Mihályffy László—Simonovits András

A dinamikus input-output modell vezérelhetőségéről*

1. Bevezetés

Ebben a rövid dolgozatban egy elvi kérdést tisztázunk a dinamikus input-output modellel kapcsolatban, nevezetesen a modell vezérelhetőségének kérdését. Eredményünk érdekessége mindenekelőtt abban áll, hogy helyreigazít egy téves állítást, amely egy jónevű szerző alapműnek számító monográfiájában szerepel. Bár megfontolásaink csupa jólismert fogalomra épülnek, a teljesség kedvéért kiindulópontként felírjuk a dinamikus Leontief-modellt, és kimondjuk a vezérelhetőség definícióját; ezek birtokában már megfogalmazható dolgozatunk mondanivalója, miszerint a dinamikus input-output modell — bizonyos korlátozó feltételek hiányában — mindig vezérelhető.

Dolgozatunkban az időt diszkrét változónak fogjuk tekinteni; megjegyezzük azonban, hogy következtetéseink nagy része, s így mindenekelőtt a teljes vezérelhetőséggel kapcsolatos megállapításunk, minden nehézség nélkül átvihető arra az esetre, amikor az idő folytonos változó. Feltételezésünk — tehát diszkrét idő — mellett a dinamikus input-output modellt a következőképpen lehet felírni ([4], 145—151. oldal):

$$x_t = Ax_t + B(x_{t+1} - x_t) + c_t, \qquad t = 0, 1, \ldots, T-1. \tag{1}$$

Itt a jelölések értelmezése a következő.

x_t az ágazatok bruttó kibocsátásának vektora a t időpontban; ha a népgazdaságnak n termelő ágazata van, akkor x_t n-dimenziós;

c_t a végső felhasználás n-dimenziós vektora a t időpontban, a beruházási célú kibocsátás nélkül);[1]

$A = (a_{ij})$ és $B = (b_{ij})$ a közvetlen ráfordítások, illetve a beruházások fajlagosainak $n \times n$-es mátrixa; a modell szempontjából ezeket időben állandóknak tekintjük.

Tekintsük mármost a következő dinamikus rendszert:

$$z_{t+1} - z_t = f(t, z_t, u_t), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

ahol t minden szóba jövő értéke mellett z_t és u_t valamely n-, illetve m-dimenziós euklideszi tér eleme, f pedig a teljes $(m + n + 1)$-dimenziós euklideszi téren

* A tanulmány korábbi változata előadásként hangzott el a X. Magyar Operációkutatási Konferencián, Debrecenben, 1980. szeptemberében.

[1] A továbbiakban a „végső felhasználás" kifejezést mindig ebben az értelemben fogjuk használni.

értelmezett és folytonos függvény. A (2) rendszer szempontjából a z_t és u_t vektorokat *állapotváltozónak*, illetve *vezérlő* (v. *szabályozó*) változónak nevezzük.

Definíció ([1], 70–78. oldal). A (2) rendszert *teljesen vezérelhetőnek* mondjuk, ha bármely z_0 *kezdeti állapothoz* és bármely $\bar{z}$ *végállapothoz* megadható olyan T természetes szám, valamint a vezérlő változók olyan $u_0, u_1, \ldots, u_{T-1}$ sorozata, amelyre (2) alapján $z_T = \bar{z}$.

Az (1) dinamikus input-output modellt, illetve ennek folytonos analogonját többen vizsgálták ([2], [3], [5], [6] stb.) szabályozáselméleti keretek között, amikoris a modell a szabályozni kívánt rendszer állapotegyenletének a szerepét játszotta; értelemszerűen az ágazati bruttó kibocsátások x_t vektora reprezentálta az állapotváltozót, a végső felhasználás c_t vektora pedig a szabályozó változót.[2] Az effajta vizsgálatokban természetesen vetődik fel a *vezérelhetőség* kérdése; a helyzetet látszólag az teszi bonyolulttá, hogy a definícióban szereplő (2) dinamikus rendszerrel szemben az (1) dinamikus input-output modell nem explicit, hanem implicit elsőrendű differenciaegyenlet-rendszer. *Masanao Aoki* amerikai professzor úgy találta ([1], 87. oldal), hogy amennyiben (1)-ből az $x_{t+1} - x_t$ növekményt nem lehet explicit módon kifejezni, más szóval: amikor a B beruházási mátrix *szinguláris*, akkor a dinamikus input-output modell nem vezérelhető. Mint arra már dolgozatunk elején is utaltunk, ez a megállapítás nem helytálló; a következőkben ezt fogjuk kimutatni.

2. A dinamikus input-output modell vezérlése

Az előzőekben felvetett problémával kapcsolatban első eredményünk a következő.

1. *Tétel.* Ha a dinamikus input-output modellben sem az x_t bruttó kibocsátás, sem a c_t végső felhasználás időbeli alakulásával kapcsolatban nincs semmi megszorítás, akkor a modell teljesen vezérelhető (természetesen továbbra is az x_t vektort tekintjük állapot-, a c_t vektort pedig szabályozó változónak).

Bizonyítás. Adott x_0 kezdeti- és $\bar{x}$ végállapot mellett válasszuk meg a $T \geqq 1$ természetes szám értékét tetszőlegesen, és ezután válasszuk az

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_T = \bar{x}$$

sorozat elemeit a végpontoktól eltekintve tetszőlegesen. Ekkor a szabályozó változók

$$c_t = x_t - Ax_t - B(x_{t+1} - x_t), \tag{1}$$
$$t = 0, 1, \ldots, T-1$$

összefüggéssel definiált sorozata a rendszert az adott kezdőpontból az adott végpontba viszi át, és ezzel állításunkat (valamint M. Aoki idézett megállapításának téves voltát) bizonyítottuk.

Eredményünk egyrészt majdnem triviális, másrészt tartalmi szempontból – az x_t trajektória valamint a szabályozó változó nagyfokú tetszőlegessége miatt

[2] Dolgozatunk keretein túlmutatna annak taglalása, hogy ez a felfogás helytálló-e vagy sem.

— nem sokatmondó. Ebben a vonatkozásban azonban eredményünk jelentős mértékben javítható, éspedig a következőképpen.

Vezessük be először a következő fogalmakat, illetve jelöléseket.

(a) Legyen $\bar{c}(\geqq 0)$ olyan adott n-dimenziós vektor, amelynél a c_t végső felhasználás a vezérlés folyamán soha sem vehet fel kisebb értéket (tehát $t = 0, 1, 2, \ldots$ esetén $c_t \geqq \bar{c}$);

(b) Legyen S azoknak a pozitív komponensű n-dimenziós x vektoroknak a halmaza, amelyekre $x > Ax + \bar{c}$.

Tetszőleges $x \in S$ vektort *megengedett* termelésnek fogunk nevezni; ez azt fejezi ki, hogy a termelés önfogyasztásának és a végső felhasználás minimumának biztosítása mellett van még lehetőség többletfogyasztásra, az export volumenének növelésére vagy felhalmozásra.

2. *Tétel.* Tegyük fel, hogy mind az x_0 kezdeti állapot, mind az $\bar{x}$ végállapot megengedett ($x_0, \bar{x} \in S$). Akkor van olyan T természetes szám, és van olyan $c_0 \geq \bar{c}, c_1 \geq \bar{c}, \ldots, c_{T-1} \geq \bar{c}$ vezérlés, amely az (1) modellt x_0-ból $\bar{x}$-ba átviszi, és emellett az x_t trajektória bármely t-re megengedett.

Bizonyítás. $x_0, \bar{x} \in S$ miatt választhatjuk T értékét úgy, hogy

$$x_0 - Ax_0 - \frac{1}{T} B(\bar{x} - x_0) \geq \bar{c} \text{ és } \bar{x} - A\bar{x} - \frac{1}{T} B(\bar{x} - x_0) \geq \bar{c} \tag{3}$$

teljesüljön. Rögzítsük T értékét, és legyen $t = 1, 2, \ldots, T$ mellett

$$x_t = x_0 + \frac{t}{T}(\bar{x} - x_0).$$

Ekkor egyrészt $x_T = \bar{x}$ és

$$x_{t+1} - x_t = \frac{1}{T}(\bar{x} - x_0)$$

minden (T — 1)-nél nem nagyobb t-re, másrészt, mivel bármely x_t a kezdő- és a végállapot konvex kombinációja, (3)-ból következik az

$$x_t - Ax_t - B(x_{t+1} - x_t) = x_t - Ax_t - \frac{1}{T} B(\bar{x} - x_0) \geq \bar{c} \tag{4}$$

egyenlőtlenség teljesülése is t minden szóba jövő értékére. Ily módon x_t minden t-re megengedett, és a (4) egyenlőség bal oldalával értelmezett c_t vezérlés kielégíti a $c_t \geq \bar{c}$ követelményt. Állításunkat ezzel igazoltuk.

Korollárium. A 2. tétel alapján egyszerű (bár számításigényes) eljárás adódik az alábbi diszkrét időoptimum-feladat megoldására:

$$x_t = Ax_t + B(x_{t+1} - x_t) + c_t, \tag{5a}$$

$$x_t \in S,\ t = 1, 2, \ldots, t^*, \tag{5b}$$

$$x_0 \text{ és } \bar{x} \text{ adott, } x_0, \bar{x} \in S, \text{ és } x_{t^*} = \bar{x}, \tag{5c}$$

$$c_t \geq \bar{c},\ t = 1, 2, \ldots, t^* - 1, \tag{5d}$$

$$t^* = \min!$$

Nyilvánvaló, hogy a 2. tétel bizonyításában szereplő T a t^* érték felső korlátja. t^* értékét 1-nek választva, el kell dönteni, hogy van-e az (5a)–(5d) feltételrendszernek megengedett megoldása. Ha igen, akkor az optimumfeladat megoldását a következő alakban kapjuk:

$$t^* = 1;\ x_1 = \bar{x},\ c_0 = x_0 - Ax_0 - B(x_1 - x_0);$$

ha nem, akkor t^* értékét növelni kell 1-gyel, és újból meg kell vizsgálni, hogy van-e (5a)–(5d)-nek megengedett megoldása. Vagy optimális megoldást kapunk $t^* = 2$ mellett, vagy újból növelnünk kell t^* értékét; ily módon a tekintett optimumfeladatot legfeljebb T számú LP feladat megoldására lehet visszavezetni.

(Beérkezett: 1981. március 3-án.)

IRODALOM

1. Aoki, M.: *Optimal control and system theory in dynamic economic analysis*, New York, 1976. North Holland Publishing Co.
2. Бекларян, Л. А.–Петров, А. А.–Тер-Крикоров, А. М.: Об одной линейной динамической модели производства. Экономика и математические методы, 14 (1978), 312–325.
3. Bródy, A.: The optimal and time-optimal path of economic growth. *Contributions to input-output techniques I.* Ed.: A. P. Carter, A. Bródy. Amsterdam–London, 1970. North Holland Publishing Co.
4. Leontief, W.: *Input-output economics*. New York, 1966. Oxford Univ. Press.
5. Szepesi Gy.–Székely B.: Optimális pályák egy szabályozott gazdasági rendszerben. *Szigma*, 4 (1971) 137–151.
6. Zsellér Gy.: Rögzítetlen végpontú lineáris „időoptimum" vezérlési probléma megoldása a Pontrjagin-féle maximumelv alapján. *Információ – Elektronika* 9 (1974) 210–216.

ON THE CONTROLLABILITY OF DYNAMIC INPUT-OUTPUT MODEL

If dynamic input-output model is conceived as a state equation of some control problem and sectoral gross outputs are considered as state variables, furthermore sectoral final consumption less investment are regarded as control variables, then the *model is completely controllable*, independently of whether the investment coefficient matrix is regular or singular. This result disproves a false statement by M. Aoki. In a control problem based on the dynamic input-output model values of both the state and the control variables may be selected in such a way that interpretable economic results are obtained.

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИНАМИЧНОЙ МОДЕЛИ БАЛАНСА МЕЖОТРАСЛЕВЫХ СВЯЗЕЙ

Если динамичную модель баланса межотраслевых связей рассматриваем как уравнение состояния какой-либо контрольной задачи, переменными состояния возьмём валовые выпуски разных отраслей, а относящиеся к определённым отраслям величины конечного использования, уменьшенные величиной инвестиции, примем за переменные регулирования то *модель полностью управляема*, независимо от того, что матрица коэффициентов инвестиции регулярна или сингулярна. Этот результат опровергает одно ошибочное утверждение М. Аоки. В регулирования задаче, которую можно сконструировать на основе динамичной модели баланса межотраслевых связей, величины как переменных состояния, так и переменных регулирования можно выбрать таким образом, чтобы прийти к экономически обоснованному результату.