VÖRÖS JÓZSEF

Pénzbefektetés-kombinációk vizsgálata

I. Bevezetés

Tekintsünk a gazdaságban egy beruházót, kinek n pénzbefektetési helye van. Egységnyi tőke után az i-edik ($i = 1, \ldots, n$) helyről ξ_i nagyságú hozama származik. ξ_i valószínűségi változó a_i várható értékkel ($M(\xi_i) = a_i$; $a_i > 1$).

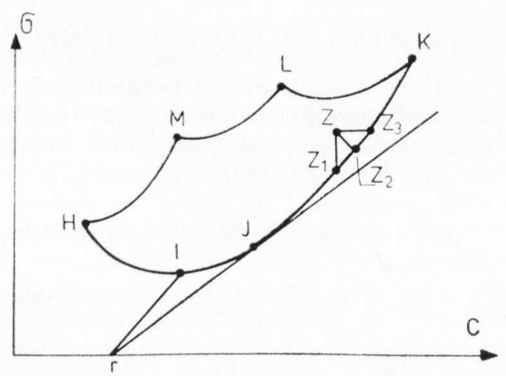
Legyen cov $(\xi_i, \xi_j) = v_{ij}$ és jelentse B a beruházó saját tőkéjét a tervperiódus elején, melyből a periódus végére η nagyságú hozamot szeretne elérni. A pénztömeg bármelyik helyre bármilyen arányban befektethető, ennek egy konkrét megvalósulását nevezzük pénzbefektetés-kombinációnak. Az η tőkeerő varianciáját jelölje σ^2, várható értékét pedig C. A pénzbefektetés-elmélet általában felteszi, hogy a beruházó csak ezen két utóbbi paraméter alapján cselekszik, tehát az alábbi típusú hasznossági függvénnyel rendelkezik:

$$U = f(C, \sigma).$$

mégpedig a beruházó előnyben részesíti azt a kombinációt, mely nagyobb tőkeerőt (hozamot) biztosít, $dU/dC > 0$, de ugyanakkor a beruházó kockázatérzékeny, így $dU/d\sigma < 0$.

A modell úgy tekinti tehát a beruházót, mint aki a rendelkezésre álló pénzbefektetés-kombinációk közül azokat választja ki, melyek maximalizálják hasznossági függvényét.

Egységnyi tőkét tekintve ($B = 1$), egy befektetés-kombinációnak a C, σ síkban egy pont feleltethető meg. Feltéve, hogy minden befektetési hely kockázatos ($v_{ii} > 0$!), a kombinációknak megfeleltethető pontok az 1. ábrán a HIJK vonalon és a fölött helyezkednek el [11].



1. ábra

A beruházó akkor és csak akkor tekint hatékonynak egy pénzbefektetés-kombinációt, ha nincs másik alternativa

— ugyanakkora C-vel és kisebb σ-val,
— ugyanakkora σ-val és nagyobb C-vel,
— magasabb C-vel és kisebb σ-val.

Az 1. ábrán a Z nem hatékony, mert többek között a Z_1, Z_2, Z_3 pontoknak megfelelő kombinációk dominálják. A hatékony kombinációk így a HIJK íven foglalnak helyet.

TOBIN [14]-ben megmutatta, hogy ebben az esetben a beruházó hasznosságfüggvényének megfelelő indifferens görbék a (C, σ) síkban konkávok. MARKOWITZ [7]-ben az optimális kombináció kiválasztására ez alapján az alábbi menetet javasolja:

— meg kell állapítani az egyes pénzbefektetési helyek valószínűségi paramétereit,
— meg kell határozni a hatékony kombinációk halmazát,
— ebből ki kell választani a beruházó hasznossági függvényét maximalizáló kombinációt.

E tanulmány ezen hármas tagolás második lépcsőjében megfogalmazott problémával foglalkozik, melyet pénzbefektetés-kombináció analízisnek is neveznek (portfolio analysis). Feltételezve, hogy a ξ_i-k normális eloszlásúak, *Markowitz* a hatékony kombinációk előállítására az alábbi kvadratikus programozási feladatot vezette be:

$$\Phi = \{\lambda C - \sum_i \sum_j v_{ij} x_i x_j\} \to MAX$$
$$\sum x_i = 1$$
$$\sum a_i x_i = C \tag{1}$$
$$x_i \geq 0; \; i = 1, \ldots, n,$$

hol

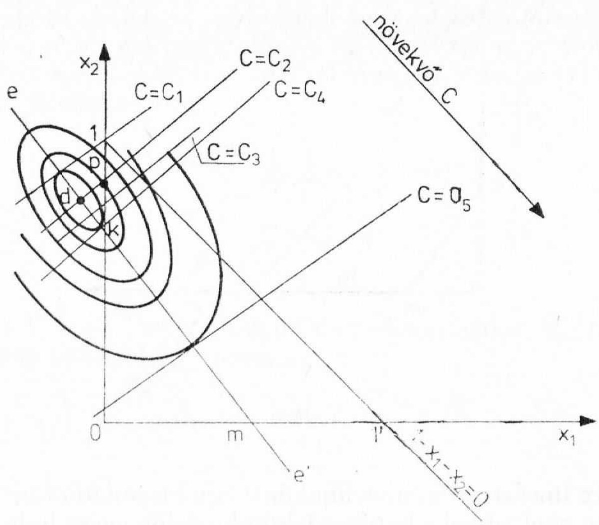
λ : paraméter,
x_i: az i-edik helyre befektetett pénzmennyiség aránya az egész tőkéhez.

Legyen most $n = 3$. Az $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ feltételből $x_3 = 1 - x_2 - x_1$, így az x_1, x_2 síkban a lehetséges megoldások halmazát a tengelyek és az $1 - x_2 - x_1 = 0$ egyenes által közbezárt háromszög belső és határ pontjai adják. Az η varianciáját az alábbi három módon fejezhetjük ki:

$$\sigma^2 = \sum_i \sum_j v_{ij} x_i x_j = v_{11} x_1^2 + v_{22} x_2^2 + v_{33} x_3^2 + 2v_{12} x_1 x_2 + 2v_{13} x_1 x_3 + 2v_{23} x_2 x_3.$$

Alkalmazva az $x_3 = 1 - x_2 - x_1$ helyettesítést, átrendezés után kapjuk, hogy

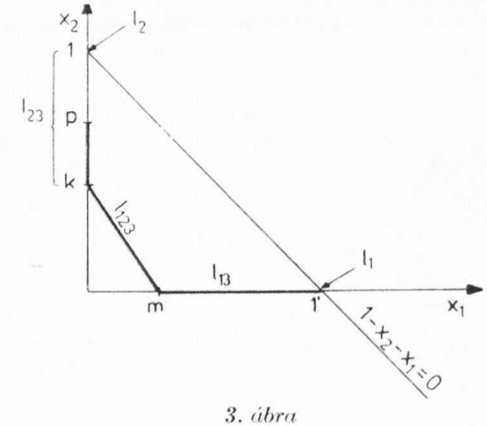
$$\sigma^2 = x_1^2(v_{11} - 2v_{13} + v_{33}) + x_2^2(v_{22} - 2v_{23} + v_{33}) + 2x_1 x_2(v_{12} - v_{13} - v_{23} + v_{33}) + \\ + 2x_1(v_{13} - v_{33}) + 2x_2(v_{23} - v_{33}) + v_{33}. \tag{2}$$



2. *ábra*

Adott σ^2 szinteket véve a kovariancia-variancia mátrix pozitív definit volta mellett (2) az x_1x_2 síkban ellipszisek egyenlete. A 2. ábra egy lehetséges esetet reprezentál, ahol az 101' háromszög és belső határpontjai a lehetséges megoldásokat adják.

A minimális varianciával rendelkező kombináció nem megengedett tartományban van (ezt a d pontnak megfelelő koordináták adják). Az x_2 tengelyt $[1, k]$ intervallumban metsző C által adott megoldások nem hatékonyak, mivel ugyanakkora σ^2 értékhez a $C = C_4$ egyenesektől az x_1 tengely irányában magasabb C szintek tartoznak. Az első hatékony — és egyúttal minimális σ^2 nagysággal rendelkező-kombinációt a k pont adja. Ebben a pontban $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, $x_1 = 0$, és természetesen fennáll, hogy $x_2 + x_3 = 1$. Az x_2 tengely mentén a k pontig kell haladni, ugyanis a C_2 és C_4 egyenesek között elhelyezkedő egyenesek nem megengedett tartományban érintik az ellipsziseket és a $[p, k]$ szakaszt metsző ellipszisek adják a legkisebb varianciát. A haladási irány a k pontban megváltozik, mivel az érintési pontok megengedett tartományba kerülnek, és adott C szintekhez ezek mutatják a minimális varianciát. Az ee' egyenest *Markowitz* kritikus vonalnak nevezte el, s módszere innen kapta a „kritikus vonal módszere" elnevezést. A kritikus vonalon az m pontig haladhatunk, a haladási irányban itt ismét törés áll be mert az érintési pontok ismét nem megengedett tartományba kerülnek. Az optimális megoldáshoz tartozó szakaszokat a 3. ábra mutatja. Az x_2 tengely 1 pontjában $x_2 = 1$, és $x_1 = x_3 = 0$, s jelöljük ezt az esetet l_2-vel, arra utalva, hogy most csak a második változó pozitív. Ha l-nek csak egy indexe van, az mindig egy pontot jelenthet az $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ kikötés miatt. Az x_2 tengely $[1, k]$ szakaszának belső pontjaiban $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ és $x_1 = 0$, s jelöljük ezt az esetet l_{23}-mal, mivel a második és harmadik változó pozitív, és természetesen $x_2 + x_3 = 1$. A $[k, m]$ szakasz belső pontjaihoz l_{123} tartozik, az $[m, 1']$ szakasz belső pontjaihoz l_{13}, míg az 1' ponthoz l_1. Látható tehát, hogy az egyes szakaszok belső hatékony pontjait elő lehet állítani a szakasz végpontjainak („sarok kombi-



3. ábra

nációk") konvex lineáris kombinációjaként. Így elegendő ezen „sarok kombinációk" ismerete, melyekkel a hatékony kombinációk egész halmaza lefedhető. Két szomszédos sarok kombináció ezek szerint mindig egy változó pozitivitásátban különbözik.

Markowitz kritikus vonal algoritmusát nagyméretű feladatok esetén nem tekintik hatékonynak, de eddig az (1) alatti alapprobléma bizonyos irányú specializálásával sikerült csak hatékonyabb eljárást kidolgozni. Ezek közül kiemelkedik SHARPE [10]-ben közölt eljárása, mely „diagonális" vagy „index" modell néven vált ismertté. Az indexmodell feltételezi, hogy valamennyi befektetési hely hozama egy általános index — mint pl. GNP vagy valamely árindex, stb. — függvényeként írható fel. Tehát:

$$a_i = A_i + B_i I + C_i,$$

ahol

A_i és B_i paraméterek,
C_i: valószínűségi változó zéró várható értékkel,
I : egy bizonyos indexnek a szintje.

ELTON—GRUBER—PADBERG [4]-ben a hozamok között konstans korrelációt feltételezve mutatnak be egy hatékony eljárást. E tanulmány az (1) alatt megfogalmazott alapprobléma megoldására mutat be egy új módszert. Ez az eljárás akkor tekinthető hatékonynak, ha az alapfeladatra egy bizonyos feltétel fennáll. Belátható, hogy ezen feltételnek a problémák széles köre eleget tesz. Az eljárás explicit módon megadja a változók optimális értékeit, valamint a $C \to \min \sigma^2$ függvénykapcsolatot a sarok kombinációk között. A függvénykapcsolatból megállapítható, hogy a $\sigma^2(C)$ szakaszonként differenciálható konvex függvény.

A pénzbefektetés-elmélet megmutatta, hogy a tőkepiac nem csak kockázatérzékeny beruházókból áll; következésképp szükséges a teljes $\{C, \sigma^2(C)\}$ halmaz feltérképezése. BAWA [1]-ben megmutatta, hogy ez a min $\sigma^2(C)$ függvényből (1. ábrán HIJK ív), egyetlen helyre befektetett „kombinációkból", és legfeljebb két helyre befektetett kombinációkból áll (1. ábrán a KLMN ívek).

A fedezet nélküli eladások fogalmának bevezetése (a fogalom meghatározását lásd SAMUELSON: Közgazdaságtan (KJK 1976) c. könyvében) lehetővé tette az x_i változók előjelkötetlenségét. MERTON [8]-ban az (1) alatti problémának az alábbit feleltette meg:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j v_{ij}x_ix_j \rightarrow \text{MIN}$$

$$\sum a_ix_i = C \tag{3}$$

$$\sum x_i = 1.$$

Feltéve, hogy a $\mathbf{V} = [v_{ij}]$ mátrix szigorúan pozitív definit, Merton megmutatta, hogy a hatékony befektetések halmazát a

$$\min \sigma^2 = \frac{C^2F - 2CD + E}{EF - D^2} \tag{4}$$

függvény adja, ahol

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{M} = [m_{ij}],\ F = \mathbf{1}^*\mathbf{M}\mathbf{1}\,,\quad \mathbf{a}^* = [a_1, \ldots, a_n]$$

$$E = \mathbf{a}^*\mathbf{M}\mathbf{a},\ D = \mathbf{1}^*\mathbf{M}\mathbf{a}. \tag{5}$$

Mivel gazdaságunknak nem jellemzője a fedezet nélküli eladások esete, modellünk definiálásában a változók előjelére megkötést kell tennünk. Megmutatható, hogy a (4) függvény az $x_i \geq 0$ $(i = 1 \ldots n)$ kikötés mellett szakaszonként érvényben marad az optimális megoldásban pozitív változók rendszerére.

A pénzbefektetés-elmélet egy másik széles körben alkalmazott feltevése, hogy a beruházó korlátozás és kockázatviselés nélkül azonos kamatláb mellett kölcsönt adhat és kölcsönt vehet. TOBIN [14]-ben megmutatta, hogy a döntési folyamat ekkor két lépcsőből áll:

- elő kell állítani a hatékony kombinációk halmazát,
- ebből mindig egyértelműen kiválasztható egy optimális kombináció.

Tekintsük ugyanis újra az 1. ábrát. A beruházó r nagyságú fajlagos hozamot kockázatviselés nélkül elérhet [$r = 1 +$ (kamatláb)/100)], ha tőkéjét fix kamatozású letétbe helyezi. Ha hozamát növelni akarja, pénzének egy részét kockázattal járó helyre, illetve kombinációba kell fektetnie, mert csak ezek után jár magasabb hozam. Tegyük fel, hogy beruházónk az I pontnak megfelelő kombinációba fekteti pénzösszegének egy részét, és akkor az rI egyenesen mozog; ez viszont nem lehet optimális hely számára, ugyanis létezik egy jobb befektetés: ha nem elégszik meg az r hozammal, a J pontnak megfelelő kombinációba kell fektetnie pénzének egy bizonyos részét, ugyanis az rI egyenesen levő pontok valamennyi más pontot dominálnak (pl. az I pont által adott C értéket kisebb kockázat mellett állítja elő az rJ egyenes által meghatározott pont). A beruházó optimumát az a pont határozza meg, amelyben preferencia függvénye érinti az rJ egyenest. Ha ez a J pontban van, a beruházó teljes vagyonát a J pontot deifináló kombinációnak megfelelően fekteti be. Ha a beruházó a J pontnak megfelelő C hozamtól még magasabb szintet akar elérni, hitelt kell felvennie, de természetesen pénzét ugyanolyan arányban fekteti be mint ahogy azt a J pontban tette. MERTON [8]-ban analitikusan is bizonyítja ezt az összefüggést és megadja az rJ egyenes egyenletét;

$$|C - r| = \sigma\sqrt{Fr^2 - 2Dr + E}. \tag{6}$$

Megmutatható, hogy ez az összefüggés a nem-negativitási kikötés mellett is érvényben marad a pozitív változók rendszerére, ha a beruházó tervét a felvehető hitel korlátja nem akadályozza. Ha a beruházó a teljes hitelkeretet kimeríti, akkor a hatékony kombinációk halmazát ismét parabolikus összefüggés írja le.

Egy újabb feltétel bevezetésével, amikoris feltesszük, hogy a tőkepiacon valamennyi beruházó egyformának ítéli az egyes pénzbefektetési helyek valószínűségi paramétereit, a SHARPE [11], LINTNER [6], MOSSIN [9]-féle tőkeár modellekhez jutunk, melyek függvényszerű összefüggést állapítanak meg a befektetési hely hozama és kockázati szintje között. Ezen összefüggéseket a pénzbefektetés-elmélet legnagyobb eredményének tartják. Megmutatható, hogy a MOSSIN által adott egyenlet azonos tartalmú a MERTON által [8]-ban adott egyenlettel.

Megemlítendő, hogy a pénzbefektetés-elméletben fontos szerepet játszanak a „kölcsönös pénzalap"-okkal kapcsolatos tételek. (Lásd [3] és [8]-ban.)

Hogy az egyes pénzbefektetési helyek hozamai normális eloszlásúak, az irodalomban sokan vitatják, pl. BAWA és CHAKRIN [2]. Ők lognormális eloszlásra határozzák meg a hatékony kombinációkat leíró függvényt, valamint a változók optimális értékét. A változókra adott nemnegativitási kikötés mellett a normális eloszlásra kapott eredmények könnyen adaptálhatók a lognormális esetere is.

II. A hatékony kombinációk halmaza, amikor valamennyi befektetési hely kockázatos

A modell megfogalmazásánál az alábbi feltételezésekkel élünk:

F1: A beruházó U hasznossági függvényének tulajdonsága, hogy $dU/dC > 0$, és $dU/d\sigma < 0$, a beruházó tehát kockázatérzékeny.

F2; A befektetési helyek hozamai normális eloszlásúak a_i várható értékkel és $v_{ii}(> 0!)$ szórással.

F3: A kovariancia-variancia (szimmetrikus) mátrix nemszinguláris, ezért pozitív definit.

F4: A vizsgált gazdaságban fedezetlen eladások nem lehetségesek: a befektetés nagyságát mutató változó nem lehet negatív.

F5: A beruházó tőkéje tetszőlegesen felosztható a befektetési helyek között.

Ekkor a hatékony kombinációk halmazát a következő, B-ben és C-ben paraméteres kvadratikus programozási feladat optimális megoldása adja:

$$x_i \geq 0; \qquad i = 1, \ldots, n \tag{7a}$$

$$\sum x_i = B \tag{7b}$$

$$\sum a_i x_i = C \tag{7c}$$

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 = -\left\{\frac{1}{2}\sum\sum v_{ij} x_i x_j\right\} \to MAX \tag{7d}$$

ahol

B : a befektetni szánt saját tőke nagysága,
C : a befektetésből a tervperiódus végére várt hozam nagysága,
v_{ij}: az i-edik és j-edik befektetési helyek fajlagos hozamai közötti kovariancia,
x_i : az i-edik helyre befektetendő pénzmennyiség,
a_i : az i-edik befektetési hely fajlagos hozamának várható értéke,
$\sum\sum v_{ij}x_ix_j$: a befektetett pénztőkéből várt hozam varianciája.

Legyen

$$I^+ = \{i \mid F\sum_j m_{ij}a_j - D\sum_j m_{ij} > 0\},$$

$$I^- = \{i \mid F\sum_j m_{ij}a_j - D\sum_j m < 0\},$$

$$I^0 = \{i \mid F\sum_j m_{ij}a_j - D\sum_j m_{ij} = 0\} = \overline{I^- \cup I^+},$$

valamint a továbbiakban: $\sum_j m_{ij} = g_i$, $\sum_j a_jm_{ij} = h_i$,

ahol $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{M} = [m_{ij}]$ és (5)-nek megfelelően $F = \sum g_i$, $D = \sum h_i$, $E = \sum h_ia_i$.

1. *tétel*: Legyenek érvényesek az F1—F5 kikötések, továbbá, hogy $\mathbf{a} \neq \lambda\mathbf{1}$. A (7) feladatnak rögzített B mellett akkor és csak akkor létezik olyan (C_0, C_1) nyílt intervalluma, melyben minden változó pozitív, ha fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$g_ph_q < h_pg_q \text{ minden } p \in I^-\text{- és } q \in I^+\text{-re,} \tag{8a}$$

$$Dh_i - Eg_i < 0 \text{ minden } i \in I^0\text{-re.} \tag{8b}$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha rögzített B mellett létezik olyan C ($B \cdot \max\{a_i\} > C > B \cdot \min\{a_i\}$) melyben minden változó pozitív, akkor (8) fennáll.

Tekintsük a (7) feladathoz tartozó

$$\Phi(x_i, u_j) = -\frac{1}{2}\sum\sum v_{ij}x_ix_j + u_2(B - \sum x_i) + u_3(C - \sum a_ix_i) \tag{9}$$

Lagrange függvényt és ennek megfelelően [13], illetve [5] alapján a Kuhn—Tucker (továbbiakban KT) feltételeket:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = -\sum_j v_{ij}x_j - u_2 - a_iu_3 \leq 0; \quad i = 1, \ldots, n \tag{10a}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_2} = B - \sum x_i = 0 \tag{10b}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u_3} = C - \sum a_ix_i = 0 \tag{10c}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \cdot x_i = 0; \; i = 1, \ldots, n \tag{10d}$$

$$x_i \geq 0; \quad i = 1, \ldots, n. \tag{10e}$$

Legyen most C olyan pont, amelyben valamennyi változó pozitív; (10d) feltételek miatt ekkor a (10a) feltételek egyenlőség formájában teljesülnek. Mivel F3 alapján $\mathbf{V}$ mátrix nem szinguláris, a (10b)-nak megfelelő

$$-\mathbf{V}\mathbf{x} - \mathbf{1}u_2 - \mathbf{a}u_3 = 0 \tag{11}$$

egyenletrendszerből – ahol $\mathbf{x}^* = [x_1, \ldots, x_n]$, $\mathbf{a}^* = [a_1, \ldots, a_n]$ –, a $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{M} = [m_{ij}]$ mátrixszal történő szorzás után kapjuk, hogy

$$x_i = -u_2 g_i - u_3 h_i; \; i = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Ezek felhasználásával adódik, hogy

$$\sum x_i = -u_2 \sum g_i - u_3 \sum h_i, \quad \text{és}$$

$$\sum a_i x_i = -u_2 \sum h_i - u_3 \sum h_i a_i,$$

melyeket az (5)-ben bevezetett jelölések felhasználásával az alábbi formában írhatjuk:

$$\sum x_i = -u_2 F - u_3 D$$

$$\sum a_i x_i = -u_2 D - u_3 E. \tag{13}$$

Ezeket a (10b–c) feltételekbe helyettesítve adódik, hogy

$$B + u_2 F + u_3 D = 0 \tag{14}$$

$$C + u_2 D + u_3 E = 0. \tag{15}$$

Az F pozitív mivel $\mathbf{V}$ pozitív definit és így $\mathbf{M}$ is. (14)-ből ezért

$$u_2 = -\frac{B + u_3 D}{F}.$$

Ezt (15)-be helyettesítve és rendezve kapjuk:

$$u_3(EF - D^2) = -(FC - DB). \tag{16}$$

Megmutatható, hogy a $(D^2 - EF)$ kifejezés az

$$f(\lambda) = (\mathbf{a} + \lambda\mathbf{1})^* \mathbf{M} (\mathbf{a} + \lambda\mathbf{1}) = F\lambda^2 + 2\lambda D + E$$

másodfokú függvény diszkriminánsa. Ebből következik, hogy az $\mathbf{M}$ pozitív definit volta miatt a $(D^2 - EF)$ akkor és csak akkor zéró, ha $\mathbf{a} = -\lambda\mathbf{1}$, egyébként

$$EF - D^2 > 0.$$

Feltevésünk mellett (hogy $\mathbf{a} \neq \lambda\mathbf{1}$) (14–15)-nek tehát egyértelmű megoldása van, mégpedig

$$u_3 = -\frac{FC - DB}{EF - D^2} \tag{17}$$

$$u_2 = -\frac{EB - DC}{EF - D^2}. \tag{18}$$

Ezeket (12)-be visszahelyettesítve a változók optimális értékeit kapjuk:

$$x_i = \frac{EB - DC}{EF - D^2} g_i + \frac{FC - DB}{EF - D^2} h_i; \quad i = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Mivel minden változó pozitív, továbbá $(EF - D^2) > 0$, (19)-ből következik, hogy

$$(EB - DC)g_i + (FC - DB)h_i > 0; \; i = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Ezeket rendezve kapjuk, hogy

$$C(Fh_i - Dg_j) > B(Dh_i - Eg_i); \quad i = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

Egyrészt ha most $i \in I^0$, minden ilyen i-re fennáll, hogy $(B > 0)$

$$Dh_i - Eg_i < 0,$$

másrészt a $q \in I^+$ és $p \in I^-$ indexekre a

$$B \frac{Dh_q - Eg_q}{Fh_q - Dh_q} < C < B \frac{Dh_p - Eg_p}{Dh_p - Dg_p} \tag{22}$$

egyenlőtlenség áll fenn, melyből a nevezőkkel történő átszorzás után adódik, hogy

$$(D^2 - EF)g_p h_q > (D^2 - EF)h_p g_q, \tag{22a}$$

s ebből — tekintve, hogy $(EF - D^2) > 0$ — adódik a kívánt eredmény.

Abból, hogy a (19—22a) egyenlőtlenségek ekvivalensek következik, hogy a (8) feltételek elégségesek is.

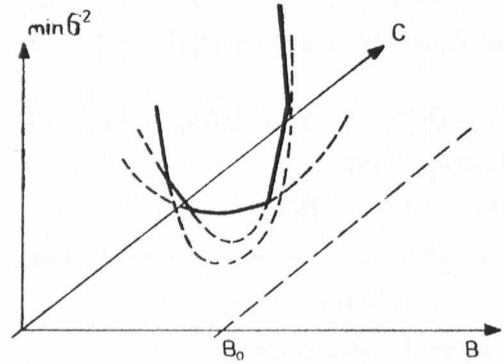
(22) alapján belátható, hogy a maximális intervallumot, melyben valamennyi változó pozitív, az alábbi előírások adják:

$$\begin{aligned} C_1 &= \min_{p \in I^-} \left\{ B \frac{Dh_p - Eg_p}{Fh_p - Dg_p} \right\} \\ C_0 &= \max_{q \in I^+} \left\{ B \frac{Dh_q - Eg_q}{Fh_q - Dg_q} \right\}. \end{aligned} \tag{23}$$

Ebben az intervallumban a $C \to \min \sigma^2$ leképezést is megadhatjuk; szorozzuk meg ugyanis (11) mindkét oldalát az $\mathbf{x}^*$ vektorral, valamint alkalmazva u_2- és u_3-ra a (17—18)-ban kapott értékeket adódik, hogy

$$\min \sigma^2 = \min \mathbf{x}^* \mathbf{V} \mathbf{x} = \frac{EB^2 - 2DBC + FC^2}{EF - D^2}. \tag{24}$$

B-t is változónak tekintve (24) elliptikus paraboloid és a hatékony kombinációk halmazának egy részhalmazát határozza meg, ugyanis az összefüggés addig érvényes, míg valamennyi változó pozitív. A pozitív változók rendszerére azonban (24) mindig érvényes és így adott $B > 0$ értékeket véve a hatékony kombinációkat meghatározó min $\sigma^2(C)$ függvény szakaszonként konvex és egy-egy ívét (24) írja le (4. ábra). Ha a nemnegativitási feltételtől eltekintünk, akkor (24) minden B- és C-re a hatékony kombinációkat írná le; ebből viszont következik, hogy adott $B > 0$ értéket véve a nemnegativitási feltétel mellett a hatékony kombinációkat leíró $\min \sigma^2(C)$ függvény szakaszonként differenciálható konvex függvény.



4. ábra

Adott $C = C^0 > 0$ esetén a (24) függvény B-ben ugyanúgy viselkedik mint C-ben ($E > 0$), tehát a $\min \sigma^2(C^0, B)$ függvény is konvex és parabola ívekből tevődik össze. Ebből két dolog következik:

— a (7) alatti problémát $B = 1$ feltétel mellett is lehet általános esetként kezelni, mivel a $\min \sigma^2(C^0, B)$ függvény minimum pontja — legyen ez B_0 — az egyedüli hatékony alternatíva, tekintve, hogy $B > B_0$ és $B < B_0$ esetben $\min \sigma^2(C^0, B) > \min \sigma^2(C^0, B_0)$. (24)-ben B helyére egyet írva Merton (4) alatti összefüggését kapjuk, mely nemnegativitási feltétel hiányában minden C-re érvényes;

— a $\min \sigma^2(C, B)$ függvény konvex és elliptikus paraboloid darabokból tevődik össze.

Térjünk most vissza (16)-hoz és tegyük fel, hogy $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{1}$. Ekkor $EF - D^2 = 0$, és a feladatnak csak akkor lesz megoldása, ha $(DB - FC) = 0$. D és F (5) alatti definíciója alapján ez csak akkor áll fenn, ha

$$a \cdot B = C, \tag{25}$$

ahol $\lambda = a = a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

u_3 így meghatározatlan és (14)-ből

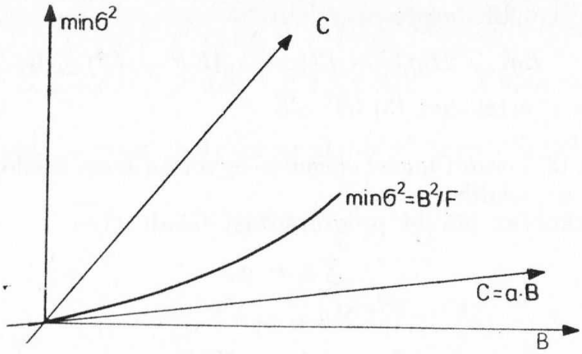
$$u_2 = -\frac{B + u_3 D}{F}.$$

Ezek felhasználásával adódik, hogy

$$x_i = g_i B/F; \; i = 1, \ldots, n \text{ és}$$

$$\min \sigma^2 = B^2/F. \tag{26}$$

(26)-ból következik, hogy az optimális megoldásban az „aktív" változókhoz tartozó inverzmátrix-sor összege nem lehet negatív; az optimális megoldás szerkezete C-től és B-től független; a hatékony kombinációkat egy konvex parabola írja le (5. ábra).



5. *ábra*

Annak szemléltetésére, hogy egyenlő hozamok esetén sem triviális a döntési probléma, tekintsük a következő pénzbefektetési feladatot; legyen $a_1 = a_2 = 2$; $B = 1$ és ezért $C = 2$, valamint

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \text{ melyből } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

M eleget tesz tehát a (26)-ból eredő feltételnek (nincs negatív sorösszege).

A programozási feladat formája;

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0,$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 = 2$$

$$\{x_1^2 + 2x_2^2\} \to MIN.$$

Az optimális megoldás (26) alapján ($F = 1{,}5$):

$$x_1 = 1(1/1{,}5) = 0{,}67; \; x_2 = 0{,}5(1/1{,}5) = 0{,}33;$$

$$\min \sigma^2 = 1/1{,}5 = 0{,}67.$$

Tetszőleges $B > 0$ esetén az optimális megoldás:

$$x_1 = 0{,}67B; \; x_2 = 0{,}33B; \; \min \sigma^2 = B^2/1{,}5.$$

Tekintsük ismét az $\mathbf{a} \neq \lambda\mathbf{1}$ esetet és tegyük fel, hogy rögzített B esetén mind a C_0-t mind C_1-et egyetlen index adja, azaz mind C_0-ban mind C_1-ben csak egy változó válik zérussá. Ez nem jelent gyakorlatilag megszorítást, mivel inszignifikáns szinten – ha pl. két ilyen változó van – egyik változó értéke megváltoztatható. Legyen ez a két index q_0 illetve p_0. A változók folytonossága miatt a $C < C_0$ és a $C > C_1$ intervallumoknak mindig van tehát olyan C_1-gyel kezdődő, illetve C_0-lal végződő intervalluma, melyekben a (9) alatti Lagrange függvény úgy veszi fel szélső értékét, hogy abban $x_{q_0} < 0$, illetve $x_{p_0} < 0$, míg a többi változó értéke pozitív.

Segédtétel: Ha $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ $n \times n$-es szimmetrikus pozitív definit mátrix, és az n elemű $\mathbf{a}$ vektor komponensei nem mind azonosak ($\mathbf{a} \neq \lambda\mathbf{1}$), akkor minden

$i = 1, \ldots, n$-re fennáll, hogy;

$$Eg_i^2 - 2Dg_ih_i + Fh_i^2 - m_{ii}(EF - D^2) \leq 0; \tag{27}$$

ahol az E, D és F értékeket (5) írja elő.

Bizonyítás: A (27) összefüggést elegendő egyetlen sorra (oszlopra) megmutatni, s legyen ez az n-edik sor.

Tekintsük ekkor az alábbi programozási feladatot:

$$\begin{gathered} \sum x_i = g_n \\ \sum a_ix_i = h_n \\ \sigma_n^2 = \mathbf{x}^*\mathbf{V}\mathbf{x} \to MIN; \end{gathered} \tag{28}$$

$$(\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{M} = [m_{ij}];\ g_n = \sum m_{nj};\ h_n = \sum m_{nj}a_j).$$

A (28) feladat csak a (7a) előjelmegkötésben különbözik a (7) feladattól, ezért az optimális célfüggvényértéket adó (24) összefüggés mindig érvényes (28)-ra. Ennek megfelelően;

$$\min \sigma_n^2 = \frac{Eg_n^2 - 2Dg_nh_n + Fh_n^2}{EF - D^2}. \tag{29}$$

(28)-nak az $x_i^0 = m_{ni}$, $i = 1, \ldots, n$, lehetséges megoldása, a hozzátartozó célfüggvényérték pedig $m_{nn} \cdot (\mathbf{x}^{0*}\mathbf{V}\mathbf{x}^0 = \mathbf{e}_n^*\mathbf{x}^0 = m_{nn})$. Ezért

$$\frac{Eg_n^2 - 2Dg_nh_n + Fh_n^2}{EF - D^2} \leq m_{nn},$$

majd $(EF - D^2)$-tel szorozva mindkét oldalt, nullára redukálás után $i = n$-re a (27) alatti összefüggés adódik.

2. *tétel*: A (7) feladatra teljesüljenek a (8) alatti feltételek, továbbá n legyen az az egyedüli index, melyre

$$C_0 = B\frac{Dh_n - Eg_n}{Fh_n - Dg_n} > B \cdot \min\{a_i\}.$$

Ekkor a $C \leq C_0$ intervallumban a (7) feladat optimális megoldásában $x_n = 0$.

Bizonyítás: Azt kell megmutatni, hogy van olyan $(C_{-1}, C_0]$ intervallum melyben a

$$\begin{gathered} \sum x_i = B \\ \sum a_ix_i = C \\ x_n = 0 \\ -\frac{1}{2}\mathbf{x}^*\mathbf{V}\mathbf{x} \to MAX \end{gathered} \tag{30}$$

feladat optimális megoldása kielégíti a (10) alatti KT feltételeket, mégpedig úgy, hogy $x_i > 0$; $i = 1, \ldots, n - 1$. A (30) feladathoz a

$$\Phi = -\frac{1}{2} \sum \sum v_{ij} x_i x_j + u_2(B - \sum x_i) + u_3(C - \sum a_i x_i) + u_4(-x_n)$$

Lagrange függvény tartozik, melyhez az alábbi elsőrendű feltételek tartoznak:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = -\sum_j v_{ij} x_j - u_2 - u_3 a_i = 0; \quad i = 1, \ldots (n-1), \tag{31a}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = -\sum_j v_{nj} x_j - u_2 - u_3 a_n - u_4 = 0, \tag{31b}$$

$$\sum x_i = B \tag{31c}$$

$$\sum a_i x_i = C \tag{31d}$$

$$x_n = 0. \tag{31e}$$

A (7) feladat megoldásmenetéhez hasonlóan (31a—b)-ből

$$x_i = -u_2 g_i - u_3 h_i - u_4 m_{in}; \; i = 1, \ldots, n. \tag{32}$$

(31e) feltétel miatt (32) alapján

$$-u_2 g_n - u_3 h_n - u m_{nn} = 0,$$

melyből **M** pozitív definit volta miatt

$$u_4 = \frac{-u_2 g_n - u_3 h_n}{m_{nn}}. \tag{33}$$

(31b)-ből látható, hogy a (31) egyenletrendszer adta megoldás kielégíti a (10) alatti KT feltételeket, ha $u_4 \leq 0$ és $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n - 1$. C_0-ban $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n - 1$, és csak $x_n = 0$, a változók folytonossága miatt ezért elegendő belátni, hogy u_4 nem pozitív.

(32)-ből kapjuk, hogy

$$B = \sum x_i = -u_2 F - u_3 D - \frac{g_n}{m_{nn}} (-u_2 g_n - u_3 h_n), \tag{34}$$

$$C = \sum a_i x_i = -u_2 D - u_3 E - \frac{h_n}{m_{nn}} (-u_2 g_n - u_3 g h_n). \tag{35}$$

(34)-ből kapjuk, hogy

$$u_2 \left(\frac{g_n^2}{m_{nn}} - F \right) = B + u_3 D - \frac{g_n h_n}{m_{nn}} u_3. \tag{36}$$

Mivel tudjuk, hogy a (30) feladatnak létezik egyértelmű megoldása (pl. a $C_0 > B \cdot \min \{a_i\}$ pontban) ezért:

$$u_2 = \left(B + u_3 D - u_3 \frac{g_n h_n}{m_{nn}} \right) : \left(\frac{g_n^2}{m_{nn}} - F \right),$$

melyet (35)-be helyettesítve kapjuk, hogy:

$$u_3 = \frac{FC - DB - \dfrac{g_n^2}{m_{nn}} C + \dfrac{g_n h_n}{m_{nn}} B}{D^2 - EF + E\dfrac{g_n^2}{m_{nn}} - 2D\dfrac{g_n h_n}{m_{nn}} + F\dfrac{h_n^2}{m_{nn}}},$$

illetve

$$u_2 = \frac{EB - DC + \dfrac{g_n h_n}{m_{nn}} C - \dfrac{h_n^2}{m_{nn}} B}{D^2 - EF + E\dfrac{g_n^2}{m_{nn}} - 2D\dfrac{g_n h_n}{m_{nn}} + F\dfrac{h_n^2}{m_{nn}}}.$$

Ezeket az értékeket (33)-ba helyettesítve

$$u_4 = \frac{(EB - DC)g_n + (FC - DB)h_n}{(EF - D^2)m_{nn} - Eg_n^2 + 2Dg_nh_n - Fh_n^2} m_{nn}. \tag{37}$$

A segédtételből és az egyértelműségből következik, hogy a nevező pozitív; — az m_{nn} szintén. (37) számlálója nem más mint az x_n változó számlálója, melyről tudjuk, hogy C_0-ban zéró és $C < C_0$-ra negatív, tehát u_4 csak C_0-ban zéró, $C < C_0$-ra negatív, azaz teljesülnek a KT feltételek.

Adott B érték mellett az algoritmus menete így tehát az alábbi:

— eldöntjük, hogy van-e C-re megoldása a (20) alatti egyenlőtlenségrendszernek. Ha van, jelöljük ezt az intervallumot (C_0, C_1)-gyel. Ha nincs, algoritmusunknak nincs előnye a Markowitz algoritmussal szemben;

— azt az alternatívát melyhez tartozó változó a C_0-ban zéró, a rendszerből elhagyjuk. A problémát így visszavezettük az alapproblémára, s megkeressük azt a C_{-1} értéket, melyre a $(C_{-1}, C_0]$ intervallumban a visszamaradt változók mindegyike pozitív. C_{-1}-ben újabb változó lesz zéró, azt ismét elhagyjuk, s az eljárást addig folytatjuk, míg a $C = \min\{a_i\} \cdot B$ pontba nem érünk;

— visszatérünk a C_1 ponthoz, melyben valamelyik változó zéró. Ezt a rendszerből elhagyjuk és az előbbi pontnak megfelelően megkeressük a $C_2, C_3, \ldots$ értékeket. Ezt addig folytatjuk, míg a $C = \max\{a_i\} \cdot B$ ponthoz nem érünk.

Illusztrációként tekintsük MARKOWITZ [7]-ben definiált feladatát. Ennek megfelelően legyen $B = 1$,
$\mathbf{a}^* = [0{,}062;\ 0{,}146;\ 0{,}128]$, valamint

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}0146 & 0{,}0187 & 0{,}0145 \\ 0{,}0187 & 0{,}0854 & 0{,}0104 \\ 0{,}0145 & 0{,}0104 & 0{,}0289 \end{bmatrix}.$$

Ezekből

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 196{,}119 & -32{,}38 & 86{,}75 \\ -32{,}38 & 17{,}59 & 9{,}92 \\ 86{,}75 & 9{,}92 & 74{,}56 \end{bmatrix},$$

$g_1 = 250{,}49 \qquad h_1 = 18{,}54$
$g_2 = -4{,}87 \qquad h_2 = 1{,}83$
$g_3 = 171{,}22 \qquad h_3 = 16{,}37.$

továbbá $F = 416{,}84$; $D = 36{,}735$; $E = 3{,}51$.

A (20)-nak megfelelő egyenlőtlenségrendszerhez szükséges kifejezések értékei:

$$Fh_1 - Dg_1 = -1475{,}25; \qquad Dh_1 - Eg_1 = -198{,}3$$
$$Fh_2 - Dg_2 = 941{,}73; \qquad Dh_2 - Eg_2 = 84{,}32$$
$$Fh_3 - Dg_3 = 533{,}79; \qquad Dh_3 - Eg_3 = 0{,}36.$$

Ezekből:

$$C < 0{,}1344$$
$$C > 0{,}0895$$
$$C > 0{,}00067.$$

A (0,089536; 0,13442) intervallumban mindhárom változó pozitív, az algoritmus alkalmazható tehát a Markowitz-féle feladatra. Ebben az intervallumban a változók optimális értékei:

$$x_1 = -1475{,}25C + 198{,}3; \; x_2 = 941{,}73C - 84{,}32; \; x_3 = 533{,}79C - 0{,}36.$$

valamint (24) alapján:

$$\min \sigma^2_{l_{1,2,3}} = 0{,}03 - 0{,}643C + 3{,}64C^2.$$

A $C_0 = 0{,}089536$ pontban $x_2 = 0$. Ha a $C < C_0$ intervallumban nem az x_2 változót állítjuk zéróra, hanem pl. x_3-t, akkor a

$$\min \sigma^2_{l_{1,3}} < \min \sigma^2_{l_{1,2}}$$

reláció mindig fennáll a $C < C_0$ intervallumban ugyanis az l_{12} eset nem elégíti ki a KT feltételeket. Következésképpen az x_2-nek a $C \leq C_0$ intervallumban zéró értéke kell legyen.

Hagyjuk el a rendszerből a második alternativát, ekkor $\mathbf{a}^* = [0{,}062; 0{,}128]$, és

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}0146 & 0{,}0145 \\ 0{,}0145 & 0{,}0289 \end{bmatrix}.$$

Ezekből

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 134{,}29 & -66{,}25 \\ -66{,}25 & 66{,}71 \end{bmatrix},$$

és $F = 68{,}49$; $E = 0{,}5575$; $D = 4{,}277$.

(24) alapján:

$$\min \sigma^2_{l_{13}} = 0{,}028 - 0{,}4298C + 3{,}44C^2,$$

és mivel két változónk van, a (20)-nak megfelelő egyenlőtlenségrendszer megoldása nélkül is tudjuk, hogy

$$C_{-1} = 0{,}062 = \min \{a_i\},$$

így az eljárást a $C > C_1$ intervallumban kell folytatni. A $C_1 = 0{,}13442$ pontban $x_1 = 0$, ezért az első befektetési alternativát a rendszerből elhagyjuk.

Ennek megfelelően $\mathbf{a}^* = [0{,}146;\ 0{,}128]$,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}0854 & 0{,}0104 \\ 0{,}0104 & 0{,}0289 \end{bmatrix}.$$

Ezekből

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 12{,}25 & -4{,}4 \\ -4{,}4 & 36{,}18 \end{bmatrix},$$

$F = 39{,}63;\ D = 5{,}21;\ E = 0{,}6893.$

$Fh_2 - Dg_2 = 7{,}61;\ Dh_2 - Eg_2 = 0{,}976$
$Fh_3 - Dg_3 = -7{,}65;\ Dh_3 - Eg_3 = -1{,}1125.$

Ezek alapján természetesen (mivel csak két változó van)

$$C > 0{,}128$$
$$C < 9{,}146.$$

Így a $[0{,}13442;\ 0{,}146]$ intervallumban

$$\min \sigma^2_{l_{23}} = 5{,}255 - 79{,}6C + 302{,}5C^2,$$

a változók optimális értékei pedig:

$$x_1 = 0;\ x_2 = 7{,}62C - 0{,}976;\ x_3 = -7{,}656C + 1{,}1125.$$

Számításainkat az alábbi táblában foglalhatjuk össze;

	Változók pozitivitása	Optimális célfüggvény
$C = 0{,}062$	l_1	$0{,}028 - 0{,}43\,C + 3{,}44\,C^2$
$0{,}062 < C \leq 0{,}0859$	l_{13}	
$0{,}0859 < C < 0{,}1344$	l_{123}	$0{,}031 - 0{,}64\,C + 3{,}56\,C^2$
$0{,}1344 \leq C < 0{,}146$	l_{23}	$5{,}255 - 79{,}6\,C + 302{,}5\,C^2$
$C = 0{,}146$	l_2	

Megjegyzendő, hogy az

$$Fh_q - Dg_q > 0 \text{ és } Fh_p - Dh_p < 0$$

tényből, ha mind g_p mind g_q pozitív, a (8) alatti feltételek mindig következnek (természetesen még más esetben is). Ehhez tekintsük még az alábbi pénzbefektetési problémát: $\mathbf{a}^* = [1;\ 1{,}1;\ 3]$, $B = 1$, és

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 1 & 0 \\ 1 & 2010 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ebből } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10{,}05 & -0{,}05 & 0 \\ -0{,}005 & 0{,}0005 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezekből $F = 20{,}045$; $D = 40{,}04$; $E = 100{,}94$. Az értékek ismeretében a (20) egyenlőtlenségrendszert megoldva adódik, hogy a $(2{,}99236;\ 3)$ intervallumban mindhárom változó optimális értéke pozitív, annak ellenére, hogy a második alternatíva varianciája több mint húszezer szerese az elsőének és hozama csak 10%-kal nagyobb.

III. A hatékony kombinációk halmaza, amikor egy befektetési hely kockázat nélküli

Gazdaságunkban mindig létezik ilyen hely: ez a fix kamatozású letét, tágabb értelemben a hitelfelvétel is. A pénzbefektetés-elmélet felteszi, hogy a beruházó azonos kamatláb mellett bármilyen összeget letétbe helyezhet és felvehet. *Merton* a fedezet nélküli eladás lehetőségét felhasználva a (6) alatti eredményhez jutott. A hazai gyakorlatot figyelembe véve az F1—F5 feltételek mellé vezessük be még a következő feltételeket:

F6: A beruházó korlátozás nélkül letétbe helyezheti pénzeszközeit, ugyanakkor legfeljebb A összegű hitelt vehet fel.

A letéti kamatláb a hitelkamatlábnál kisebb. Ennek következményeként a beruházó nem tesz letétbe pénzeszközt ha hitelt vesz fel, ellenkező esetben ugyanis vesztesége van.

A letéti eset és hitelfelvét eset így külön vizsgálható. Figyelembe véve, hogy letétbe bármilyen összeget helyezhet a beruházó, *Merton* (6) eredményét a nemnegativitási kikötéssel kiegészítve alkalmazhatjuk. Tekintsük ezért elsőként a hitelfelvét esetét.

Az F1—F6 alapján ezt az alábbi A-, B- és C-ben parametrikus kvadratikus programozási feladat fogalmazza meg:

$$z \geq 0,\ x_i \geq 0,\ i = 1\ldots, n \tag{38a}$$

$$z \leq A \tag{38b}$$

$$\sum x_i - z = B \tag{38c}$$

$$\sum a_i x_i - rz = C \tag{38d}$$

$$-\frac{1}{2}\sum\sum v_{ij}x_i x_j \rightarrow MAX, \tag{38e}$$

ahol az ismert változók és paraméterek mellett

z a felveendő hitel nagysága
A a maximálisan felhasználható hitelkeret
r a hitelkamatláb nagysága.

A feladathoz tartozó Lagrange függvény:

$$\Phi(x_i, z, u_j) = -\frac{1}{2}\sum\sum v_{ij}x_i x_j + u_1(A - z) + u_2(B + z - \sum x_i) +$$

$$+ u_3(C + rz - \sum a_i x_i),$$

melyhez a következő KT feltételek tartoznak:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = -\sum_j v_{ij}x_j - u_2 - u_3 a_i \leq 0;\ i = 1, \ldots, n \tag{39a}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -u_1 + u_2 + u_3 r \leq 0 \tag{39b}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} = A - z \geq 0 \tag{39c}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_2} = B + z - \sum x_i = 0 \tag{39d}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_3} = C + rz - \sum a_i x_i = 0 \tag{39e}$$

$$\sum \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} x_i + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z = 0 \tag{39f}$$

$$z \geq 0;\ x_i \geq 0;\ i = 1, \ldots, n \tag{39g}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1} u_1 \geq 0;\ u_1 \geq 0. \tag{39h}$$

Ismét tegyük fel, hogy a (38) feladatnak létezik olyan optimális megoldása, melyben minden változó pozitív. Ekkor ezen paraméterekre – mivel (39a) formailag azonos (10a)-val –,

$$x_i = -u_2 g_i - u_3 h_i;\ i = 1, \ldots, n, \tag{40}$$

továbbá ha (39d)- és (39e)-ben a $B + z = P$, illetve $C + rz = R$ helyettesítést alkalmazzuk, ezek formája azonos (10b–c)-vel. Következésképpen

$$u_2 = \frac{DR - EP}{EF - D^2},\quad u_3 = \frac{DP - FR}{RF - D^2},$$

ha az a_i-k között vannak különbözők.

Tegyük fel még e mellé, hogy $z = A$. Ekkor P és R konstansok, ezért

$$x_i = \frac{EP - DR}{EF - D^2} g_i + \frac{FR - DP}{EF - D^2} h_i;\ i = 1, \ldots, n. \tag{41}$$

Mivel A-ról megszorítás nélkül feltehető, hogy pozitív így $z = A$ esetben z is pozitív. Ezért (39f) miatt (39b) egyenlőség formájában áll fenn, melyből:

$$u_2 + u_3 r = \frac{DR - EP}{EF - D^2} + \frac{DP - FR}{EF - D^2} r = u_1 \geq 0.$$

Ebből következik, hogy fenn kell álljon az

$$(DR - EP) + (DP - FR)r \geq 0 \tag{42}$$

egyenlőtlenség.

Azon tartományokban melyre (42) fennáll és melyekben (41) minden i-re pozitív, a hatékony kombinációkat a

$$\min \sigma^2 = \frac{EP^2 - 2DPR + FR^2}{EF - D^2} \tag{43}$$

függvény határozza meg, mely a $(P, R) \to \min \sigma^2$ térben elliptikus paraboloid darab.

Legyen egy beruházónak 100 egységnyi tőkéje és $A = 40$ egységnyi hitelkerete 10%-os hitelkamatláb mellett ($r = 1{,}1$), továbbá három kockázatos befektetési lehetősége, melynek jellemzőit az **a** vektor és a **V** mátrix mutatja; $\mathbf{a}^* = [1{,}1;\ 1{,}3;\ 1{,}4]$,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}.$$

Ezekből

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ F = 17;\ D = 20{,}3;\ E = 24{,}47.$$

$P = 140$ esetben (41) minden i-re pozitív, ha

$$158 < R < 187{,}5,$$

mégpedig $R = 158$ esetben $x_3 = 0$, és $R = 186{,}5$ esetben $x_1 = 0$. (43) minimumát az

$$R_{\min} = \frac{DP}{F} = \frac{20{,}3 \cdot 140}{17} = 167{,}18$$

pontban veszi fel, ezért a hatékony kombinációk csak az $R \geq R_{\min}$ tartományban helyezkedhetnek el. Az optimális megoldást a 6. ábra szemlélteti.

A (42) feltétel értelmében azonban:

$$R(D - rF) \geq P(E - rD),$$

$$R \geq 187{,}25.$$

Az l_{123} eset éppen $R = 187{,}25$-ig áll fenn, melyben $x_1 = 0$. Töröljük ezért a lehetőségek közül az első alternatívát. Ekkor $E = 12{,}37$; $D = 9{,}3$; $F = 7$, s ezek felhasználásával újra az adódik (42)-be történő behelyettesítés után, hogy

$$R \geq 187{,}25.$$

Az l_{23} eset pedig $R = 140 \cdot 1{,}4 = 196$-ig áll fenn, ezért az esetnek megfelelő hatékony kombinációkat a 6. ábra l_{23}-mal jelölt íve mutatja.

Tegyük most fel, hogy $z < A$! Ekkor P és R a z változó függvényei és (39f) miatt (39b) egyenlőség formájában teljesül, továbbá (39h) miatt $u_1 = 0$. Így fennáll, hogy

$$u_2 + u_3 r = u_1 = 0.$$

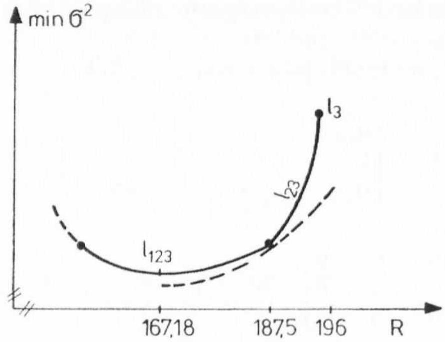
Ebbe az u_2 és u_3 értékeket helyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{D(C + rz) - E(B + z)}{EF - D^2} + r\frac{D(B + z) - F(C + rz)}{EF - D^2} = 0,$$

melyből

$$z = \frac{C(D - rF) - B(E - rD)}{r^2F - 2rD + E}, \tag{44}$$

ugyanis az $(r^2F - 2rD + E)$ kifejezés minden r-re pozitív mivel $(EF - D^2) > > 0$.



6. ábra

A z értékét u_2- és u_3-ba beírva, majd ezen u-kat x_i-kben felhasználva adódik, hogy

$$x_i = \frac{(C - rB)(h_i - rg_i)}{r^2F - 2rD + E}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

és a változók nemnegativitására tekintettel fenn kell, hogy álljon a

$$(C - rB)(h_i - rg_i) \geqq 0; \tag{45}$$

egyenlőtlenség minden $i = 1, \ldots, n$-re. A z nem negatív, ezért (44) alapján

$$C(D - rF) - B(E - rD) \geqq 0.$$

(43) alapján, mivel $P = B + z$ és $R = C + rz$, most

$$\min \sigma^2 = \frac{E(B + z)^2 - 2D(B + z)(C + rz) + F(C + rz)^2}{EF - D^2},$$

és z helyére a (44) eredményt írva, a számításokat elvégezve kapjuk:

$$\min \sigma^2 = \frac{(C - rB)^2}{r^2F - 2rD + E}, \tag{47}$$

és ebből

$$\min \sigma = \frac{|C - rB|}{\sqrt{r^2F - 2rD + E}}. \tag{48}$$

A várható hozam szórása lineáris függvénye tehát C-nek, és $B = 1$-et véve (48) azonos Merton (6) alatti eredményével. Az x_i-re adott képlet (lásd (45)) azt mutatja, hogy az optimális kombináció szerkezete C változtatására érzéketlen; következésképp (48) felfedéséhez elegendő egyetlen kombináció ismerete. Tekintsük ezért ismét a (24) alatti képletet, melyből

$$\min \sigma = \frac{\sqrt{EB^2 - 2DBC + FC^2}}{\sqrt{EF - D^2}}. \tag{49}$$

3. *tétel:* Álljanak fenn az F1 – F6 feltételek, továbbá legyen $u_1 = 0$. Ekkor ha $r < D/F$, akkor (48) hatékony felületen érinti a (49) függvényt; ha $r = D/F$, akkor (48) asszimptótája (49)-nek; ha pedig $r > D/F$, akkor (48) nem hatékony felületen érinti a (49) fügvényt.

Bizonyítás: A (49) felületnek a

$$(\min \sigma - \sigma_0) = \beta_1(B - B_0) + \beta_2(C - C_0)$$

egyenlet definiálta sík a (B_0, C_0, σ_0) pontjához tartozó érintősík, ahol

$$\beta_1 = \frac{EB_0 - DC_0}{\sqrt{EF - D^2}\sqrt{EB_0 - 2DB_0C_0 + FC_0^2}};$$

$$\beta_2 = \frac{FC_0 - DB_0}{\sqrt{EF - D^2}\sqrt{EB_0 - 2DB_0C_0 + FC_0^2}}.$$

Ha létezik olyan (B_0, C_0, σ_0), hogy a

$$\frac{|C - rB|}{r^2F - 2rD + E} = \beta_1(B - B_0) + \beta_2(C - C_0) + \sigma_0$$

egyenlőség minden (B, C)-re fennáll, akkor (48) érintősíkja (49)-nek. (48) hatékony felületét véve

$$\frac{C - rB}{r^2F - 2rD + E} = \beta_1 B + \beta_2 C - (\beta_1 B_0 + \beta_2 C_0 - \sigma_0),$$

mely minedn (B, C)-re akkor áll fenn, ha

$$\frac{EB_0 - DC_0}{\sqrt{EF - D^2}\sqrt{EB_0^2 - 2DB_0C_0 + FC_0^2}} = \frac{-r}{r^2F - 2rD + E} \tag{50a}$$

$$\frac{FC_0 - DB_0}{\sqrt{EF - D^2}\sqrt{EB_0^2 - 2DB_0C_0 + FC_0^2}} = \frac{1}{r^2F - 2rD + E} \tag{50b}$$

$$\sigma_0 = \beta_1 B_0 + \beta_2 C_0. \tag{50c}$$

(50c) fennáll. (50a)-t osztva (50b)-vel kapjuk, hogy

$$\frac{EB_0 - DC_0}{FC_0 - DB_0} = -r,$$

melyből ha $r \neq D/F$, akkor

$$C_0 = B_0 \frac{E - rD}{D - rF}. \tag{51}$$

Ezt (50a – b)-be visszahelyettesítve azonosságot kapunk így (48) a

$$C = B\frac{E - rD}{D - rF}$$

egyenes mentén érinti a (49) felületet. (48) nem hatékony felületét véve ugyanezt az eredményt kapjuk.

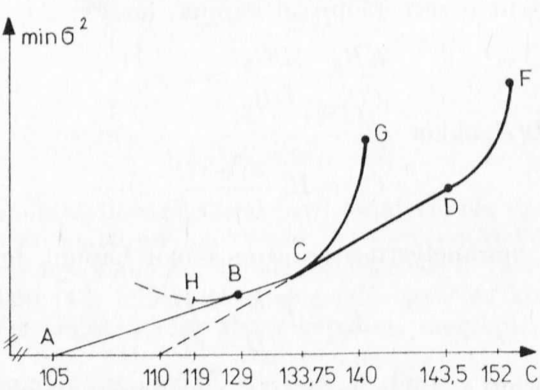
Ezekután könnyen belátható, hogy

- ha $r = D/F$, (48) asszimptótája (49)-nek,
- ha $r > D/F$, (48) nem hatékony felületen érinti (49)-et,
- ha $r < D/F$, (48) hatékony felületen érinti (49)-et,
- ha fennáll, (46) zéróval egyenlő.

Ezekután a beruházó számára elérhető összes hatékony kombinációt tartalmazó függvénykapcsolatot is fölfedhetjük. Ehhez tekintsük ismét az előző példát! $B = 100$ és $A = 0$ esetre az optimális megoldást az alábbi táblázat mutatja, ennek szemléltetését pedig a 7. ábra adja.

	Változók pozitivitása	F	D	E
		értéke		
$C = 110$	l_1			
$110 < C \leq 112{,}86$	l_{12}	15	17,5	20,55
$112{,}86 < C < 133{,}75$	l_{123}	17	20,3	24,47
$133{,}75 \leq C < 140$	l_{23}	7	9,3	12,37
$C = 140$	l_3			

Az l_{123} esetben a parabola minimumát a $C = 119$ érték adja, ezért a hatékony kombinációkat a $119 \leq C$ intervallum tartalmazza. Ha a beruházónak nem lenne hitelfelvételi lehetősége, a $HBCG$ íven mozogna. Hitelfelvétel esetén (51) felhasználásával adódik, hogy $C_0 = 133{,}75$; melyben már $x_1 = 0$, de a változók eleget tesznek a (45) és (20) alatti feltételeknek. Így a hatékony kombinációkat a 3. tétel értelmében megkapjuk, ha a 110 pontból (10%-os a hitelkamatláb!) kiindulva a min σ (133,75) ponthoz érintőt húzunk. A 7. ábrán ez a CD szakasz. D-ben $z = 40$, s ettől a ponttól kezdve a problémát felsőkorlátos esetként kell kezelni. Az előző feladat eredményeit felhasználva tudjuk, hogy az l_{23} ív a $187{,}5 \leq R < 196$ (lásd 6. ábra) intervallumban létezik. C-t megkapjuk, ha ezen intervallumot meghatározó két számból levonunk $40 + 0{,}1 \cdot 40 = 44$-et. Ekkor $143{,}5 \leq C < 152$. Ha nem tekintjük a fix kamatozású letéti lehetőséget, a beruházó mozgási terét tehát a $HBCDF$ vonal adja.



7. ábra

Tegyük fel, hogy a beruházónak lehetősége van arra, hogy tőkéjét korlátlanul letétbe helyezheti, s a kamatláb 5%-os ($r = 1{,}05$). Ismét (51) felhasználásával adódik, hogy $C_0 = 129$. A beruházó hatékony pénzbefektetési kombinációit így az $ABCDF$ vonal határozza meg. [Tegyük fel ugyanis, hogy $z < 0$ letétet jelent, és a letéti illetve hitel kamatláb azonos, azaz 5%-os. z előjelének kötetlensége nem befolyásolja az (51) alatti összefüggést, s az így adódó C_0 felhasználásával ($C_0 = 129$) értelemszerűen a $C < C_0$ intervallumot választjuk.]

Nézzük most azt, amikor $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$. Esetünkben (16)-nak az

$$u_3(EF - D^2) = DP - FR \tag{52}$$

egyenlőség felel meg, ahol most is $P = B + z$ és $R = C + rz$. Mivel $EF - D^2 = 0$, a feladatnak csak akkor lesz megoldása, ha $DF - FR = 0$, azaz fennáll, hogy

$$aP = R,$$

mely azonos az

$$a(B + z) = C + rz$$

egyenlőséggel.

Az u_3 így meghatározatlan, és

$$u_2 = -\frac{P + u_3 D}{F},$$

melyek felhasználásával adódik, hogy

$$x_i = g_i P/F; \; i = 1, \ldots, n, \text{ és}$$

$$\min \sigma^2 = P^2/F.$$

A fenti eredmények csak akkor érvényesek ha a $a > r$, más esetben a hitelfelvétel értelmetlen. Ha $a > r$, (39b)-ből az következik, hogy a felveendő hitel nagysága tetszőleges de nem nagyobb mint A.

Végül még egy összefüggés felírható (45) felhasználásával. Tekintsünk ugyanis egy pénzbefektetési kombinációt a CD szakaszon. Ekkor

$$\min \sigma_k^2 = \sum_i v_{ki} x_i = \sum_i v_{ki} \frac{C - rB}{r^2 F - 2rD + E}(h_i - rg_i) =$$

$$= (C - rB)(a_k - r)/(r^2 F - 2rD + E)$$

$$\min \sigma^2 = \sum_k x_k \sigma_k^2 = \sum_k x_k (C - rB)(a_k - r)/(r^2 F - 2rD + E).$$

Ezekből

$$(C - rB)\frac{\min \sigma_k^2}{\min \sigma^2} = a_k - r, \tag{53}$$

melyben B helyére 1-et írva a pénzbefektetés-elmélet jólismert összefüggését kapjuk, melyet tőkeár modellnek neveztek el (capital asset pricing model). E kutatási irány egyik megalapozója MOSSIN, kinek [9]-ben közölt eredménye tartalmát tekintve azonos (53)-mal.

(Mossin megmutatta, hogy minden j-re fennáll a

$$\lambda = \frac{a_j - p_j/q}{\sum_k v_{jk} x_k} \cdot \sqrt{\sum \sum v_{ij} x_i x_j} \tag{54}$$

összefüggés, ahol λ konstans, p_j a tőke egységnyi ára, $q = 1/r$ és x_j a j-edik befektetési hely részesedési aránya az össztőkén belül. Mivel (54) minden j-re fennáll következik, hogy

$$\frac{a_j - p_j/q}{\sum_k v_{jk} x_k} = \frac{a_i - p_i/q}{\sum_k v_{ik} x_k}$$

minden i- és j-re. Ezekből:

$$\frac{x_1(a_1 - p_1/q)}{x_1 \sum v_{1k} x_k} = \frac{x_2(a_2 - p_2/q)}{x_2 \sum v_{2k} x_k} = \ldots = \frac{x_n(a_n - p_n/q)}{x_n \sum v_{nk} x_k}$$

Alkalmazva az $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$ azonosságot adódik, hogy

$$\lambda = \frac{\sum x_j (a_j - p_j/q)}{\sum_j x_j \sum_k v_{jk} x_k} \cdot \sqrt{\sum \sum v_{ij} x_i x_j},$$

ami azonos a

$$\lambda = \frac{C - rB}{\sqrt{\sum \sum v_{ij} x_i x_j}} \tag{55}$$

kifejezéssel. (54)- és (55)-ből kapjuk, hogy

$$\frac{a_j - r}{\sum_k v_{jk} x_k} \sqrt{\sum \sum v_{ij} x_i x_j} = \frac{C - rB}{\sqrt{\sum \sum v_{ij} x_i x_j}},$$

melyből az (53) összefüggés közvetlenül adódik.)

E helyen is köszönöm kollégám, dr. Komlósi Sándor önzetlen segítségét, mellyel elősegítette a dolgozatban kimondott 2. tétel pontosítását.

(Beérkezett: 1982. május 7-én.)

IRODALOM

1. Bawa, V. S.: Admissible Portfolios for All Individuals, *The J. of Finance*, 1976. Sept. 31 (4); 1169—1183.
2. Bawa and Chakrin: Optimal Portfolio Choice and Equilibrium in a Lognormal Securities Market, *TIMS Studies in the Management Science*, 11, 1979, North-H.
3. Black, F.: Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing, *The J. of Business*, 45 (3), 1972, 445—455.
4. Elton—Gruber—Padberg: Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection with Upper Bounds, *Op. Res.* 25 (6), 952—967.
5. Krekó B.: *Optimumszámítás*, KJK, Bp. 1973.

6. LINTNER, J.: Security Prices, Risk, and Maximal Gains from Diversification, *The J. of Finance*, 20 (4), 587—615, 1968, March.
7. MARKOWITZ, H. M.: *Portfolio Selection*, John Wiley, N. Y. 1970.
8. MERTON, R. C.: An Analytic Derivation of the Efficient Frontier, *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 1972 Sept, 1851—1872.
9. MOSSIN, J.: Equilibrium in a Capital Asset Market, *Econometrica*, 34 (4), Oct. 1966.
10. SHARPE, W. F.: A Simplified Model for Portfolio Analysis, *Management Science*, 1963 Jan, 277—293.
11. SHARPE, W. F.: Capital Asset Prices, *The J. of Finance*, sept. 1964, 19 (3), 425—442.
12. SHARPE, W. F.: *Portfolio Theory and Capital Markets*, McGraw-Hill, 1970.
13. SZÉP J.: *Analízis*, KJK, Bp., 1966.
14. TOBIN, J.: Liquidity Preferences as Behaviour Toward Risk, *Review of Economic Studies*, Febr. 1958.

PORTFOLIO SELECTION

Chapter One of the paper gives a brief summary of previous results.

In Chapter Two the case is analyzed when short sales are not possible in the economy and, as a consequence, the variables of the parametric quadratic programming formulation of the economic problem must not take negative values. The first theorem gives an existence condition for such an interval of the parameters where all variables are positive. The well-known Markowitz-problem satisfies this constraint. Starting from this interval the efficient frontier functions may easily be found on the basis of the second theorem. Therefore, the paper is practically a generalization of Merton's result. The lemma to the second theorem draws attention to a matrix-algebraic relationship.

With the introduction of credits and deposits the fundamental problem is modified in Chapter Three in such a way that the available credit is limited from above. Using the algorithm developed in Chapter Two the efficient frontier function of the investor may be determined in any acceptable interval of the parameter values. Results are illustrated with numerical examples.

АНАЛИЗ КОМБИНАЦИЙ ВКЛАДА ДЕНЕГ

Первая глава статьи дает краткий итог предыдущих результатов.

Вторая глава анализирует тот случай, когда в экономике продажи без покрытия невозможны, а следовательно, переменные задачи параметрического квадратичного программирования данной экономической проблемы не могут принимать отрицательные значения. Первая теорема дает условия, при которых существует такой интервал параметров задачи, в котором все переменные положительные числа. Известная из литературы задача Марковица удовлетворяет этим условиям. Исходя из этого интервала, основываясь на второй теореме, легко обнаруживаются функции, описывающие эффективные комбинации. Поэтому статья по существу является обобщением результата Мертона. Вспомогательная теорема, принадлежащая ко второй теореме, обращает внимание на одну зависимость алгебры матриц.

В третьей главе основная проблема модифицируется путем введения кредитования и депозита, таким образом, что размеры кредита сверху ограничены. Во второй главе, с использованием разработанного расчетного способа функцию, определяющую эффективные комбинации для инвеститора можем написать во всех учитываемых интервалах.

Результаты иллюстрируются конкретными примерами.