios similarly to variance. In our empirical investigation, we use the daily log-returns of 150 randomly selected stocks from the Standard & Poor's 500 index components for a 25 years long period. The regression analysis yields that entropy as a financial risk measure generates higher explanatory power on expected returns than variance or CAPM beta.

Keywords: entropy; asset pricing; risk estimation; systematic risk *JEL:* G12; C58