

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

FÜSTÖS LÁSZLÓ—MESZÉNA GYÖRGY—SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA

A sokdimenziós skálázás egyes újabb módszerei II.

Bevezetés

Első cikkünk (1982. évi 3. szám, 193—212 o.) keretében foglalkoztunk a téma általános bevezetésével, majd a skálázás problémájának beilleszkedésével a sokváltozós statisztika egészébe. Ezután a nem metrikus, illetve metrikus módszerek közül áttekintettük a MINISSA és a MRSCAL eljárást. — Második cikkünk e gondolatkörnek az előzőekre épülő újabb módszereit mutatja be: az INDSCAL-t és változatait, a PROFIT és a PREFMAP eljárásokat.

Az ismertetés célja ismét e lehetőségeknek közelebb hozása a hazai gyakorlathoz, az eljárásokkal kapcsolatos nyitott kérdések felvetése. Őszintén reméljük, hogy így mind az újabb elméleti eredmények születését, mind pedig az alkalmazási tapasztalatok bővülését jelentősen elősegíthetjük.

1. Az INDSCAL eljárás és változatai (IDIOSCAL, PARAFAC-2 stb.)

(*Individual differences scaling*; CARROLL—CHANG, 1970)

Megfigyeléseink (az objektumok) a sokváltozós „állapottér” pontjainak tekinthetők. Az euklideszi távolságfogalom értelmében *egymáshoz közel eső pontok* a jellemzők között rendre fennálló kicsiny eltérések következtében ilyen helyzetűek. Megállapítható tehát: a jellemző változók összességét tekintve ezen objektumok fokozottan *hasonlóak* egymáshoz.

Félreértések elkerülése végett rögzítsünk most egy megállapodást. Az INDSCAL modell inputját és outputját a későbbiekben részletesen ismertetjük. Előjáróban azonban mondjuk ki — a leírás és megértés könnyítése érdekében —: *az input térben hasonlóságokról, az output térben távolságokról fogunk beszélni.* Ismét hangsúlyozzuk e fogalmazás problémáját, hiszen a távolságok is tekintethetők hasonlósági mértéknek s a hasonlóságok alkalmas távolság-definícióval távolságoknak. Úgyancsak használható volna bármelyik értelemben a különbözőségek kategóriája is. A valóság modellezésének különböző eseteiben a konkrét helyzetnek legjobban megfelelő fogalomalkotást részesítjük előnyben. Egy pillanatra sem feledkezve meg e lehetőségekről, tisztán technikai okokból alkalmazzuk a jelzett terminológiát.

Az INDSCAL modell célja is az, hogy az eredetileg rendelkezésre álló jellemzők (változók) sokdimenziós teréről (állapottér) áttérjen egy elvben tetszőleges, de alacsonyabb dimenziószámú térre, — gyakorlatilag rendszerint két dimenziós térre! — ebben helyezve el az eredeti input tér „pontjait” (az objektumokat) oly módon, hogy a közöttük levő távolságok az eredeti hasonlóságokkal monoton függvénykapcsolatban álljanak. Az INDSCAL újdonsága, hogy e megfeleltetést az egyedek által képviselt más-más szemléletnek megfelelő ha-

sonlóságok alapján is elvégezni. Végül eredő pont-ábrát ad az output térben. Ezt kiegészíti egy plusz közléssel, megmondva, hogy az egyedek részéről az output tengelyek milyen súlyozása következik az input adatokban implicite benne foglalt információkból.

A mondottak értelmében tehát:

$$\delta_{jk,i} \approx F(d_{jk,i}) \quad (1.1)$$

ahol: $d_{jk,i}$ a j edik és k -edik objektum output távolsága az i -edik egyed szemléletében,

F monoton függvény

$\delta_{jk,i}$ a megfelelő input hasonlóság (ill. különbözőség).

Koordinátákkal fejezve ki a távolságokat:

$$d_{jk,i} = \left(\sum_{t=1}^r (y_{jt,i} - y_{kt,i})^2 \right)^{1/2},$$

ahol r az eredő output tér dimenziószáma.

Ha a (később ismertetendő) egyedi súlyozást még nem tartalmazó koordinátákból indulunk ki, akkor ezek egyenkénti értelemszerű transzformálásával (az egyedekre és tengelyekre vonatkozó súlyokkal) ugyancsak előáll $d_{jk,i}$:

$$y_{jt,i} = \sqrt{w_{it}} x_{jt} \quad \text{és:}$$

$$d_{jk,i} = \left(\sum_{t=1}^r w_{it} (x_{jt} - x_{kt})^2 \right)^{1/2}$$

1.1. Az INDSCAL eljárás

Az input háromdimenziós adatmátrix. Egy kétdimenziós táblát ad az objektumok sokváltozós jellemzése:

	változók
objektumok	

és ha az egyedek részéről történő eltérő megítéléseket is figyelembe vesszük, létrejön a harmadik dimenzió. (Elhelyezve egymás fölé a különböző egyedek szemléletében adódó adattáblákat.)

Tartalmában azonos, formálisan más jellegű az alábbi input tábla:

	objektumok
	1 2 ... k ... n
objektumok	1
	2
	...
	j
	...
	n
	δ_{jk}

Ekkor az objektumok egymáshoz viszonyított hasonlóságait ($\delta_{jk} = \delta_{kj}$) használjuk fel az induláshoz, természetesen figyelembe véve m egyed más-más szemléletét, itt is megkapjuk a harmadik dimenziót.

Az eljárás két eredménymátrixot ad. Az első az objektumok koordinátáit tartalmazza 1–2–3, esetleg több, de az eredeti jellemzők számánál általában kisebb dimenziójú térben. (Leggyakrabban két dimenzióban.) A dimenziószám-
csökkentés alap gondolatát az előző cikkben részletesen kifejtettük, de a továbbiakban is követhető lesz. A második eredménymátrix az *egyedek* által adandó *eredő* súlyokat adja meg az *előző eredménymátrix tengelyeire!* Tehát a redukált tér *eredő*, leszámaztatott tengelyeire kalkulált *eredő* súlyokat kapjuk meg, melyek következnek az egyedek által az input három-dimenziós mátrixban rögzített, a változókra vonatkozó eltérő eredeti megítélésből! A módszer lényege, hogy a két eredménymátrix a később definiálandó értelemben az induló adatmátrix információ tartalmának legjobb közelítését adja a rögzített alacsonyabb dimenziószám mellett. (Pl. két dimenzióban!)

Az output táblák jellege tehát:

		dimenziók					
		1	2	...	t	...	r
objektumok	1						
	2						
	...						
	j						
	...						
n							

 x_{jt}

		dimenziók					
		1	2	...	t	...	r
objektumok	1						
	2						
	...						
	i						
	...						
m							

 w_{it}

Itt w_{it} méri az i -edik egyed szemszögéből az output pont t -edik dimenziójának (tengelyének) fontosságát. Felhívjuk a figyelmet, hogy w_{it} leszámaztatott eredmény, értéke az i -edik egyed számára is eleve ismeretlen adat, burkoltan van benne az input háromdimenziós adat-tömbjében (az i -edik egyed részéről az „egyedi hasonlóságokban” megnyilvánult szemléletben).

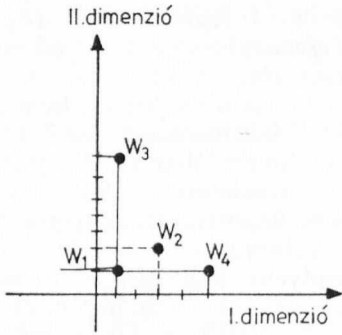
Mutassuk be az outputról elmondottakat egy fiktív példán. Tegyük fel, hogy 3 objektumot jellemzett az input adattömb 4 egyed szemléletében, s eredményül az alábbi két kétdimenziós ábrát kaptuk (arra, hogy az induló rendszerben hány változó szerepelt, e csak az eredményeket szemléltető fiktív példában nem kell tekintettel lennünk).

Az 1. output ábra (az eredő objektum tér) átértékelése a 4 egyed eredményül kapott egyedi súlyozásának megfelelően:



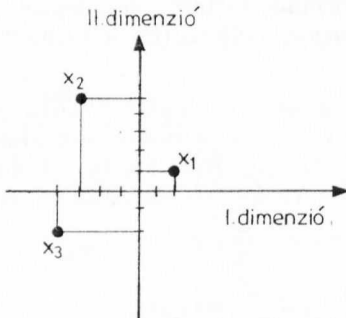
		Dimenziók	
		I.	II.
objektumok	x_1	2	1
	x_2	-3	5
	x_3	-4	-2

1. ábra. Eredő objektum tér



		Dimenziók	
		I.	II.
súlyok	w_1	1	1
	w_2	3	2
	w_3	1	6
	w_4	5	1

2. ábra. Eredő egyedi súlyok tere



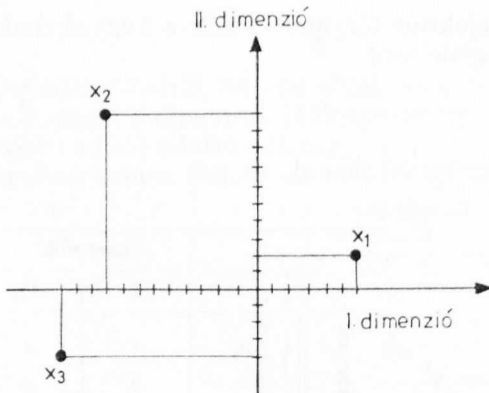
	I.	II.
x_1	2	1
x_2	-3	5
x_3	-4	-2

3. ábra. Az első egyed saját szemléletének megfelelő „privát” tere

A távolságok az első egyed *privát* terében: $d_{ik,1}$

	x_1	x_2	x_3
x_1	—	—	—
x_2	6,40	—	—
x_3	6,71	7,07	—

Itt tehát a súlyoknak megfelelően a helyzet változatlan.

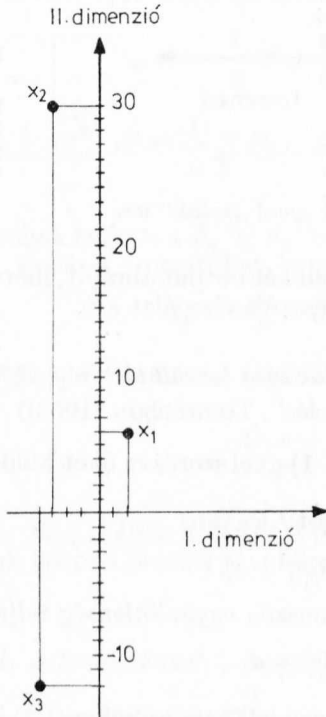


	I.	II.
x_1	6	2
x_2	-9	10
x_3	-12	-4

4. ábra. A második egyed „privát” tere (az első dimenziót háromszoros, a másodikat kétszeres súllyal véve tekintetbe)

A távolságok a második egyed privát terében: $d_{ik,2}$

	x_1	x_2	x_3
x_1	—	—	—
x_2	17,01	—	—
x_3	18,97	14,32	—



	I.	II.
x_1	2	6
x_2	-3	30
x_3	-4	-12

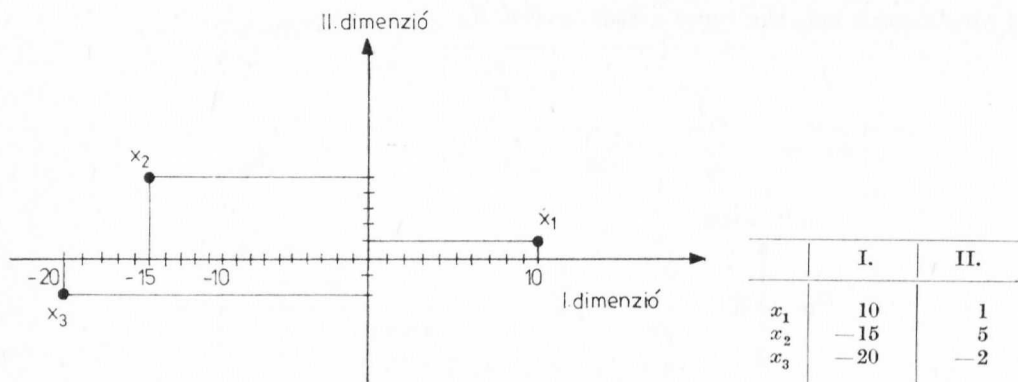
5. ábra. A harmadik egyed „privát” tere

A távolságok a harmadik egyed privát terében: $d_{ik,3}$

	x_1	x_2	x_3
x_1	—	—	—
x_2	24,52	—	—
x_3	18,97	42,01	—

A távolságok a negyedik egyed privát terében: $d_{ik,4}$

	x_1	x_2	x_3
x_1	—	—	—
x_2	25,32	—	—
x_3	30,15	8,60	—



6. ábra. A negyedik egyed „privát” tere

A következőkben az INDSCAL modell két output ábráját, illetve a hozzájuk tartozó mátrixok számítási menetét vesszük vizsgálat alá.

1.2. A különbözőségek átalakítása becsült távolságokká. („Additív konstans becslés”. TORGERSON (1958))

Ha induló adataink hasonlóságok, (-1) -gyel szorozva őket különbözőségekké alakíthatók.

Alkalmazzuk a következő feltételezést:¹ legyen

$$\bar{d}_{jk,i} = \delta_{jk,i} + c_i. \quad (1.2)$$

A távolságokra megkívánjuk a háromszög egyenlőtlenség teljesülését:

$$d_{jl} \leq d_{jk} + d_{kl}. \quad (1.3)$$

Behelyettesítve (1.2) jobb oldalának megfelelő kifejezéseket (1.3)-ba, átrendezés után kapjuk, hogy a c_i -k legkisebb értéke, mely mellett még teljesül az egyenlőtlenség:

$$c_{\min} = \max_{j,k,l} [\delta_{jl} - \delta_{jk} - \delta_{kl}].$$

A leírt egyszerű séma a „komparatív távolságok” szerepét betöltő különbözőségekből valódi távolság tulajdonságokkal rendelkező becsült értékeket állít elő.

1.3. A becsült távolságok átalakítása becsült skaláris szorzatokká

Legyen az r dimenziós output tér két vektora (pontja):

$$\mathbf{x}_j = [x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jr}], \quad \mathbf{x}_k = [x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kr}]$$

ekkor a skalár szorzat: $\mathbf{x}_j \mathbf{x}_k = \sum_{t=1}^r x_{jt} x_{kt}$.

¹ Metrikus módszerről lévén szó, eleve feltételeztük, hogy a hasonlóságok és távolságok között zárt alakú monoton függvénykapcsolat áll fenn.

A skálázó módszerek szempontjából az origó helyzetére nem kellene tekintettel lennünk, de az aktuálisan felhasználásra kerülő szorzat az origó változtatásával szemben nem invariáns. Ezért az origót — a kialakult gyakorlatnak megfelelően — a pontok súlypontjában rögzítjük.

Ugyancsak TORGERSON 1958-ból származó eredménye szerint: az euklideszi távolságok az alábbi képletnek megfelelően átalakíthatók a súlypontba helyezett origótól induló vektorok skaláris szorzatává.

$$b_{jk} = -\frac{1}{2} (d_{jk}^2 - d_{.k}^2 - d_{.j}^2 + d_{..}^2) \quad (1.4)$$

$$\text{ahol: } d_{.k}^2 = \frac{1}{n} \sum_j d_{jk}^2, \quad d_{.j}^2 = \frac{1}{n} \sum_k d_{jk}^2, \quad d_{..}^2 = \frac{1}{n} \sum_j \sum_k d_{jk}^2, \quad d_{jk}^2 = \sum_{t=1}^r (x_{jt} - x_{kt})^2.$$

Ha a távolságok helyett a $\hat{d}_{jk} = \delta_{jk} + c_{\min}$ becült távolságokkal dolgozunk, a \hat{b}_{jk} becült skaláris szorzatokat kapjuk. Bevezetjük a következő jelölést:

$$\hat{d}_{jk}^{*2} = \hat{d}_{jk}^2 - \hat{d}_{.k}^2 - \hat{d}_{.j}^2 + \hat{d}_{..}^2$$

és (1.4) mindkét oldalát mátrix alakba írjuk:

$$\hat{B} = -\frac{1}{2} \hat{D}^*. \quad (1.5)$$

Jelölje $\hat{X} = \{\hat{x}_{jt}\}$ mátrix a keresett output térbeli pontok becült koordinátáit, [e pontok közötti becült távolságokat adja meg \hat{d}_{jk}].

1.4. A kanonikus dekompozíció eljárása [„CANDECOMP”]

Elevenítsük föl az (1.1) összefüggés után leírtakat, illetve az 1.3 pont elején felírt összefüggéseket. Ugyanazokat a jelöléseket használva felírhatjuk a b_{jk} skalár szorzatokat külön-külön minden egyes szemléletében, amit az „ i ” indexben rögzítünk:

$$b_{jk,i} = \sum_t y_{jt,i} y_{kt,i} = \sum_t w_{it} x_{jt} x_{kt} \quad (1.6)$$

$$\text{ahol: } y_{jt,i} = \sqrt{w_{it}} x_{jt}$$

N dimenziós („utas”) tömbök (táblák) kanonikus dekompozíciós modellje $N = 3$ esetén:

$$z_{ijk} = \sum_t a_{it} \cdot b_{jt} \cdot c_{kt}. \quad (1.7)$$

(1.6) és (1.7) megfeleltetése alapján:

$$z_{ijk} = b_{jk,i}$$

$$a_{it} = w_{it}$$

$$b_{jt} = c_{jt} = x_{jt}$$

A további redukció érdekében vezessünk be újabb jelöléseket, legyen:

$$\hat{z}_{is}^* = \hat{z}_{ijk}$$

$$\hat{g}_{st} = \hat{b}_{jt} \hat{c}_{kt}$$

Így (1.7.)-nek már a becslésekre felírt új alakja:

$$\hat{z}_{is}^* = \sum_t \hat{a}_{it} \hat{g}_{st},$$

vagy mátrix alakban:

$$\hat{Z}^* = \hat{A} \hat{G}' \quad (1.8)$$

Az \hat{A} mátrix elemeit a legkisebb négyzetek módszerének segítségével becsülve, kapjuk:

$$\hat{A} = Z^* \hat{G} (\hat{G}' \hat{G})^{-1}. \quad (1.9)$$

Foglaljuk most össze, mi történt eddig az 1.4. pontban.

- Felismertük (1.6) és (1.7) azonos algebrai alakját, elvégeztük a megfeleltetéseket.
- Új jelölések bevezetésével előállítottuk a (1.8) formát.
- Első menetként ezután a „ b ” és „ c ” értékek rögzítésével a legkisebb négyzetek módszerével számolhatjuk a „ a ”-kat, (1.9) alapján.
- Ezután rögzített „ a ” és „ c ” értékekkel ugyanúgy számoljuk a „ b ”-t.
- Az iterációt a megkívánt mértékű konvergenciáig folytatjuk.

Tudni kell, hogy az eljárás nem biztosítja minden esetben a globális minimumot, de a gyakorlati számítások tapasztalatai igen jók, „majdnem mindig” a kívánt optimális eredményhez vezetnek.

A modellek alapján az eljárás végén mind az output pontokra \hat{X} koordinátái, mindpedig a \hat{W} egyedi súlyok rendelkezésre állnak.

CARROLL és CHANG (1970) a fenti metrikus eljárást a *Kruskal*-féle „monoton regresszió” felhasználásával kvázi-nem-metrikus eljárássá alakította át. A lépések ebben a felfogásban a következők:

1. Ismertek az induló különbözőségek egyedi bontásiban: $\delta_{jk,i}$.
2. Meghatározzuk a c_i additív konstansokat s így a különbözőségeket távolságokká alakítjuk: $\hat{d}_{jk,i}$.
3. A becsült távolságokat becsült skaláris szorzatokká alakítjuk: $\hat{b}_{jk,i}$.
4. A \hat{b} értékekre alkalmazzuk a CANDECOMP eljárást egy lépésig s az eredményeket normalizáljuk; ekkor már rendelkezésünkre állnak e fázisnak megfelelő output pontokra koordináták és súlyok is.
5. Meghatározzuk minden i, j, k -ra az előzőek alapján adódó pontok súlyozott euklideszi távolságait.
6. A monoton regresszió elvét hasznosítva értékeljük az elért eredményeket; ha szükséges, most már az eredményül kapott távolságokkal dolgozva.
7. Ezután az iteráció visszamegy a 3. ponthoz és megismétli a továbbiakat.
8. Az illeszkedés jóságát különböző kritériumokkal mérhetjük:

$$\text{Kruskal-féle: } S = \left[\sum_i \frac{\sum_j \sum_k (d_{jk,i} - \bar{d}_{jk,i})^2}{\sum_j \sum_k d_{jk,i} - \bar{d}_i^2} \right]^{1/2}$$

Értéke az iterációk sorozatában nem monoton csökkenő.

$$\text{Carroll és Chang-féle: Strain} = \left[\frac{\sum_i \sum_j \sum_k (b_{jk,i} - \hat{b}_{jk,i})^2}{\sum_j \sum_k b_{jk,i}^2} \right]^{1/2}$$

ahol az előzőeknek megfelelően: $b_{jk,i} = \sum_t w_{it} x_{jt} x_{kt}$ és $\hat{b}_{jk,i}$ az (1.4) formula alapján állítható elő, a megfelelő becslések alkalmazásával.

1.5. Egyértékűség az INDSCAL modellben

Kimutatható, hogy a leírt megoldás egyértékű, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

1. Az „eredő objektum tér” (ld. 1.1. pontban) dimenziói függetlenek.
2. Van legalább két egyed szemléletére kiterjedő adattömbünk, ($i = 1, 2$ legalább).
3. Nincs két dimenzió, melyekre teljesülne a súlyok „párhuzamos minta” (parallel pattern) tulajdonsága. [Akkor és csak akkor mutatnak a súlyok „párhuzamos mintát”, ha minden $i-j$ egyedpárra igaz: $w_{is} \cdot w_{jt} = w_{it} \cdot w_{js}$. Az összefüggés geometriai jelentése: az eredő egyedi súlyok terének (ld. 1.1. pontban) az s -edik és t -edik dimenziók által kiválasztott kétdimenziós alterében az egyedek súlyai az origón átmenő egy egyenesen fekszenek.]

1.6. Az IDIOSCAL modell. [CARROLL—CHANG (1972)] (Individual Differences In Orientation Scaling)

Háromdimenziós adatmátrixok elemzésére a legáltalánosabbnak tekinthető MDS eljárás. Az INDSCAL-tól mint a kategória alap-modelljétől az IDIOSCAL is és más elgondolások is elsősorban az alkalmazott távolságfogalom megválasztásában különböznek. Ha nem teszünk kikötést az output pontábra dimenzióinak (tengelyeinek) hajlásszögére, a távolságokat az általánosított euklideszi távolságfogalommal állíthatjuk elő:

$$d_{jk,i} = \left[\sum_{t=1}^r \sum_{t'=1}^r (x_{jt} - x_{kt}) c_{tt',i} (x_{jt'} - x_{kt'}), \right]^{1/2}$$

ahol $C_i = \{c_{tt',i}\}$, egy $r \times r$ típusú szimmetrikus definit vagy szemidefinit mátrix.

A modellben a skaláris szorzat alakja:

$$b_{jk,i} = \sum_t \sum_{t'} x_{jt} c_{tt',i} x_{kt'}$$

mátrix jelöléssel:

$$B_i = X C_i X'$$

C_i dekompozíciójára két eljárást ismertetünk.

1. Carroll–Chang eljárása

$$C_i = I_i \beta_i I_i'$$

ahol: I_i orthogonális mátrix

β_i diagonális mátrix.

Geometriailag ez az eredő (output) objektum tér orthogonális rotációját jelenti, mellyel az i -edik egyed privát terét (koordinátarendszerét) kapjuk meg, β_i súlyozás után.

2. Tucker és Harshman eljárása

$$C_i = D_i R_i D_i,$$

ahol: D_i diagonális mátrix

R_i szimmetrikus mátrix, diagonális elemei 1-gyel egyenlőek.]

Az R_i mátrix értelmezése szerint a tengelyek közötti hajlásszögek cosinusait tartalmazza (korrelációs mátrix). A D_i mátrix diagonális elemei az egyes tengelyekre vonatkozó koordináták szórásai. C_i így kovariancia mátrixnak tekinthető. Ha a tengelyek orthogonálisak, R_i egységmátrix lesz, ekkor $C_i = D_i^2$ diagonális mátrix. Ha minden egyedre (i -re) ugyanaz a helyzet, akkor az IDIOSCAL modell speciális eseteként az INDSCAL modellt kapjuk vissza.

1.7. PARAFAC–2 modell [HARSHMAN (1972)]

(Parallel Factors–2)

A PARAFAC–2 modell az IDIOSCAL modell speciális esete, amikor:

$$C_i = D_i R D_i,$$

ahol: R minden egyedre azonos. Értelmezése: a nem merőleges tengelyek közötti hajlásszögek cosinusait (a korrelációkat) tartalmazó mátrix,

D_i az újraskálázó súlyokat tartalmazó mátrix viszont egyedenként különböző diagonális mátrix.

Tartalmazza az eredő (output) objektum tér pontjainak koordinátáit az X mátrix. E tér tengelyeit az egyedek általában eltérően súlyozzák, ezt fejezi ki az alábbi összefüggés:

$$X_i^* = X D_i.$$

Az X_i^* -gal meghatározott, az i -edik egyed szemléletének megfelelő pont-ábrát egy lineáris transzformációval át lehet vinni egy orthogonális koordináta rendszerbe $[X_i^*]$, ahol már közönséges euklideszi távolságokkal mérhetjük a pontok által képviselt objektumok különbözőségét:

$$X_i^{\circ} = X_i^* T = X D_i T.$$

¶ A transzformáció T mátrixával, normalizálással R kifejezhető:

$$R = E T T' E,$$

ahol: $E = [\text{diag}(T T')]^{1/2}$.

Látható, hogy ez a modellváltozat abban tér el – egyszerűsödik – az IDIOSCAL eljárásához képest, hogy R független az egyedektől (az i indextől).

1.8. További modell kísérletek

A faktor elemzés eljárásának felhasználásával alakította ki *Tucker* három szempontú skálázó modelljét. A tengelyek irányítottsága itt nem egyértelmű, az objektum tér és az egyedi tér dimenziószámának nem kell megegyeznie. Ha a két tér dimenziója egyenlő, akkor *Tucker* modellje az *INDSCAL* modellbe megy át. *Tucker* kidolgozta modelljének négydimenziós általánosítását is.

Ha az egyedek nem csak egyféle saját szemlélettel rendelkeznek, hanem egyedenként több szemszögből nézve kapjuk az információkat, az induló adattömb négy vagy több (N) dimenziós lesz. E célra „többutas” MDS módszereket dolgoztak ki. Ilyen az *INDSCAL* modell 4 utas, illetve N -utas alakja. (A rendelkezésünkre álló program jelenlegi verziója $N \leq 7$ esetén alkalmazható.)

A modellek általánosításának egy másik lehetősége az elég széles körben használt euklideszi távolságfogalom megváltoztatása és helyettesítése pl. *Minkowski* metrikával. Bővebben olvashatunk erről *Carroll* és *Wish* műveiben, pl. [3]-ban.

Az ismertetett modellekben az eredő objektum tér lineáris transzformációi fordulnak elő. Voltak kísérletek nemlineáris transzformációk alkalmazására. Az egyik irányzatban minden koordináta tengelyen monoton transzformációt hajtunk végre. Egy másik kísérlet szerint az eredő privát tér pontjait az eredő objektum térből úgy származtatjuk, hogy minden egyed „ideális pontjától” mért távolság monoton növekvő függvénye szerint végezzük el a transzformációt. Az ilyen eljárásokat szokás „pszichofizikai” transzformációknak is nevezni.

Az utóbbi elgondolásnak egy földrajzi illusztrációját adja *CARROLL—WISH* (1974) egy new-yorki ember példáján. Emberünk azt gondolja, hogy Los Angeles és San Francisco nagyon közel vannak egymáshoz (mivel tőle mindkettő igen távoli), ugyanakkor New York és Boston sokkal távolabb vannak (feltehetően azért, mert mindkét utóbbi város közelebb van az ő „előnyös pontjához”).

2. A PROFIT eljárás

(*Property Fitting*. Lineáris modell: *MILLER—SHEPARD—CHANG*, 1964, Nem lineáris modell: *CARROLL*, 1964)

Tételezzük fel, hogy rendelkezésünkre áll az egyes egyedekre,² objektumokra vonatkozóan r számú jellemző (változó) értéke. Ennek alapján a vizsgált egyedek az r -dimenziós „állapottér” pontjainak tekinthetők. Ismertek továbbá bizonyos tulajdonságoknak az egyedekre vonatkozó értékei. A *PROFIT* eljárás célja, hogy minden tulajdonsághoz meghatározzon az r -dimenziós térben egy olyan vektort, amely maximálisan korrelál az adott tulajdonsággal. A feladat megoldása — az illesztés — regressziós problémaként kezelhető, a regressziós függvény típusától függően beszélünk lineáris, ill. nem lineáris modellről.

Megjegyezzük, hogy az egyedek r -dimenzióra vonatkozó koordinátái nemcsak a priori mérési eredmények vagy ezek aggregálásából nyert értékek lehetnek, hanem más sokváltozós módszerek eredményeként kapott ún. származta-

² A továbbiakban az egyedek és objektumok fogalmát azonos értelemben használjuk.

tott értékek is. Ilyen származtatott tér lehet például a faktoranalízis vagy a MINISSA eljárás kevés dimenziószámú megoldás tere. Az eredmények értelmezésénél ezt természetesen figyelembe kell venni.

Lineáris modell (tulajdonság illesztés lineáris regresszióval)
A PROFIT eljárás inputja két adatmátrix:

Alapmátrix

$X = \{x_{ij}\}$ a mátrix elemei n egyed (objektum) r változóra vonatkozó értékeit tartalmazza ($i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots r$).

Tulajdonságmátrix

$P = \{p_{ik}\}$ n egyed (vagy ezek kategóriákba sorolt megfigyelési egysége) m tulajdonságra vonatkozó megfigyelési értékeit tartalmazza ($i = 1 \dots n$, $k = 1 \dots m$).

Jelölje: $p' = [p_i]$, ($i = 1 \dots n$) valamely tulajdonságnak az n egyedre vonatkozó sorvektorát.

Az eljárás az r -dimenziós tér n pontjára a tulajdonságokhoz legjobban illeszkedő vektort határozza meg.

Jelölések:

$t = [t_j]$ a vektor koordinátái az illesztett vektor iránykoszinuszai³ ($j = 1 \dots r$).
 $h' = [h_i]$ az n pontnak a t vektorra vonatkozó vetületeiből alkotott sorvektor ($i = 1, 2, \dots, n$).

2.1. Az eljárás

Meghatározzuk az iránykoszinuszok t , és a vetületek h vektorát, amelyekre

$$|p - h|^2 \rightarrow \min,$$

ahol $h = X t$.

Ez lineáris regressziós feladat, az illesztést a legkisebb négyzetek elve értelmében a következőképpen kapjuk:

$$t = (X' X)^{-1} X' p.$$

Ebből

$$h = X t = X (X' X)^{-1} X' p.$$

2.2. *Nem lineáris modell* (tulajdonság illesztés nem lineáris regresszióval)

Ebben az esetben az illesztést a nem lineáris korreláció értelmében végezzük. Carroll két változó közötti nem lineáris korreláció mérésére egy mérőszámot definiált:

$$K = \frac{1}{S^2} \sum_{i \neq j} w_{ij} (x_i - x_j)^2,$$

³ Iránykoszinusznak egy adott vektor és a koordinátatengelyek által bezárt szögek koszinuszait nevezzük.

ahol p és x a két változó,

$$w_{ij} = f(|p_i - p_j|), \quad f \text{ monoton csökkenő függvény,}$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_i^n (x_i - \bar{x})^2.$$

A PROFIT eljárásban a független változó a tulajdonság vektor (p), a függő, becsült változó pedig az r -dimenziós térben az n pont vetülete az illesztett vektorra (h). Így a feladat megoldása ekvivalens K minimalizálásával.

Az eljárásban a w_{ij} súlyokat a következőképpen választjuk meg:

$$w_{ij} = \frac{1}{(p_i - p_j)^2} + C,$$

ahol

$$C = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j}^n (p_i - p_j)^2.$$

A konstans megadása számítástechnikai okokból szükséges. Az eljárás lépései:

1. Az X alapmátrixot ortonormált rendszerré transzformáljuk: $X'X = E$
2. Az illesztett vektor iránykoszinuszainak meghatározásához kiszámítjuk a szimmetrikus $X'AX$ mátrixot, ahol

$$A = \begin{cases} a_{ij} = -w_{ij} & \text{minden } i \neq j\text{-re,} \\ a_{ii} = \sum_{i \neq j}^n w_{ij}. \end{cases}$$

3. Meghatározzuk az $X'AX$ mátrixhoz tartozó karakterisztikus egyenlet legkisebb (nem nulla) gyökét, ez lesz K minimális értéke. A legkisebb sajátértékhez tartozó sajátvektor felel meg az iránykoszinuszok t vektorának.
4. Az iránykoszinuszok alapján kiszámítható az „ n pont vetülete”, a h vektor:

$$h = X t.$$

2.3. Az eljárás outputja

Eredménytáblák:

1. A tulajdonságok induló értékei és vetületei az illesztett vektorra.
2. A maximális korreláció értékei minden tulajdonság és az illesztett vektor között.
3. Az illesztett vektor iránykoszinuszai normált alakban.

Az eredménytáblák mellett a program egy pontábrát is megad. Ez a vizsgált egyedek, ill. ezek valamely megfigyelési egységeit illeszti a vizsgált változók származtatott terébe.

3. A PREFMAP eljárás és változatai

Az eljárás megfigyelési egységek „ideális” pontjait keresi egy adott dimenziójú térben, a tér pontjaira vonatkozó preferencia értékek alapján.

Az adott r -dimenziós térbeli koordináták — amint azt a PROFIT eljárásnál is feltételeztük — nemesak közvetlen mérési eredmények lehetnek (ilyen esetben azt mondjuk: a megfigyelések mintateréből indulunk ki), hanem sokváltozós módszerek eredményeként kapott ún. származtatott értékek is (például faktoranalízis vagy MINISSA eljárás megoldás tere).

A PREFMAP eljárás négy különböző modell alapján illeszti a megfigyelt változókra vonatkozóan adott preferenciával rendelkező egyedeket az induló r -dimenziós térbe. A modellek az egyedeknek a változók terére tett feltételezéseiben (pl. dimenzió szám) különböznek.

A következőkben megadjuk az eljárás input rendszerét, majd sorra vesszük az egyes modelleket.

A PREFMAP eljárás inputja két adatmátrix:

Alapmátrix

$X = \{x_{it}\}$ a mátrix elemei n egyed (objektum) r változóra (jellemzőre) vonatkozó értékeit tartalmazza ($i = 1 \dots n$, $t = 1 \dots r$).

Preferencia mátrix

$S = \{s_{ij}\}$ n egyednek vagy kategóriákba sorolt megfigyelési egységeiknek m jellemzőre (változóra) vonatkozó megfigyelési értékei, amelyek valamilyen preferencia skálán vannak értelmezve. ($i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots m$). Ha $s_{ij} > s_{ik}$, akkor az i -edik egyed a j -edik és a k -edik jellemző közül a j -ediket preferálja.

3. 1. Általános távolság modell (I.)

A modell feltételezi — ez a feltevés a II. és III. modellekre is fennáll — hogy a változók terének pontjai (x_{it}) és az ideális pont (y_{it}) közötti távolságok négyzete, valamint a preferencia értékek között lineáris összefüggés áll fenn.

$$s_{ij} = a_i d_{ij}^2 + b_i + e_{ij}, \quad (1)$$

ahol: a_i, b_i a lineáris függvény együtthatói ($a_i > 0$),

e_{ij} hibatag,
 d_{ij} súlyozott távolság.

A távolság értelmezése:

$$d_{ij}^2 = \sum_{t=1}^r w_{it} (x_{jt}^* - y_{it}^*)^2, \quad (2)$$

ahol: $x_j^* = T_i x_j$, (x_j a j -edik egyed alapváltozókra vonatkozó koordinátái),

$y_i^* = T_i y_i$, (y_i az i -edik egyed ideális pontja),
 T_i az ortogonális transzformáció mátrixa (r -ed rendű).

A I. modell általános jellege abban van, hogy minden egyed az induló r -dimenziós tér tengelyeit egyedileg különbözőképpen transzformálhatja (a T_i ortogonális mátrix szerint) és minden egyed különbözőképpen súlyozhatja az egyes tengelyeket.

A (2) egyenlet mátrix alakba írva:

$$d_{ij}^2 = (x_j^* - y_i^*)' W_i (x_j^* - y_i^*), \quad (3)$$

ahol $W_i = \{w_{it}\}$ diagonális mátrix, elemei a w_{it} súlyok.

(3)-t kifejtve:

$$d_{ij}^2 = (x_j^*)' W_i x_j^* - 2(y_i^*)' W_i x_j^* + (y_i^*)' W_i y_i^*. \quad (4)$$

(2) alapján a távolság az induló tér koordinátaival kifejezhető:

$$d_{ij}^2 = x_j' T_i' W_i T_i x_j - 2y_i' T_i' W_i T_i x_j + y_i' T_i' W_i T_i y_i. \quad (5)$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$R_i^* = T_i' W_i T_i;$$

ebben a felbontásban T_i az R_i^* sajátvektorait, W_i pedig a sajátértékeket tartalmazó mátrix. A sajátértékek — a súlyok — nem negatívak, ha R_i^* pozitív definit vagy szemidefinit.

$c_i^* = y_i' T_i' W_i T_i y_i = \text{konstans}$ (nem függ x_j -től).

Így az (5) egyenlet a következő egyszerűbb alakba írható:

$$d_{ij}^2 = x_j' R_i^* x_j - 2y_i' R_i^* x_j + c_i^*. \quad (6)$$

Helyettesítsük (6)-t az (1) alapegyenletbe (a hibátagot elhagyjuk):

$$s_{ij} \approx a_i(x_j' R_i^* x_j - 2y_i' R_i^* x_j + c_i^*) + b_i. \quad (7)$$

Tovább egyszerűsítve a jelöléseket:

$$R_i = a_i R_i^*$$

$$b_i' = -2a_i y_i' R_i^* = -2y_i' R_i$$

$$c_i = a_i c_i^* + b_i.$$

Ezek alapján (7) a következő alakú:

$$s_{ij} \approx x_j' R_i x_j + b_i' x_j + c_i, \quad (8)$$

az induló változók koordinátáinak (x_{jt}) másodfokú függvénye. Skaláraritmetikai jelölésekkel:

$$s_{ij} \approx \sum_{t=1}^r \sum_{t'=1}^r r_{tt'} (x_{jt} x_{jt'}) + \sum_{t=1}^r b_{it} x_{jt} + c_i. \quad (9)$$

Ez kvadratikus regressziós összefüggés az x_{jt} független változók és s_{ij} függő változók között. A regressziós feladat legegyszerűbben úgy oldható meg, ha visszavezetjük többváltozós lineáris problémára.

A regressziós együtthatók adják R_i és b_i elemeinek becslését. A becslésekből meghatározhatók az egyedek „ideális” pontjai, és pedig a $b'_i = -2y'_i R_i$ összefüggésből: $y'_i = -\frac{1}{2} b'_i R_i^{-1}$, (ha az R_i mátrix inverze létezik, ami mindig fennáll, ha R_i pozitív definit). Az egyedek „ideális” pontjai tehát az induló tér legjobban preferált helyei.

3.2. Súlyozott távolság modell (II.)

Ez a modell nem engedi meg az egyedek számára a tér tengelyeinek különböző transzformációját, de megengedi az eltérő súlyozást. A II. modell speciális esete az I. modellnek, mivel a transzformációs mátrix minden egyednél azonos: $T_i = E$.

Az induló egyenlet megfelel (1)-nek, de itt eltérő a távolság értelmezése:

$$s_{ij} = a_i d_{ij}^2 + b_i + e_{ij}, \quad (10)$$

ahol

$$d_{ij}^2 = \sum_{t=1}^r v_{it} (x_{jt} - y_{it})^2.$$

Az I. modellnél alkalmazott jelölések alapján, felhasználva a $T_i = E$ összefüggést, a (10) egyenlet az alábbi alakra hozható:

$$s_{ij} \approx x'_j W_i x_j + b'_i x_j + c_i, \quad (11)$$

ahol $W_i = \{w_{it}\}$ diagonális súlymátrix; elemei: $w_{it} = a_i v_{it}$.
Skaláraritmetikai jelölésekkel:

$$s_{ij} \approx \sum_{t=1}^r w_{it} x_{jt}^2 + \sum_{t=1}^r b_{it} x_{jt} + c_i. \quad (12)$$

A másodfokú regressziós feladat megoldásával a becsült paraméterekből meghatározhatók az egyedek ideális pontjai, és pedig a $b'_i = -2y'_i W_i$ összefüggésből:

$$y'_i = -\frac{1}{2} b'_i W_i^{-1}$$

$$y_{it} = -\frac{1}{2} \frac{b_{it}}{w_{it}}.$$

(W_i diagonális mátrix, így az inverz egyszerűen számítható.)

3.3. Nem súlyozott távolság modell (III.)

Mint már említettük, a I–II–III. modellek között a különbség a távolság (d_{ij}) eltérő értelmezésében van. Az induló egyenlet megfelel az I–II. modellben alkalmazottnak:

$$s_{ij} = a_i d_{ij}^2 + b_i + e_{ij}, \quad (13)$$

ahol $d_{ij}^2 = \sum_{t=1}^r u_t (x_{jt} - y_{it})^2,$

$$u_t = \pm 1.$$

Ez a modell lehetőséget ad az egyes (vagy akár az összes) tengelyek negatív súlyozására, de a súlyok minden egyedre vonatkozóan azonosak, a tengelyek transzformációja nem megengedett. A preferencia értékeket becsló regressziós egyenlet:

$$s_{ij} \approx a_i x_j' \langle u \rangle x_j + b_i' x_j + c_i, \quad (14)$$

vagy más formában:

$$s_{ij} \approx a_i \sum_{t=1}^r u_t x_{jt}^2 + \sum_{t=1}^r b_{it} x_{jt} + c_i. \quad (15)$$

A regressziós feladat megoldásával meghatározhatók az ideális pont koordinátái:

$$y_{it} = -\frac{1}{2} \frac{b_{it}}{a_i u_t}.$$

3.4. Vektor modell (IV.)

A vektor modellben az egyedek preferencia értékeit az induló változók lineáris függvényével becsüljük:

$$s_{ij} \approx b_i x_j + c_i, \quad (16)$$

vagy más alakban:

$$s_{ij} \approx \sum_{t=1}^r b_{it} x_{jt} + c_i. \quad (17)$$

(16) csak lineáris tagokat tartalmaz, speciális esete az általános modellnek. Legyen $b_i = a_i y_i$, ekkor (16) a következő alakú:

$$s_{ij} \approx a_i y_i' x_j + c_i, \quad (18)$$

ez pedig az előző három modell megfelelő egyenleteinek [(8), (11), (14)-nek] speciális esete, amelyben a kvadratikus tag együtthatója nulla. A regressziós feladat megoldásával a b_{it} regressziós paraméterek alapján az ideális pont koordinátái becsülhetők:

$$y_{it} = b_{it} \left(\sum_{t=1}^r b_{it}^2 \right)^{-1/2}.$$

Ez a regressziós együtthatók egységnyi hosszúságúra normált alakja, ennek megfelelően az ideális pont koordinátái (y_{it}) az origó körüli egységsugarú körön vannak.

3.5. Nem metrikus PREFMAP modell

Az eddigi modellekben feltételeztük, hogy a preferencia értékek intervallum mérési szintű skálán vannak megadva. Kerestük az induló változók és az ideális pont között értelmezett távolság és a preferencia értékek között a legkisebb négyzetek elve értelmében legjobban illeszkedő lineáris függvényt: $s_{ij} = F_i(d_{ij}^2)$.

A gyakorlati alkalmazásokban sokszor előfordul, hogy a preferencia értékek csak mint rangszámok értelmezhetők. Indulól egyenletünk ekkor a következő alakú:

$$\tilde{s}_{ij} = d_{ij}^2 + e_{ij}, \quad (19)$$

ahol $\tilde{s}_{ij} = M_i(s_{ij})$;

M_i monoton nem csökkenő függvény.

A modell iterációs eljárással oldható meg, az általános regresszió, ill. a Kruskal-féle monoton regressziós eljárás ismételt alkalmazásával.

Az iteráció lépései:

1. Regressziós összefüggés alapján becsüljük $\tilde{s}_{ij}^{(1)}$ értékeit az eredeti preferencia értékekből (s_{ij}) kiindulva.
2. A Kruskal-féle monoton regressziós eljárással becsüljük a különböző egyedek M_i függvényét, M_i alapján s_{ij} értékekből kiindulva becsülhetők az $\tilde{s}_{ij}^{(1)}$ értékek:

$$\hat{s}_{ij}^{(1)} = M_i^{(1)}(s_{ij}),$$

3. Az s_{ij} -ket helyettesítjük az $\hat{s}_{ij}^{(1)}$ értékekkel, így $\tilde{s}_{ij}^{(2)}$ -re kapunk becsléseket
4. Az új s_{ij} értékek alapján becsülhető az új $M_i^{(2)}$, ennek ismeretében pedig: $\hat{s}_{ij}^{(2)}$.
5. Az előző lépések addig folytatódnak, amíg a regressziós együtthatókban és a monoton függvényben a változás mértéke egy adott korlát alatt marad (az eljárás konvergens).

3.6. Az illesztés jóságának vizsgálata

A PREFMAP modellek az egyedek preferencia értékeit lineáris (vagy kvadrátikus) regressziós függvénnyel becsülik. Ezért a becslés jóságának vizsgálatához a többszörös korrelációs együtthatót használjuk. A többszörös korreláció szignifikanciáját F hányadossal mérhetjük:

$$F = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)}, \quad (20)$$

ahol: R a többszörös korrelációs együttható,
 n az egyedek száma,
 $(k-1)$ és $(n-k)$ a megfelelő szabadságfokok.

A PREFMAP eljárás I–IV. modelljei különböző feltételek mellett alkalmazhatók, a legáltalánosabb az I. modell, a legegyszerűbb a IV. modell, közöttük pedig az általánosítás szerinti hierarchikus kapcsolat van. Az általánosabb modellben a többszörös korreláció értéke általában magasabb. Kérdés, hogy az illeszkedés javulása szignifikánsnak tekinthető-e. Ennek eldöntése az F hányados alapján lehetséges:

$$F_{ab} = \frac{(R_a^2 - R_b^2)/(k_a - k_b)}{(1 - R_a^2)/(n - k_b)}, \quad (21)$$

ahol: a, b a két összehasonlított modell (a az általánosabb)
 R_a, R_b a két többszörös korrelációs együttható
 k_a, k_b a becsült együtthatók száma
 $(k_a - k_b)$ és $(n - k_b)$ a szabadságfokok.

3.7. A PREFMAP modell outputja

Eredménytáblák:

1. A preferencia értékek becslései.
2. Az eredeti változók és az „ideális” pontok távolságának négyzete.
3. A transzformáció mátrixa, ill. a súlymátrix (modellektől függően).
4. Az ideális pontnak az eredeti (és új, ha volt transzformáció) tengelyekre vonatkozó koordinátái.
5. Az illeszkedés jóságának mérőszámai: többszörös korreláció, F -hányados (egyedekre modellenként, és egyedekre modellpáronként).

Ábrák

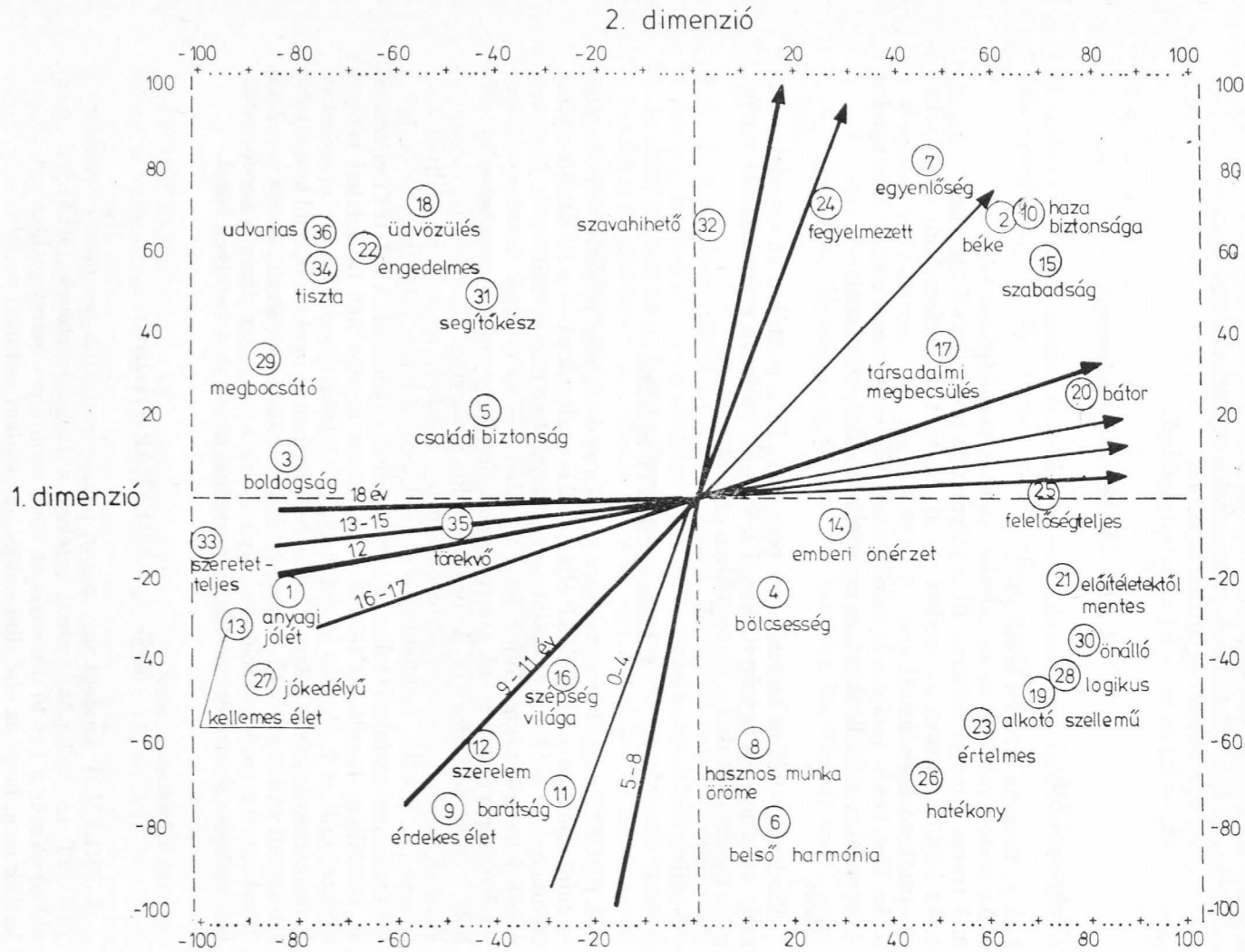
Minden modellhez tartozik egy pontábra. Ez a pontábra az egyedek valamely megfigyelési egységeit illeszti a vizsgált változók származtatott terébe, mint ideális pontokat a tér legjobban preferált helyén.

4. Példa a PROFIT eljárásra

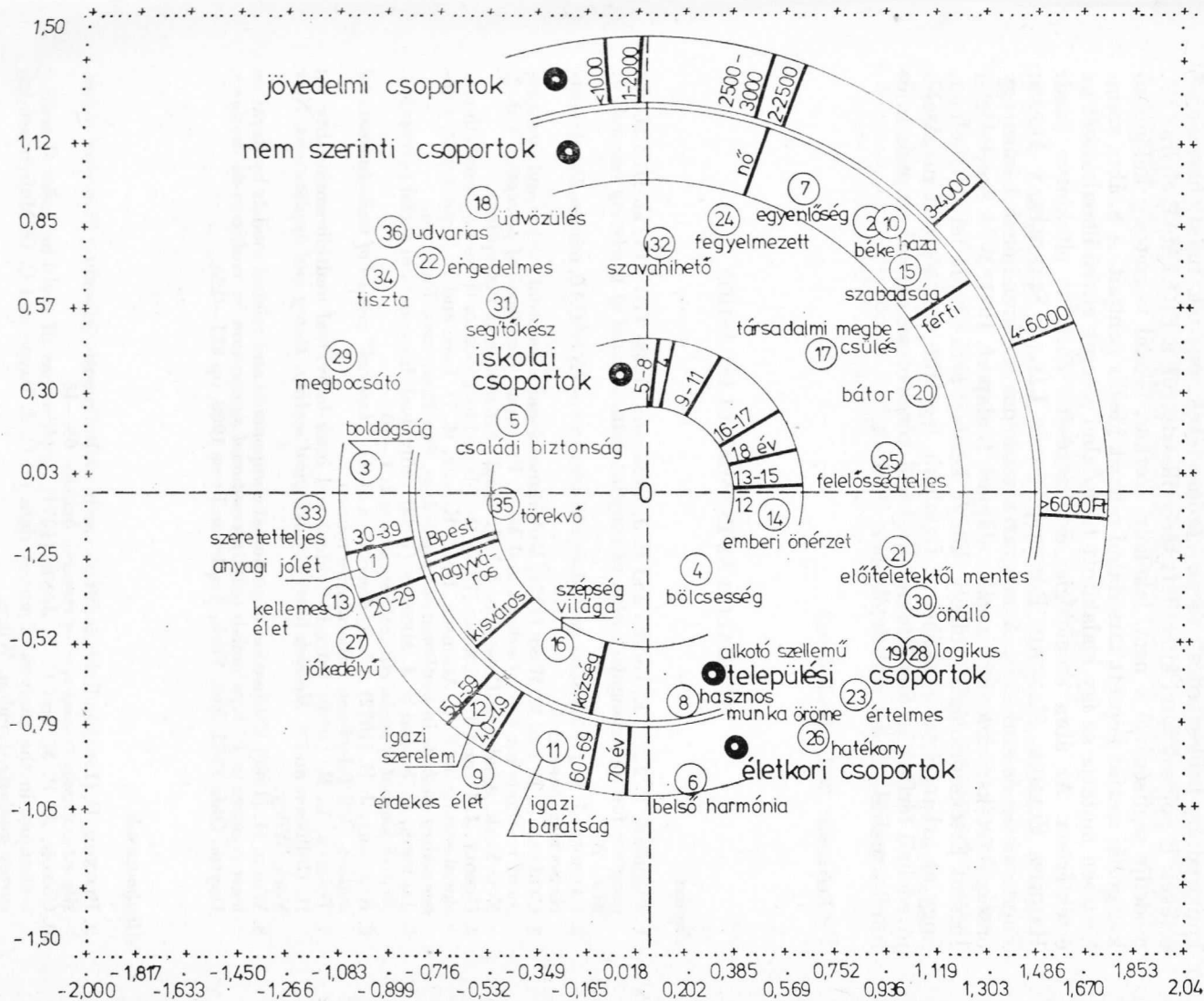
A PROFIT modell bemutatására szintén az értékteret választottuk. Ez a tér — mint ahogyan a PREFMAP eljárásnál is utaltunk rá — a MINISSA eljárás eredménye. A tér bizonyos sajátosságait korábban már felemlítettük. Most egy másik jellegzetességre hívjuk fel a figyelmet — az értéktér kettéhasadására. Az értéktérben az értékek két egymásra rímelő, egymással szembeforduló félhold ívén helyezkednek el. Az egyik oldalon a hagyományosabb (hagyományos közösségi, érzelmi és öröm) értékek, a másik oldalon a modernebb (individuális, autonómia, közélet, intellektuális és felelősség) értékek helyezkednek el, így a két értékmező tartalmát tekintve is szembenáll egymással. A PROFIT eljárással az iskolában, tanulással töltött évek száma szerint hét társadalmi réteget illesztettünk. A 7. ábrából kiolvashatjuk az iskolai rétegek közötti eltéréseket. Érdekes megfigyelni a rétegek különbözőségeiben az ugrásokat, ahol komolyabb értékrendi váltás sejthető. A tanulási idő növekedésével a rétegek egyre jobban illeszkednek a modernizációs tengelyhez, míg a kevés tanulással a konformitás, beilleszkedés kontra örömeértékek, harmónia tengelyhez kerülnek közel.

5. Példa a PREFMAP eljárásra

A PREFMAP modellt ugyanazon példán mutatjuk be, mint előzőekben a PROFIT modellt. Az emberi értékek axiológiai terének (MINISSA megoldás) először a két fő dimenzióját véve szemügyre összefoglalóan azt állapíthatjuk meg, hogy az első dimenzióra az „emberi autonómia, felelősség, racionalitás, közélet” és a „kellemesség, jólét, érzelmek, hagyományos kisközösség, beilleszkedés” pólusok a jellemzők. A második dimenzió két pólusa az „eszmék,



7. ábra. Társadalmi rétegek tengelyeinek illesztése a magyar értéktérbe: iskolai csoportok, profít eljárás, kétdimenziós megoldás



8. ábra. Társadalmi rétegek ideális preferencia tengelyei a magyar értékterben
 PREFMAP eljárás: kétdimenziós megoldás, (monoton illesztés).

konformitás, beilleszkedés” és az „örömeértékek, önérték tudat, harmónia” értékei. E pólusok által kifeszített térbe illesztettük a PREFMAP eljárás IV. modellje segítségével a nem, lakóhely, életkor, iskolai végzettség különböző kategóriái szerint képzett társadalmi rétegek ideális pontjait. A 8. ábra szemléletesen mutatja az így kialakított társadalmi rétegek eltérő illeszkedését az értéktérben. Az ábra szociológiai értelmezésétől elhelyütt eltekintve (lásd: HANKISS ELEMÉR, MANCHIN RÓBERT, FÜSTÖS LÁSZLÓ, SZAKOLCZAY ÁRPÁD: Folytonosság és szakadás. A magyar társadalom értékrendjének leírása egy országos értékszociológiai vizsgálat alapján, Budapest, 1981, MTA Szociológiai Intézet Értékszociológiai Műhely, könyv kézirat) arra hívjuk fel a figyelmet, hogy az urbanizáltabb lakóhelyű, fiatalabb, legalább érettségizett magasabb jövedelmű férfiak ideális értékrendje kerül közelebb az emberi autonómia és intellektualitás modernebb értékeihez. [8. ábra.]

(Beérkezett: 1982. február 5-én.)

IRODALOM AZ INDSCAL ELJÁRÁSHOZ

Elmélet

1. CARMONE, F. J., P. E. GREEN and P. J. ROBINSON (1968) TRICON: an IBM 360/65 program for the triangularisation of conjoint data. *Journal of marketing research*, 5: 219—20.
2. CARROLL, J. D. (1974) *Some methodological advances in INDSCAL*, mimeo, Psychometric Society, Stanford.
3. CARROLL, J. D. and M. WISH (1974) Multidimensional perceptual models and measurement methods in: E. C. Carteret and M. P. Friedman *Handbook of perception* Vol. 2, New York, Academic Press (Ch. 5 Individual Differences in Perception).
4. CAROLL, J. D. and J. J. CHANG (1975) Models and methods for three way multidimensional scaling in: R. C. Atkinson, D. H. Krantz, R. D. Luce and P. Suppes (eds) *Contemporary methods in mathematical psychology*, San Francisco, Freeman.
5. JACKSON, D. N. and S. J. MESSICK (1963) Individual differences in social perception. *British journal of social clinical psychology* 2: 1—10.
6. KRUSKAL, J. B. (1972) *A brief description of the "classical" method of multidimensional scaling*. Bell Telephone Laboratories mimeo.
7. TUCKER, L. R. (1960) Intra-individual and inter-individual multidimensionality in: H. Gulliksen and S. Messick (eds) *Psychological scaling: theory and applications*. New York, Wiley.
8. WOLD, H. (1965) Estimation of principal components and related models by iterative least squares in P. Krishnaiah (ed) *International symposium on multivariate analysis*. Dayton Ohio 1965. New York, Academic Press 1966, pp 391—420.

Alkalmazások

9. BLOXOM, B. (1965) Individual differences in multidimensional scaling *Princeton university educational testing service research bulletin* 68—45.
10. COXON, A. P. M. and C. L. JONES (1974) Applications of multidimensional scaling techniques in the analysis of survey data in: C. J. Payne and C. O' Muirheartaigh *survey analysis*. London, Wiley.
11. HORAN, C. B. (1969) Multidimensional scaling: combining observations when individuals have different perceptual structure. *Psychometrica* 34 (2, pt. 1) 139—165.
12. JONES, L. E. and F. W. YOUNG (1971) *A longitudinal individual differences scaling of the L. L. Thurstone psychometric laboratory*. University of N. Carolina, L. L. Thurstone Psychometric Lab.

13. WISH, M. and J. D. CARROLL (1974) Applications of individual differences scaling to studies of human perception and judgment in: Carteret and Friedman *Handbook of perception* Vol. 2, *psychophysical judgment and measurement*. New York, Academic Press.

IRODALOM A PROFIT ELJÁRÁSHOZ

1. CHANG, J.—CARROLL, J.: *How to use PROFIT, a computer program for property fitting by optimizing nonlinear correlation*. Murray Hill, New Jersey, Bell Laboratories (1964)
2. CARROLL, J.—CHANG, J.: A general index of nonlinear correlation and its application to the program of relating physical and psychological dimensions. *American psychologist* 1964, 19, 540
3. MILLER, J.—SHEPARD, R.—CHANG, J.: An analytical approach to the interpretation of multidimensional scaling solutions. *American psychologist*, 1964, 19, 579—580
4. NEUMAN, J.: Distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance. *AM. MATH. Statist*, 1941, 12, 367—395