FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

Paizs János

Gazdasági elemzés szimultán, dinamikus, lineáris, ökonometriai modellel

Az ökonometriai modellek a klasszikus döntési folyamat minden szakaszában szerepet játszhatnak és gyakorlati alkalmazásuk a különböző szakaszokban *szerves egység*et képez, mégis módszertani szempontból jól elkülöníthetők a *statisztikai* irányú, múltra vonatkozó alkalmazások (a gazdaság működésének leírása és elemzése) a *tervezésre* orientált, jövőre vonatkozó alkalmazásoktól (gazdasági előrejelzés, gazdaságpolitikai szimuláció). Az ökonometriai modellek statisztikai irányú alkalmazásai alapvetőek, minden további alkalmazás előzményét képezik, és ezekben az alkalmazásokban az ökonometriai modellek a gazdaság működése leírásának és elemzésének komplex statisztikai eszközei.

Jelen tanulmány célja, hogy bemutassa az ökonometriai modellek alkalmazásának lehetőségeit és mikéntjét a gazdaság működésének leírásában és elemzésében. A tanulmány három részből áll. Az I. részben kialakítjuk a leíró-elemző ökonometriai modellnek egy szigorúan kauzális alapon álló, konzisztens és komplett fogalomrendszerét,[1] amely logikai-tartalmi szempontból megalapozza a II. részben a gazdaság működésének leírását és az ettől el nem választható gazdasági elemzést, amelynek alapkérdéseit a III. rész tárgyalja.

I. Fogalmak

A gazdaság működésének leírását és elemzését valamely múltbeli, több részidőszakból álló időszakra, *az ún. megfigyelési időszakra* végezzük, amelyet a továbbiakban $[1, \ldots, T]$-vel vagy $t = 1, \ldots, T$-vel jelölünk.

[1] A leíró-elemző ökonometriai modell fogalmai az ökonometriaelmélet fejlődésének viszonylag korai szakaszában kialakultak és a klasszikus ökonometria képviselői — többé-kevésebb következetességgel — törekedtek mind a fogalmak kauzális megalapozására, mind a modell által leírt gazdaság összefüggéseinek kauzális magyarázatára pl. [9] vagy [15]. Jelen tanulmány szerzőjét a rendkívül értékes [10] monográfia ösztönözte egy szigorúan kauzális alapon álló konzisztens és komplett fogalomrendszer kidolgozására, amely az ökonometriai modellek és valamennyi gyakorlati alkalmazásuk eredményének egzakt kauzális értelmezésére nyújt lehetőséget. A [10] monográfia és a jelen tanulmány kapcsolatáról meg kell jegyezni, hogy egyrészt az több szempontból általánosabb (pl. a nem-lineáris ökonometriai modelleket is tárgyalja), másrészt (sem nem-lineáris, sem lineáris ökonometriai modellre) nem ad kauzálisan megalapozott komplett fogalomrendszert.

A modell

A modell a gazdaság működésére vonatkozó, a folyó empirikus vizsgálattól független ismeretek *formalizált* megfogalmazása. Ezek az ismeretek az *ún. a priori információk*.

Az a priori információk arról tájékoztatnak, hogy

(a) *melyek a gazdaság folyamatainak* a folyó empirikus ökonometriai vizsgálat szempontjából lényeges és időben állandó vagy csak lassan változó *(stabil vagy kvázistabil) kauzális összefüggései*;

(b) *milyen szerepet játszanak az egyes folyamatok ezekben a kauzális összefüggésekben*, részletesebben

(ba) az egyes kauzális összefüggésekben mely folyamat játssza az okozat és mely folyamatok játsszák az okok szerepét;

(bb) az egyes okozatok létrehozásában mely okok szerepe alapvető és mely okok szerepe jelentéktelen;

(bc) az alapvető okok hatása az okozatokra egyidejű vagy időeltolódással (késéssel) érvényesül-e;

(bd) hogyan jellemezhető az egyes okozatok létrehozásában külön-külön jelentéktelen szerepet játszó változók együttes hatása;

(c) *milyen matematikai összefüggésekkel írhatók le az egyes kauzális összefüggések*.

Az a priori információk forrása lehet *valamely közgazdasági elmélet, korábbi empirikus ökonometriai vizsgálatok eredményei és munkahipotézisek*.[2] Az a priori információk csaknem kizárólag a gazdaság folyamatainak *közvetlen kauzális összefüggéseire* vonatkoznak és csaknem kizárólag *kvalitatív jellegűek*.

A strukturális egyenletrendszer

A gazdaság folyamatainak *közvetlen kauzális összefüggéseit* a strukturális egyenletrendszer írja le. Egy-egy strukturális egyenlet egy-egy gazdasági folyamat kauzális magyarázatát adja, ezért a strukturális egyenletrendszernek annyi független és ellentmondástól mentes egyenletből kell állnia, ahány gazdasági folyamat kauzális magyarázata a gazdaság működésének leírásához szükséges. Ha ez a feltétel teljesül, a modell komplett.

Az a priori információk alapján közvetlenül a strukturális egyenletrendszer fogalmazható meg, ezért szerepe kitüntetett: az *a modell egyenletrendszerének alapformája*, szemben a gazdaság folyamatainak közvetett összefüggéseit is ábrázoló származtatott formáival, a redukált és a végső egyenletrendszerrel szemben (Lásd II. rész!).

A strukturális egyenletek *tartalmi szempontból* lehetnek

(a) *magatartási egyenletek*, amelyek a gazdasági alanyok (döntési egységek) tevékenységét ábrázolják vagy

[2] Az, hogy valamely empirikus vizsgálat során a modell megfogalmazásakor az ökonométer milyen közgazdasági elmélet(ek)ből indul ki, illetve milyen munkahipotézisekkel él, tudományos meggyőződésétől, illetve a modellezett gazdaság működésére vonatkozó empirikus tapasztalataitól vagy gondolati elképzeléseitől függ. Ennyiben tehát az empirikus ökonométer a modellalkotás *aktív* szereplője. Lényeges azonban tudatosítanunk, hogy alkotása, a számszerűsített empirikus modell az alapjául szolgáló közgazdasági elmélet(ek), illetve munkahipotézisek bizonyítását nem nyújtja.

(b) *kísérő egyenletek*, amelyek a gazdasági alanyok tevékenységének természeti, technikai és jogi-institúcionális feltételeit írják le, végül

(c) *azonosságok* (definíciók vagy egyensúlyi feltételek).

A továbbiakban eltekintünk az utolsó típustól, amely a tárgyalást bonyolító több tulajdonsággal rendelkezik, de a gazdaság működésének leírása szempontjából új információt nem hordoz.

A strukturális egyenletek *formai szempontból* — analitikus alakjuk szerint — lehetnek *lineárisak vagy nem-lineárisak*. Ha a strukturális egyenletrendszer minden egyenlete lineáris, akkor a modell lineáris, ellenkező esetben nem-lineáris. További vizsgálódásunkat lineáris ökonometriai modellre korlátozzuk.

A modell további alkotóelemei

A gazdaság időben változó folyamatait a modell *változói* képviselik, e folyamatok időben állandó vagy csak lassan változó kauzális összefüggéseit a modell *állandói* jellemzik.

Változók

Az *egy-egy strukturális egyenletben* játszott kauzális szerepük szerint a változók lehetnek az okozatot képviselő *eredményváltozók* és az okokat képviselő *magyarázó változók*.

Egy-egy gazdasági folyamat (okozat) alakulásában általában nagyszámú folyamat (ok) játszik közvetlen szerepet, amelyek mindegyikének külön figyelembevétele a gazdaság működésének leírásánál nem lehetséges, de nem is szükséges. Egy-egy strukturális egyenletben az okozaton (eredményváltozón) kívül csak az okozat létrehozásában alapvető néhány okot (magyarázó változót) képviselnek *explicit változók*, a többit nem *(implicit változók)*.

Az explicit változók mérhetők és statisztikai úton közvetlenül *megfigyelhetők*. Statisztikai megfigyeléseik eredményei idősorok formájában állnak rendelkezésre.

Abban az esetben, ha az implicit változók hatása a strukturális egyenletrendszerben semmilyen módon nem jelenik meg, *a modell determinisztikus*, amely az elméleti közgazdasági vizsgálatok eszköze: kvalitatív jellegű premisszák alapján kvalitatív jlleegű következtetések levonására ad lehetőséget.

Egy-egy strukturális egyenletben a benne egyenként lényegtelen vagy nem-szisztematikus szerepet játszó implicit változók együttes hatását figyelembe vehetjük egy-egy *látens változó*val. A látens változók mérhetők, de — mivel külön nem is specifikált nagyszámú implicit változót foglalnak össze — *statisztikai úton nem figyelhetők meg*.

Minthogy a látens változók nagyszámú, véletlenszerűen alakuló implicit változó együttesét képviselik, *valószínűségi változók*. Ennek megfelelően, ha a strukturális egyenletekben a bennük szerepet játszó implicit változókat egy-egy látens változóval figyelembe vesszük, *a modell sztochasztikus:* a strukturális egyenletek sztochasztikus egyenletek.

További gondolatmenetünkben segítségünkre lehet két egyszerű, kizárólag illusztratív célú példa. Mindkét példánkat tőkés ország gyakorlatából vesszük: a modellezett „gazdaság" valamely termék szabadversenyes piaca, amelyen a termelést (kínálatot) forgalmi adó terheli.

1. *példa.* Ökonomméterünk — közgazdasági ismeretei alapján — feltételezi, hogy a forgalom volumene (q_t) is, a termék egységára (p_t) is a piac belső folyamataként alakul (és a forgalom volumenében a kereslet és a kínálat időről-időre egyensúlyba kerül), úgy, hogy a forgalom volumenét keresleti oldalról *alapvetően* a termék egységára, kínálati oldalról *alapvetően* a termék egységárának és a termékegységre jutó forgalmi adónak (s_t) a különbsége határozza meg. Ezeket a közgazdasági feltevéseit kiegészítve azzal a matematikai hipotézissel, hogy a kereslet, kínálat és meghatározó tényezőik kapcsolatai lineáris függvényekkel közelíthetők, a következő strukturális egyenletrendszerben formalizálhatja:

$$q_t = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + u_{1t} \qquad \alpha_1 < 0 \qquad (\text{„keresleti függvény''}) \qquad (1.1)$$

$$q_t = \beta_0 + \beta_1 (p - s)_t + u_{2t} \quad \beta_1 > 0 \qquad (\text{„kínálati függvény''}) \qquad (1.2).$$

Itt u_{1t} és u_{2t} a „keresletre", illetve a „kínálatra" ható egyéb tényezőket képviselő látens változók, α_0, α_1, β_0 és α_1 pedig a „kereslet", illetve a „kínálat" és alapvető meghatározóik kapcsolatát jellemző állandók.

Alakítsuk most át az (1.1)—(1.2) strukturális egyenletrendszert úgy, hogy az (1.1) egyenletből fejezzük ki p_t-t! Az eredmény a

$$p_t = \alpha_0' + \alpha_1' q_t + u_{1t} \qquad \alpha_1' < 0 \qquad (1.1.a)$$

$$q_t = \beta_0 + \beta_1 (p - s)_t + u_{2t} \qquad \beta_1 > 0 \qquad (1.2)$$

strukturális egyenletrendszer

Az (1.1.a)—(1.2) strukturális egyenletrendszer alapján látható, hogy az explicit változóknak egy-egy strukturális egyenletben játszott kauzális szerepük szerinti osztályozása nem ad képet ezeknek a strukturális egyenletrendszer egészében játszott kauzális funkciójáról: az (1.1.a) egyenletben p_t eredményváltozó, q_t magyarázó változó, ugyanakkor az (1.2) egyenletben q_t eredményváltozó, p_t pedig magyarázó változó!

A strukturális egyenletrendszer egészében és a megfigyelési időszak egészében játszott kauzális szerepük szerint az explicit változók körében megkülönböztetünk *endogén változókat*, amelyek mind az ok, mind az okozat szerepét betölthetik és közöttük kölcsönös összefüggések is lehetnek és *exogén változókat*, amelyek csak az okok éspedig egymástól független okok szerepét játsszák. Az endogén változók gazdasági folyamatokat, az exogén változók részben gazdasági, részben nem gazdasági folyamatokat képviselnek. Az endogén változók által képviselt gazdasági folyamatok a vizsgált gazdaság *belső* folyamatai, az exogén változók által képviselt gazdasági folyamatok a vizsgált gazdaságon *kívüli* folyamatok. Az exogén változók között kitüntetett szerepet játszanak a *gazdaságpolitikai változók*, amelyek központi gazdaságirányítási szervek közvetlen befolyása alatt állnak. 1. példánkban q_t és p_t endogén változók, s_t exogén változó, éspedig gazdaságpolitikai változó.

Megjegyezzük, hogy *a látens változók kauzális funkciója* megegyezik az exogén változókéval: a modell egészében és a megfigyelési időszak egészében csak az okok, éspedig egymástól és az exogén változóktól független okok szerepét játsszák.

A strukturális egyenletrendszerben ábrázolt *közvetlen* kauzális összefüggésekben valamely oknak az okozatra kifejtett hatása lehet egyidejű vagy időeltolódással (késéssel) érvényesülő.

Egy ok hatása *egyidejű*, ha változása és az okozat ebből következő változása a megfigyelési időszak ugyanazon részidőszakában játszódik le. Egyidejű hatás esetén a strukturális egyenletben az okozatot képviselő endogén változónak és az okot képviselő endogén vagy exogén változónak a megfigyelési időszak ugyanazon t részidőszakára vonatkozó, egyidejű értékei szerepelnek. (Vegyük észre, hogy 1. példánk strukturális egyenletrendszere egyidejű kauzális összefüggéseket ábrázol!)

Egy ok hatása *időeltolódással (késéssel) érvényesülő*, ha az oknak a megfigyelési időszak valamely t részidőszakában végbemenő változását az okozat ebből következő változása a megfigyelési időszak valameny későbbi $t + \tau$ ($\tau > 0$ és diszkrét) részidőszakban követi. Időeltolódással (késéssel) érvényesülő hatás esetén a strukturális egyenletben az okozatot képviselő endogén változónak a megfigyelési időszak t-edik időszakához tartozó, egyidejű értékével szemben az okot képviselő endogén vagy exogén változónak a megfigyelési időszak megfelelő korábbi $(t - \tau)$-adik részidőszakára vonatkozó késleltetett értéke áll ($\tau > 0$ és diszkrét). A *τ neve: késés.*

Attól függően, hogy egy-egy strukturális egyenletben valamely endogén vagy exogén változó t vagy $t - \tau$ ($\tau > 0$ és diszkrét) időszakhoz tartozó értéke szerepel-e, megkülönböztetünk *egyidejű és késleltetett endogén, illetve exogén változók*at.

Abban az esetben, ha az egyidejű endogén változók mind az ok mind az okozat szerepét betöltik és közöttük kölcsönös kauzális összefüggések is vannak, *a modell szimultán.*

1. példánk strukturális egyenletrendszerének (1.1.a)—(1.2) alakja alapján nyilvánvaló, hogy szimultán modell strukturális egyenletrendszere: a p_t és a q_t egyidejű endogén változók kauzális összefüggése kölcsönös.

Ha a strukturális egyenletrendszerben csak egyidejű endogén és (egyidejű vagy késleltetett) exogén változók szerepelnek, *a modell statikus*, amelynek strukturális egyenletrendszere az egyidejű endogén változókban *inhomogén lineáris egyenletrendszer*. (Vegyük észre, hogy 1. példánkban statikus modell strukturális egyenletrendszere szerepel!)

2. *példa*. Tulajdonképpen 1. példánk módosítása, „továbbfejlesztése". Feltevés szerint a forgalom volumenét keresleti oldalról *alapvetően* most is a termék egységárának egyidejű értéke, kínálati oldalról viszont más-más mértékben a termék egységára és a termékegységre jutó forgalmi adó különbségének egyidejű és egy időszakkal korábbi értéke határozza meg. Ezek a közgazdasági feltevések — kiegészítve azzal, hogy a kínálat és meghatározó tényezőik kapcsolatai lineáris függvényekkel közelíthetők — a következő strukturális egyenletrendszerben formalizálhatók:

$$q_t = \alpha_0 + \alpha_1 p_t + u_{1t} \qquad \alpha_1 < 0 \tag{1.3}$$

$$q_t = \beta_0 + \beta_1 (p - s)_t + \beta_2 (p - s)_{t-1} + u_{2t} \qquad \beta_1, \beta_2 > 0. \tag{1.4}$$

A szimbólumok jelentése megegyezik az 1. példában alkalmazottakéval.

Az (1.3) egyenletet az (1.1.a) analógiájára átrendezve könnyen belátható, hogy az (1.3)—(1.4) is szimultán modell strukturális egyenletrendszere.

Ha a strukturális egyenletrendszerben az egyidejű endogén változók és az (egyidejű vagy késleltetett) exogén változók mellett késleltetett endogén változók is szerepelnek, vagyis a késleltetett endogén változók az okok szerepében megjelennek, *a modell dinamikus*, amelynek strukturális egyenletrendszere az endogén változókban *inhomogén lineáris differencia-egyenletrendszer*. (Vegyük észre, hogy a 2. példánkban dinamikus modell strukturális egyenletrendszere szerepel!)

Az egyidejű endogén változókat y_{mt}-vel, a késleltetett endogén változókat — egy részidőszakos késést feltételezve — $y_{m,t-1}$-gyel, az exogén változókat z_{kt}-vel, a látens változókat u_{mt}-vel, a változók közvetlen összefüggéseit jellemző állandókat $\alpha_{m'm}$-mel, $\beta'_{m'm}$-mel és β_{km}-mel jelölve felírhatjuk a szimultán statikus és szimultán dinamikus modell „*elméleti*", konkrét közgazdasági tartalommal nem rendelkező változatát, éspedig

szimultán *statikus* modellre az

$$y_{1t} = \alpha_{21}y_{2t} + \beta_{11}z_{1t} + \beta_{31} + u_{1t} \tag{1.5}$$

$$y_{2t} = \alpha_{12}y_{1t} + \beta_{22}z_{2t} + \beta_{32} + u_{2t}, \tag{1.6}$$

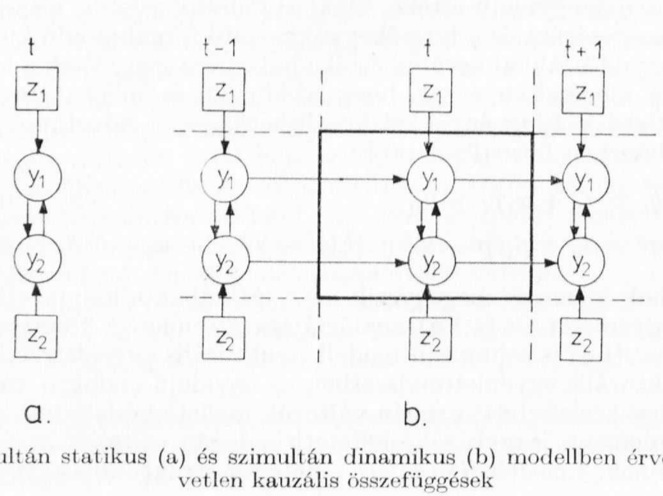
szimultán *dinamikus* modellre pedig az

$$y_{1t} = \alpha_{21}y_{2t} + \beta'_{11}y_{1,t-1} + \beta_{11}z_{1t} + \beta_{31} + u_{1t} \tag{1.7}$$

$$y_{2t} = \alpha_{12}y_{1t} + \beta'_{22}y_{2,t-1} + \beta_{22}z_{2t} + \beta_{32} + u_{2t} \tag{1.8}$$

formában, amelyekben ezen modelltípusok általános tulajdonságai tisztán vizsgálhatók. Az egyes modelltípusokban érvényesülő közvetlen kauzális összefüggések jól szemléltethetők az ún. Tinbergen-féle nyílsémával (1. ábra) a megfigyelési időszaknak statikus modell esetében egy, dinamikus modell esetében három részidőszaka alapján. (Az ábrázolásnál — az egyszerűség kedvéért — a „szabad konstansok"-tól és a látens változóktól eltekintünk.)

Az endogén és exogén változókat megkülönböztettük az explicit változóknak a modell egészében és *a megfigyelési időszak egészében* játszott kauzális szerepük szerint. A szimultán dinamikus modell strukturális egyenletrendszere és nyílsémája alapján nyilvánvaló, hogy a strukturális egyenletrendszer egészében, de *a megfigyelési időszak egy-egy t részidőszakában* az egyidejű endogén változókkal szemben a késleltetett endogén változók kauzális szerepe meg-



1. ábra. Szimultán statikus (a) és szimultán dinamikus (b) modellben érvényesülő közvetlen kauzális összefüggések egyezik az (egyidejű vagy késleltetett) endogén változókéval, így az utóbbiakkal együtt az (egyidejű) *endogén változókkal* szemben a *predeterminált változók* csoportját alkotják.[3]

Állandók, I

Az explicit változók közvetlen kauzális összefüggéseit jellemző állandók: a strukturális paraméterek és a késések. Közös jellemzőjük az explicit változókkal szemben, hogy bár mérhetők, statisztikai úton nem megfigyelhetők és a modell megfogalmazásakor általában ismeretlenek.

A strukturális paraméterek azt a *közvetlen* hatást mérik, amelyet az endogén vagy predeterminált jellegű magyarázó változók egységnyi növekedése az endogén jellegű eredményváltozókra egy-egy strukturális egyenletben a megfigyelési időszak egy-egy t részidőszakában kifejt.

Az általában ismeretlen strukturális paraméterek közül *a priori ismertek* az egyes strukturális egyenletekben (a) az okozat szerepét játszó endogén változóké; értékük 1; (b) okként nem szereplő endogén és predeterminált változóké; értékük 0.

A strukturális egyenletekben szereplő *késések* azt mérik, hogy a bennük ábrázolt közvetlen hatások *egyidejűleg vagy időeltolódással érvényesülnek-e*, s ha igen, milyen mértékű késéssel ($\tau \geq 0$).

Konkrét és „elméleti" modelljeinkben feltételeztük, hogy a késések időegységnyiek és egyszeresek. Ettől a tárgyalást egyszerűsítő feltételezéstől eltérő esetek is előfordulnak, ugyanakkor egyszerűsítő feltételezésünk az általánosság csökkentése nélkül megengedhető — s ennek megfelelően a további gondolatmenetünkben is követjük —, mivel a bonyolultabb esetek a változók „időtranszformáció"-jával mindig visszavezethetők erre az egyszerű esetre![4]

Az a priori ismeretlen strukturális paraméterek és késések értékét *a modell számszerűsítése* során határozzuk meg.

Lényeges tudatosítanunk, hogy a strukturális paraméterek zérus vagy zérustól különböző voltára és a késések mértékére vonatkozó feltevésekben *a modell közgazdasági hipotézisei* öltenek testet.

Közvetett kauzális összefüggések — a modell származtatott formái

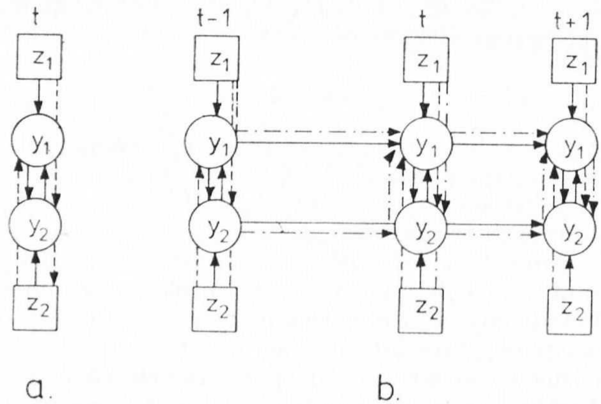
Az endogén változók a modell egészében és a megfigyelési időszak egészében mind az ok, mind az okozat szerepét betölthetik és amennyiben egyidejű vagy késleltetett értékeik ezt a kettős funkciót *be is töltik*, úgy *oksági hatásokat közvetítenek:* az okozat funkciójában „felvett" hatások egy részét (többszörösét) az ok funkciójában más (a többi) endogén változókra „továbbítják". Ennek megfelelően a modellben a közvetlen hatások mellett *közvetett hatások* is érvényesülhetnek, éspedig

(a) *szimultán modellben* az okok funkcióját betöltő egyidejű endogén változó közvetítésével *közvetett egyidejű hatások;*

(b) *dinamikus modellben* az okok funkcióját betöltő késleltetett endogén változók közvetítésével *közvetett késleltetett hatások.*

[3] A továbbiakban endogén változókon mindig egyidejű endogén változókat értünk és csak kivételesen — mondanivalónk pontos megértése érdekében — használjuk az „egyidejű" jelzőt.

[4] Bizonyítását lásd pl. [11]-ben vagy [14]-ben!



2. ábra. Szimultán statikus (a) és szimultán dinamikus (b) modellben érvényesülő közvetett kauzális összefüggések. (Jelölés: → közvetlen (egyidejű és késleltetett), - - → közvetett egyidejű, -·-→ közvetett késleltetett hatások.)

A további vizsgálódásaink tárgyát képező szimultán dinamikus modellben értelemszerűen a közvetett hatások mindkét típusa jelen van.

A modellben érvényesülő közvetett hatások a közvetlen hatásokat leíró strukturális egyenletrendszerben (a strukturális formában) nem jelennek meg: explicitté csak a modell származtatott formáinak, *redukált és végső formájának* előállításával válnak. A modellben érvényesülő közvetett hatások is jól szemléltethetők az ún. Tinbergen-féle nyílsémával (2. ábra).

A gazdaság működésének leírása

Ezt a későbbi gondolatmenetünkben központi jelentőségű fogalmat közelítsük meg a determinisztikus modellből kiindulva.

A modellben azokat a gazdasági folyamatokat, amelyek kauzális magyarázata a gazdaság működésének leírásához szükséges, *az* (egyidejű) *endogén változók* képviselik. *Determinisztikus modellben* ezeknek a megfigyelési időszak egy-egy részidőszakára vonatkozó *értékegyüttese* a gazdaság egy-egy állapotát jellemzi.

A gazdaság működésének leírása: az (egyidejű) endogén változók alakulásának kauzális magyarázata a modellben kauzálisan nem magyarázott, de statisztikai úton megfigyelhető *ún. változó adottságok* függvényében. Ezek az endogén változók alakulása szempontjából a modell egészében és a megfigyelési időszak egészében okok, éspedig *ún. végső okok*.

A strukturális egyenletrendszerben az okozatként szereplő endogén változók nemcsak a végső okok függvényében jelennek meg: benne szimultán statikus modell esetében egyidejű endogén változók is, szimultán dinamikus modell esetében egyidejű és késleltetett endogén változók is szerepelnek okként, amelyek ugyanakkor más strukturális egyenletekben vagy a megfigyelési időszak valamely korábbi részidőszakában maguk is okozatok. Így a strukturális egyenletrendszer a gazdaság működésének leírására önmagában nem elégséges, származtatott formáinak: a redukált és a végső egyenletrendszernek az előállítására is szükség van.

Megjegyezzük, hogy az (egyidejű) endogén változók alakulása szempontjából adottságok a változó adottságok változásának az egyidejű endogén változókra kifejtett hatását jellemző állandók is, ezek az *ún. állandó adottságok*, amelyek a strukturális egyenletrendszer állandóiból, a strukturális paraméterekből és a késésekből, a származtatott formák előállításával meghatározhatók. *Sztochasztikus modellben* az (egyidejű) endogén változók alakulása szempontjából a statisztikai úton nem megfigyelhető *látens változók is változó adottságok.*

Minthogy a látens változók valószínűségi változók, *az endogén változók is* – a látens változók függvényei lévén – *valószínűségi változók*. Az, hogy *az exogén változókat is valószínűségi változóknak tekintjük, konvenció*, amely anynyiban megalapozott, hogy az exogén változók (többsége) valamely más modellben endogén és így valóban valószínűségi változó.

A látens változóknak, mint változó adottságoknak a jelenléte miatt a sztochasztikus modellben a megfigyelhető változó adottságok egy-egy értékegyüttese az (egyidejű) endogén változóknak nem egy-egy értékegyüttesét, hanem egy-egy – a megfigyelhető változó adottságok egy-egy együttesére mint feltételre vonatkozó – *együttes feltételes eloszlását* határozza meg. Az endogén változóknak ezek az együttes feltételes eloszlásai az eloszlás típusával és momentumaival jellemezhetők, amihez nyilvánvalóan szükséges a látens változók együttes eloszlása típusának és momentumainak ismerete.

Változatlanul igaz, hogy a strukturális egyenletrendszerben az (egyidejű) endogén változók nemcsak végső okok függvényében jelennek meg; ennek megfelelően az endogén változók egy-egy együttes feltételes eloszlását, amely a gazdaság egy-egy állapotát jellemzi, a származtatott formákból határozzuk meg.

Állandók, II

Az előzőekből következik, hogy a strukturális egyenletrendszer állandóinak harmadik csoportját *a strukturális egyenletrendszer látens változói együttes eloszlásának momentumai képezik:* a várható érték vektora és a kovariancia mátrixa, amelyek – a strukturális paraméterekhez és a késésekhez hasonlóan – általában *ismeretlenek*.

Megjegyezzük, hogy származtatott formákban a látens változók együttes eloszlásának momentumai, amelyek az endogén változók együttes feltételes eloszlásának jellemzéséhez szükségesek, meghatározhatók a származtatott formák előállításával, a strukturális egyenletrendszer látens változói együttes eloszlásának momentumaiból.

A statisztikai következtetés

A sztochasztikus modell – a determinisztikus modellel szemben – *kvantitatív* következtetések eszköze. Ezek a következtetések *részben induktív, részben deduktív jellegűek*. A strukturális forma most is kvalitatív jellegű premisszákat formalizál. Ezek a premisszák a strukturális forma számszerűsítésével – állandói számszerű értékének a változók megfigyelésein alapuló becslésével – válnak kvantitatív jellegűvé. A strukturális forma számszerűsítése induktív következtetés útján történik, ez az indukció pedig *statisztikai indukció:* a strukturális formában megjelenő kvantitatív állítások – a statisztikai indukció konklúziói és további következtetések premisszái – csak meghatározott valószínűségi szinten érvényesek. A számszerűsített strukturális formából a modell származtatott formáinak előállítása *deduktív* következtetések útján történik, amelyek ugyancsak *statisztikai jellegűek:* a kvantitatív konklúziók — kvantitatív premisszáikhoz hasonlóan — csak meghatározott valószínűségi szinten igazak.

A struktúra

A struktúra a strukturális egyenletek olyan rendszere, amely elégséges információt tartalmaz az endogén változók együttes feltételes elosztásának — azaz a gazdaság működésének — *kvantitatív* jellemzéséhez.

A modell megfogalmazza a strukturális egyenletek egy (komplett) rendszerét, ez azonban nem nyújt elégséges információt az endogén változók együttes feltételes eloszlása kvantitatív jellemzéséhez, hiszen ismeretlenek benne az állandók egy részének, a strukturális paramétereknek, a késéseknek és a strukturális egyenletek látens változói együttes eloszlása momentumainak konkrét számszerű értékei.

Ennek alapján nyilvánvaló, hogy a struktúra *a számszerűsített modell: a strukturális egyenletrendszer, együtt a strukturális paramétereknek, a késéseknek és a látens változók együttes eloszlása momentumainak konkrét számszerű értékével.*

II. A gazdaság működésének leírása: az egyes modellformák tartalma

Az előző pontban bevezetett fogalmak felhasználásával megfogalmazzuk a modell alapformáját, a strukturális formát, majd előállítjuk a modell származtatott formáit: a redukált formát és a végső formát. Az egyes modellformák matematikai tulajdonságainak vizsgálatával közgazdasági tartalmukat kutatjuk, hogy megadhassuk közgazdasági, illetve kauzális értelmezésüket, megmutathassuk a gazdaság működésének leírásában betöltött szerepüket, feltárhassuk azokat a kvantitatív információkat, amelyeket — számszerűsítés után[5] — a gazdaság működéséről nyújtanak.

1. A strukturális forma

A modell hipotézisei

A modellt hét hipotézissel fogalmazzuk meg, amelyek a strukturális formára vonatkoznak. Ezek a következők:

M-I. hipotézis. A modell M számú endogén, N számú predeterminált és a strukturális forma M számú látens változójának *közvetlen* (egyidejű vagy késleltetett) kauzális összefüggéseit leíró *strukturális egyenletrendszer*, az $[1, \ldots, T]$

[5] Az ökonometriai modell alkalmazása a gazdaság működésének leírásában és elemzésében gyakorlatilag azért érdekes, mert ezekről a kérdésekről kvantitatív információt nyújt. Ebben és a következő részben ezt a körülményt mindig hangsúlyozva, az állandók (paraméterek) ismeretlen elméleti értékeivel dolgozunk. Az így nyert eredmények számszerűsített modellben is érvényesek. Az érdeklődő Olvasó a szimultán dinamikus modell paraméterbecslési módszereiről tájékozódhat pl. [11] alapján.

megfigyelési időszakban M számú sztochasztikus egyenletből álló *lineáris egyenletrendszer*.

Ennek megfelelően a strukturális egyenletrendszer általános alakja a változók egyetlen együttes megfigyelése alapján az

$$\mathbf{y}_t'\mathbf{A} + \mathbf{x}_t'\mathbf{B} + \mathbf{u}_t' = \mathbf{0}' \qquad t = 1, \ldots, T \qquad (1.1)$$

formában írható, ahol

$\mathbf{y}_t' = [y_m]_t$ az endogén változók t-edik együttes megfigyelésének M-elemű sorvektora ($m = 1, \ldots, M$);

$\mathbf{x}_t' = [x_n]_t$ a predeterminált változók t-edik együttes megfigyelésének N-elemű sorvektora ($n = 1, \ldots, N$);

$\mathbf{u}_t' = [u_m]_t$ a strukturális forma látens változói t-edik — nem megfigyelt! — realizációjának M-elemű sorvektora ($m = 1, \ldots, M$);

$\mathbf{A} = [\alpha_{m'm}]$ az endogén változók strukturális paramétereinek $M \times M$ típusú (kvadratikus) mátrixa, amelynek egy sora egy endogén változóra, egy oszlopa egy strukturális egyenletre vonatkozik;

$\mathbf{B} = [\beta_{nm}]$ a predeterminált változók strukturális paramétereinek $N \times M$ típusú mátrixa, amelynek egy sora egy predeterminált változóra, egy oszlopa egy strukturális egyenletre vonatkozik.

Megjegyzések

(a) A predeterminált változók között szerepel egy olyan, tételezzük fel, hogy az N-edik, amelynek megfigyeléseire $x_{Nt} = 1$ ($t = 1, \ldots, T$) teljesül. Az x_{Nt}-hez tartozó β_{Nm}($m = 1, \ldots, M$) strukturális paraméterek a strukturális egyenletek *ún. szabad konstansai*.

(b) Minden strukturális egyenletben szerepel egy olyan endogén változó, tételezzük fel, hogy az m-edik egyenletben az m'-edik endogén változó, amelynek strukturális paraméterére $\alpha_{m'm} = -1$ ($m' = m$, $m = 1, \ldots, M$) teljesül. Ez *az ún. normalizálási szabály*. Felhasználásával egyszerűen előállítható *a strukturális egyenletrendszer normalizált alakja*, amelynek egyenletei az eredményváltozók alakulását a magyarázó változók (köztük a látens változók) függvényében ábrázolják. (Az I. részben szereplő strukturális egyenletrendszerek normalizált alakban vannak!)

(c) Az $\mathbf{A}$ és a $\mathbf{B}$ mátrixok tartalmaznak *a priori zérus elemeket*, amelyek — $\mathbf{A}$-t és $\mathbf{B}$-t oszlopaik szerint szemlélve — a megfelelő strukturális egyenletekben (okként) *nem szereplő* endogén és predeterminált változók strukturális paraméterei.

(d) Az (1.1) egyenletrendszer lehet statikus vagy dinamikus modell strukturális egyenletrendszere. Particionáljuk az (1.1) egyenletrendszert a késleltetett endogén változók és az exogén változók megkülönböztetésével!

Eredményül — időegységnyi késést feltételezve — az

$$\mathbf{y}_t'\mathbf{A} + \mathbf{y}_{t-1}'\mathbf{B}_{\mathrm{I}} + \mathbf{z}_t'\mathbf{B}_{\mathrm{II}} + \mathbf{u}_t' = \mathbf{0}' \qquad t = 1, \ldots, T \qquad (1.2)$$

egyenletrendszert nyerjük, amelyben

$\mathbf{y}_{t-1}'$ a késleltetett endogén változók egyetlen együttes megfigyelését tartalmazó M-elemű sorvektor;

$\mathbf{z}_t'$ az exogén változók egyetlen együttes megfigyelését tartalmazó K-elemű sorvektor ($K = N - M$);

$\mathbf{B}_{\mathrm{I}} = [\beta_{m'm}]$ és $\mathbf{B}_{\mathrm{II}} = [\beta_{km}]$ a késleltetett endogén változók és az exogén változók strukturális paramétereinek $M \times M$ és $K \times M$ típusú mátrixai.

Abban az esetben, ha a modell *statikus*, $\mathbf{B}_I = 0$, ha viszont a modell *dinamikus* $\mathbf{B}_I \neq 0$, de tartalmazhat zérus elemeket.

M-II. hipotézis. A strukturális forma $\mathbf{u}_t$ látens változóinak együttes eloszlása M-dimenziós *normális* eloszlás[6]

$$E(\mathbf{u})_t = \mathbf{0} \qquad t = 1, \ldots, T \tag{1.3}$$

várható érték vektorral és

$$E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}'_{t'}) = \begin{cases} \Sigma \ (\textit{pozitív definit}), & \text{ha } t = t' \quad (1.4.a) \\ \mathbf{0}, & \text{ha } t \neq t' \quad (1.4.b) \end{cases} \qquad t, t' = 1, \ldots, T$$

egyidejű és késleltetett kovariancia mátrixokkal. Ezt

$$f(\mathbf{u}_t) \sim N(\mathbf{0}; \Sigma) \tag{1.5}$$

formában szimbolizálhatjuk.

M-III. hipotézis. A strukturális paraméterek **A** és **B** mátrixainak elemei és a strukturális forma $\mathbf{u}_t$ látens változói együttes eloszlásának (1.3)—(1.4) momentumai az $[1, \ldots, T]$ megfigyelési időszakban t-től függetlenek, vagyis *a struktúra a megfigyelési időszakban időben állandó (stabil).*

M-IV. hipotézis. Az $\mathbf{x}_t$ predeterminált változók és a strukturális forma $\mathbf{u}_t$ látens változói *sztochasztikusan függetlenek* (vagy legalábbis egyidejűleg korrelálatlanok), amiből *következik* hogy egyidejű kovariancia mátrixuk zérusmátrix, azaz

$$E(\mathbf{x}_t\mathbf{u}'_{t'}) = \mathbf{0} \qquad t = t', \ t = 1, \ldots, T \tag{1.6}$$

teljesül.

M-V. hipotézis. Az x_t predeterminált változók *lineárisan független valószínűségi változók*, azaz

$$E(\mathbf{x}_t\mathbf{x}'_{t'}) = \Xi \qquad t = t', \ t = 1, \ldots, T \tag{1.7}$$

egyidejű kovariancia mátrixuk *pozitív definit.*[7]

M-VI. hipotézis. Az endogén változók strukturális paramétereinek **A** mátrixa nem-szinguláris, azaz $|\mathbf{A}| \neq 0$. Ha ez a feltétel teljesül, *a modell komplett.*

M-VII. hipotézis. A strukturális paraméterek **A** és **B** mátrixainak és a strukturális forma $\mathbf{u}'_t$ látens változói momentumainak a priori ismeretlen elemei az endogén és a predeterminált változók $\mathbf{y}'_t$ és $\mathbf{x}'_t$ megfigyelései alapján — statisztikai indukció útján — *egyértelműen* meghatározhatók. Ha ez a feltétel teljesül, *a struktúra identifikálható.*

A modell egyes hipotéziseinek tartalma és funkciója

Hipotéziseinek egy része a modell elemeinek matematikai definícióját adja, vagyis a matematika nyelvén fogalmazza meg az I. részben adott verbális definíciókat.

Az *M-III.* a modell időben változó és időben állandó elemeit különbözteti meg: kimondja, hogy a modell változóinak közvetlen kapcsolatait a megfigyelési időszakban stabil struktúra jellemzi.

[6] Megjegyezzük, hogy a strukturális forma látens változói együttes *normális* eloszlásának feltételezése a gyakorlatban nem szükséges, helyettesíthető enyhébb feltevéssel is, jelen tanulmány lényegi mindanivalójának kifejtését azonban megkönnyíti.

[7] Valószínűségi változók lineáris függetlenségéről lásd [6, 87. o.]!

A predeterminált változókat *az M-V. és az M-IV.* együtt definiálja. Azt, hogy a megfigyelési időszak t-edik részidőszakában a predeterminált és az endogén változók kapcsolata egyirányú (a predeterminált változók *csak okok*), az M-V. fogalmazza meg, ugyanis ha a látens változóktól sztochasztikusan függő endogén változók visszahatnának a predeterminált változókra, ez a hipotézis nem teljesülne. Azt viszont, hogy a predeterminált változók *egymástól független okok*, az M-IV. mondja ki: közöttük mint valószínűségi változók között egzakt lineáris függőség nem lehet.

A látens változók tulajdonságait az *M-V. és az M-II.* együtt fogalmazza meg. Azt, hogy a látens és az endogén változók kapcsolata egyirányú (a látens változók *csak okok*), az M-V. mondja ki, ugyanis, ha a predeterminált változóktól sztochasztikusan függő endogén változók visszahatnának a látens változókra, ez a hipotézis nem teljesülne. A látens változók további tulajdonságai az M-II.-ben jutnak kifejezésre: a látens változók (1.4.a) szerint *egymástól független okokat*, éspedig (1.3) és (1.4.b) szerint *lényegtelen és nem-szisztematikus okok*at képviselnek. (Az (1.4.a) szerint Σ pozitív definit: a látens változók — a predeterminált változókhoz hasonlóan — lineárisan független valószínűségi változók!)

Azt, hogy a predeterminált változók és a látens változók, mint az okok két csoportja, *egymástól is független okok*at tartalmaz, szintén *az M-IV.* mondja ki.

Az, hogy a predeterminált változók *lényeges vagy szisztematikus okok*at képviselnek, a modell megfogalmazásában csak *implicit formában* jut kifejezésre: velük kapcsolatban *nem* tételeztük fel sem azt, hogy várhatóérték vektoruk zérusvektor, sem azt, hogy késleltetett kovariancia mátrixaik zérusmátrixok.

A modellben induktív és deduktív statisztikai következtetéseket végzünk. Az induktív következtetés célja — az endogén és a predeterminált változók megfigyelései alapján — a struktúra meghatározása, a deduktív következtetések pedig — a becsült struktúra ismeretében — a gazdaságban érvényesülő mélyebb, közvetett kauzális összefüggések feltárására, a modell származtatott formáinak előállítására, a közvetett kauzális összefüggéseket jellemző paraméterek meghatározására irányulnak. *Az induktív következtetés csak akkor egyértelmű, ha M-VII. teljesül, hasonlóan a deduktív következtetések egyértelműségének feltétele az M-VI. teljesülése.* E két hipotézis tehát a modellből levont következtetéseket egyértelművé teszi.

A strukturális forma szerepe és tartalma

A strukturális forma a gazdaság működésének leírásában kitüntetett szerepet játszik: *a strukturális egyenletrendszer az, amelyben a gazdaság működésére vonatkozó közgazdasági hipotéziseinket formalizálni tudjuk és amelyben* — a struktúra meghatározása után — *ezeket a hipotéziseket a valósággal szembesítjük.* Abban az esetben, ha ez a verifikáció pozitív kimenetelű, *a strukturális egyenletrendszer a gazdaság működéséről közgazdaságilag értelmezhető adekvát képet nyújt.*

Ugyanakkor a strukturális forma a gazdaság működését folyamatainak *legfelszínibb* kauzális összefüggései alapján ábrázolja: paraméterei a változók *közvetlen* (egyidejű és késleltetett) kauzális összefüggéseit jellemzik. Szimultán dinamikus modellben azonban *közvetett* (egyidejű és késleltetett) kauzális összefüggések is érvényesülnek, amelyek feltárása a gazdaság működésének *teljes* leírásához nélkülözhetetlen. Éppen ezért, a közvetett (egyidejű és késleltetett) kauzális összefüggések explicitté tétele végett kell előállítani a strukturális formából, mint alapformából, a modell származtatott formáit.

A származtatott modellformák tartalmának pontos megértése érdekében fogalmazzuk meg a strukturális forma paramétermátrixainak tartalmát! Tekintsük ehhez a strukturális egyenletrendszer (1.2) particionált alakját! Tudjuk — normalizálási szabály! —, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix diagonális elemei az egyes strukturális egyenletek eredményváltozóinak paraméterei és (-1)-gyel egyenlők. Az $\mathbf{A}$ mátrix $\alpha_{m'm}$ $(m' \neq m)$, illetve a $\mathbf{B}_{\mathrm{II}}$ mátrix β_{km} eleme azt a közvetlen egyidejű hatást méri, amelyet az m'-edik endogén változó, illetve a k-adik exogén változó egységnyi növekedése az m-edik endogén változóra *egyetlen strukturális egyenletben* kifejt. Hasonlóan a $\mathbf{B}_{\mathrm{I}}$ mátrix $\beta_{m'm}$ eleme azt a közvetlen késleltetett hatást jellemzi, amelyet az m'-edik késleltetett endogén változó az m-edik (egyidejű)endogén változóra egy időegységnyi késéssel *egyetlen strukturális egyenletben* gyakorol.

2. A redukált forma

A redukált forma tulajdonságai

Az M-VI. hipotézis teljesülése esetén *létezik* a modell redukált formája *és egyértelműen meghatározott.* A redukált forma négy tulajdonsága, amely a strukturális forma hipotéziseiből következik és így szintén feltételes jellegű, a következő:

R-1. *tulajdonság.* Az endogén, a predeterminált és a látens változók *teljes egyidejű és közvetlen késleltetett* kauzális összefüggéseit leíró *redukált egyenletrendszer* M számú sztochasztikus egyenletből álló *lineáris egyenletrendszer.* Mivel a redukált egyenletrendszert úgy állítjuk elő, hogy a strukturális egyenletrendszert megoldjuk mint az egyidejű endogén változókban inhomogén lineáris egyenletrendszert, az R-1. közvetlenül következik az M-I-ből.

Ennek megfelelően *a redukált egyenletrendszer* a változók egyetlen együttes megfigyelése alapján az

$$\mathbf{y}_t' = \mathbf{x}_{t'}'(-\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}) + \mathbf{u}_t'(-\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{x}_t'\mathbf{\Pi} + \mathbf{v}_t' \qquad t = 1, \ldots, T \tag{2.1}$$

formában írható, ahol

$\mathbf{\Pi} = -\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = [\pi_{nm}]$, a redukált paraméterek $N \times M$ típusú mátrixa, amelynek egy sora egy predeterminált változóra, egy oszlopa egy redukált egyenletre vonatkozik;

$\mathbf{v}_t' = \mathbf{u}_t'(-\mathbf{A}^{-1}) = [v_m]_t$ a redukált forma látens változói t-edik — nem megfigyelt! — realizációjának M-elemű sorvektora.

A (2.1) egyenletrendszer egyaránt lehet statikus és dinamikus modell redukált egyenletrendszere. Particionáljuk a (2.1) egyenletrendszert a késleltetett endogén és az exogén változók megkülönböztetésével! Eredményül — időegységnyi késést feltételezve — az

$$\mathbf{y}_t' = \mathbf{y}_{t-1}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}} + \mathbf{z}_t'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} + \mathbf{v}_t' \qquad t = 1, \ldots, T \tag{2.2}$$

egyenletrendszert nyerjük, amelyben $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}} = -\mathbf{B}_{\mathrm{I}}\mathbf{A}^{-1} = [\pi_{m'm}]$ és $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} = -\mathbf{B}_{\mathrm{II}}\mathbf{A}^{-1} = [\pi_{km}]$ a késleltetett endogén változók és az exogén változók redukált paramétereinek $M \times M$ és $K \times M$ típusú mátrixai. Abban az esetben, ha a modell *statikus*, $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}} = \mathbf{0}$, ha viszont a modell *dinamikus* $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}} \neq \mathbf{0}$, de tartalmazhat zéruselemeket. Figyeljük meg, hogy dinamikus modell esetében a redukált egyenletrendszer az endogén változókban inhomogén lineáris differencia egyenletrendszer.

R-2. *tulajdonság.* A redukált forma $\mathbf{v}_t$ látens változóinak együttes eloszlása M-dimenziós *normális* eloszlás

$$E(\mathbf{v}_t) = E(-\mathbf{A}'^{-1}\mathbf{u}_t) = \mathbf{A}'^{-1}E(\mathbf{u}_t) = \mathbf{0} \qquad t = 1, \ldots, T \tag{2.3}$$

várható érték vektorral és

$$E(\mathbf{v}_t\mathbf{v}_{t'}') = E(-\mathbf{A}'^{-1})\mathbf{u}_t\mathbf{u}_{t'}'(-\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}'^{-1}E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_{t'})\mathbf{A}^{-1} =$$

$$= \begin{cases} \mathbf{A}'^{-1}E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_{t'}')\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{\Omega} \ \textit{(pozitív definit)} & \text{ha } t = t' \qquad (2.4.\text{a}) \\ \mathbf{0} & \text{ha } t \neq t' \qquad (2.4.\text{b}) \end{cases}$$

$$t = 1, \ldots, T$$

egyidejű és késleltetett kovariancia mátrixokkal. Ezt

$$f(\mathbf{v}_t) \sim N(\mathbf{0}; \mathbf{\Omega}) \tag{2.5}$$

formában szimbolizálhatjuk.

R-2 közvetlenül következik M-II.-ből. A $\mathbf{v}_t$ definíciója alapján ugyanis az $\mathbf{u}_t$-ben $\mathbf{v}_t = (-\mathbf{A}'^{-1})\mathbf{u}_t$ szerint lineáris forma, ahol a $(-\mathbf{A}'^{-1})$ nem szinguláris konstans mátrix.

R-3. *tulajdonság.* A redukált paraméterek $\mathbf{\Pi}$ mátrixának elemei és a redukált forma $\mathbf{v}_t$ látens változói együttes eloszlásának momentumai az $[1, \ldots, T]$ megfigyelési időszakban t-től *függetlenek, vagyis időben állandók.*

Az R-3. a $\mathbf{\Pi}$ és a $\mathbf{v}_t$ definíciója alapján M-III.-ból közvetlenül következik.

R-4. *tulajdonság.* Az $\mathbf{x}_t$ predeterminált változók és a redukált forma $\mathbf{v}_t$ látens változói *sztochasztikusan függetlenek* (vagy legalábbis egyidejűleg korrelálatlanok), amiből *következik*, hogy egyidejű kovariancia mátrixuk zérusmátrix, azaz:

$$E(\mathbf{x}_t\mathbf{v}_{t'}') = E[\mathbf{x}_t\mathbf{u}_t'(-\mathbf{A}^{-1})] = E(\mathbf{x}_t\mathbf{u}_{t'}')(-\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{0} \qquad t = t', \ t = 1, \ldots, T. \tag{2.6}$$

Sztochasztikus függetlenség esetén a redukált forma látens változóinak a predeterminált változókra vonatkozó feltételes eloszlása megegyezik feltétel nélküli eloszlásukkal!

Az R-4. a $\mathbf{v}_t$ definíciója alapján M-IV.-ből közvetlenül következik.

A redukált forma szerepe és tartalma

A redukált forma szerepe. A redukált formából nyerhető információk — *szimultán* dinamikus modellben — kiegészítik a strukturális formából nyerhető információkat, nélkülözhetetlenek a gazdaság működésének mélyebb megismeréséhez. A redukált forma lehetőséget ad az endogén és az (egyidejű) exogén változók *teljes egyidejű* kauzális kapcsolatainak kvantitatív jellemzésére. Ugyanakkor a redukált egyenletek nem adják a gazdaságnak olyan közgazdaságilag értelmezhető leírását, mint a strukturális egyenletek.

Az endogén változók együttes feltételes eloszlása. A redukált formából meghatározható az endogén változóknak a predeterminált változókra — pontosabban azok egy-egy $\mathbf{x}_t$ realizációjára — vonatkozó együttes feltételes eloszlása. Ez az eloszlás M-dimenziós *normális* eloszlás

$$E(\mathbf{y}'_t|\mathbf{x}'_t) = E(\mathbf{x}'_t\mathbf{\Pi}_t + \mathbf{v}'_t|\mathbf{x}'_t) = E(\mathbf{x}'_t\mathbf{\Pi} + \mathbf{v}'_t) = \mathbf{x}'_t\mathbf{\Pi} \tag{2.7}$$

várható érték vektorral és

$$E\{[\mathbf{y}'_t - E(\mathbf{y}'_t|\mathbf{x}'_t)]'[\mathbf{y}'_t - E(\mathbf{y}'_t|\mathbf{x}'_t)]|\mathbf{x}'_t\} = E(\mathbf{v}_t\mathbf{v}'_t|\mathbf{x}'_t) = E(\mathbf{v}_t\mathbf{v}'_t) = \mathbf{\Omega} \tag{2.8}$$

(egyidejű) kovariancia mátrixszal. Ezt

$$f(\mathbf{y}'_t|\mathbf{x}'_t) \sim N(\mathbf{x}'_t\mathbf{\Pi};\ \mathbf{\Omega}) \tag{2.9}$$

formában szimbolizálhatjuk.

A redukált paraméterek mint paciális deriváltak. Az egyes redukált paraméterek — erről a (2.7)-ben végzett parciális deriválással meggyőződhetünk — az egyes endogén változók feltételes várható értékének az egyes predeterminált változók szerinti parciális deriváltjai, azaz

$$\pi_{nm} = \partial E(\mathbf{y}_{mt}|\mathbf{x}_t)/\partial x_{nt}. \tag{2.10}$$

Ebből az interpretációból következik egyébként a redukált paraméterek értelmezésénél hangsúlyozandó *ceteris paribus* (c.p.) *elv.*

A redukált paraméterek tartalma. Tekintsük a (2.2) redukált egyenletrendszer particionált alakját. A redukált paraméterek általános tartalmát (2.10) alatti matematikai interpretációjukat is figyelembe véve, a következőkben adhatjuk meg:

A $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}$ mátrix egyes elemei azt a *teljes egyidejű hatást* mérik, amelyet az egyes exogén változók egységnyi növekedése az egyes endogén változók feltételes várható értékére *(a modell egészében)* c.p. kifejt. Ez a teljes egyidejű hatás a közvetlen egyidejű hatás mellett *a közvetett egyidejű hatást* is tartalmazza, amelyet explicit formában a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} - \mathbf{B}_{\mathrm{II}}$ különbségmátrix elemei jellemeznek.

A $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ mátrix egyes elemei azt *a közvetlen késleltetett hatást* mérik, amelyet az egyes késleltetett endogén változók egységnyi növekedése az egyes endogén változók feltételes várható értékére egy időegységnyi késéssel *(a modell egészében)* c.p. kifejt.

Vegyük észre a késleltetett endogén változóknak a redukált formában és a strukturális formában megjelenő közvetlen késleltetett hatása közötti különbséget ($\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}} \neq \mathbf{B}_{\mathrm{I}}$). Ez a különbség a közvetlen késleltetett hatás érvényesülésének módjában lévő eltéréssel magyarázható: ez a hatás a strukturális formában *egy-egy egyenletben*, a redukált formában *a modell egészében* jut érvényre (vö. $\mathbf{B}_{\mathrm{I}}$ értelmezése!).

A $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}$ mátrix elemei mint egyidejű multiplikátorok

A $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}$ paramétermátrix elemeit, amelyek az exogén változók egységnyi növekedésének az endogén változókra kifejtett teljes egyidejű hatását, így a közvetlen egyidejű hatások mellett a magyarázó változóként szereplő egyidejű endogén változók közvetítésével érvényesülő közvetett egyidejű hatását is mérik, *egyidejű multiplikátorokként* értelmezzük. Ez az értelmezés a Keynes-i multiplikátorfogalom *statikus* általánosítása, amelynek lényege, hogy nemcsak egyetlen exogén változónak — a Keynes-i elméletben az autonóm beruházásoknak —, hanem valamennyinek van multiplikátor hatása.[8]

3. A végső forma[9]

A végső forma tulajdonságai

Abban az esetben, ha a redukált egyenletrendszer (2.2) particionált alakjában szereplő $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ mátrix kvadratikus, *létezik* a modell végső formája *és egyértelműen meghatározott.*[10]

A végső forma négy tulajdonsága, amely a redukált forma tulajdonságaiból következik és így szintén hipotetikus jellegű, a következő:

V-1. tulajdonság. Az endogén, a predeterminált és a látens változók *teljes egyidejű, közvetlen késleltetett és közvetett késleltetett* kauzális összefüggéseit leíró *végső egyenletrendszer a paraméterekben exponenciális egyenletrendszer*, amely M számú sztochasztikus egyenletből áll.

Mivel a végső egyenletrendszert úgy nyerjük, hogy előállítjuk a (2.2) redukált egyenletrendszernek mint az endogén változókban inhomogén lineáris differencia egyenletrendszernek az általános megoldását, V-1. az R-1.-ből közvetlenül következik.

Ennek megfelelően *a végső egyenletrendszer* a változók egyetlen együttes megfigyelése alapján[11]

$$\mathbf{y}'_t = \mathbf{y}'_0\mathbf{\Pi}^t_{\mathrm{I}} + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{z}'_{t-\tau}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}^\tau_{\mathrm{I}} + \mathbf{w}'_t \qquad t = 1, \ldots, T \quad (3.1)$$

[8] A multiplikátorforgalom jelen és a továbbiakban még tárgyalandó általánosításával más-más néven és eltérő tartalommal az ökonometriaelmélet fejlődésének már viszonylag korai szakaszában kísérleteztek, pl. [7], [15] és ez az általánosítás a későbbiekben is folytatódott: [5], [6] és [14]. A tartalmi különbségeket megszüntetendő jelen tanulmányban *a multiplikátor fogalom általánosításai tartalmilag konzisztens rendszerének kialakítására törekszünk és ennek keretében a multiplikátor fogalom újabb általánosításait is értelmezzük.* Tesszük ezt a következő szempontok alapján: (a) multiplikátorként csak olyan paramétermátrixok elemeit tekintjük, amelyek *közvetett* egyidejű és késleltetett hatásokat (is) mérnek; (b) multiplikátorhatást *csak az exogén változóknak* tulajdonítunk; (c) multiplikátorok *összegét* is multiplikátorként értelmezzük.

[9] A végső forma modern értelmezését a [14] szerzői adták meg és végső egyenletrendszeren az

$$\mathbf{y}'_t = \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{z}'_{t-\tau}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}^\tau_{\mathrm{I}} + \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{w}'_{t-\tau}\mathbf{\Pi}^\tau_{\mathrm{I}}$$

egyenletrendszert értették. Minthogy ez az értelmezés feltételezi a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ mátrix aszimptotikus nilpotenciáját, ami a gyakorlatban nem mindig teljesül, jelen tanulmányban ettől az értelmezéstől eltérünk, azzal a céllal, hogy a végső forma a gazdaság működése leírására és elemzésére általánosabb esetben is használható legyen.

[10] Az, hogy a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ mátrix kvadratikus, implikálja, hogy valamennyi endogén változó szerepel a modellben késéssel is, ami a gyakorlatban általában nem teljesül. A végső forma egzisztenciafeltételét azonban triviális módon biztosíthatjuk úgy, hogy (az egyébként nem kvadratikus) mátrixot annyi $\mathbf{0}$ sorvektorral egészítjük ki, ahány endogén változó nem szerepel a modellben késéssel.

[11] Levezetése megtalálható pl. [11]-ben, elméleti háttere az [1], [2] vagy a [3] munkákban.

formában írható,[11] ahol

$\mathbf{y}_0' = [y_m]_0$ az endogén változók kezdeti értékeinek M-elemű sorvektora; $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^t = [\pi_{m'm}]_t$ és $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} = [\pi_{km}]_{\tau}$ a végső paraméterek $M \times M$ és $K \times M$ típusú mátrixai, amelyek egy sora egy endogén változó kezdeti értékére, illetve egy exogén változó egyidejű vagy késleltetett értékére, egy oszlopa egy végső egyenletre vonatkozik;

$\mathbf{w}_t' = \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{v}_{t-\tau}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} = [w_m]_t$ a végső forma látens változói t-edik — nem — megfigyelt! — realizációjának M-elemű sorvektora.

V-2. tulajdonság. A végső forma $\mathbf{w}_t$ látens változóinak együttes eloszlása *normális*, amelynek dimenzióját a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ mátrix rangja határozza meg,[12]

$$E(\mathbf{w}_t) = \mathbf{0} \qquad t = 1, \ldots, T \tag{3.2}$$

várhatóérték vektorral és

$$E(\mathbf{w}_t\mathbf{w}_{t'}') = \begin{cases} \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}\tau}'\mathbf{\Omega}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} = \mathbf{\Theta}_{\tau} & \text{pozitív szemidefinit, ha } t = t' \quad (3.3.a) \\ \sum_{\tau=\nu}^{t-1} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}'^{\tau}\mathbf{\Omega}\mathbf{\Pi}^{\tau-\nu} = \mathbf{\Theta}_{\nu} & \text{ha } t \neq t',\ \nu = |t'-t| \quad (3.3.b) \end{cases}$$

$$(t = 1, \ldots, T)$$

egyidejű és késleltetett kovariancia mátrixokkal. Ezt

$$f(\mathbf{w}_t) \sim N(\mathbf{0}; \mathbf{\Theta}_{\tau})$$

formában szimbolizálhatjuk.

V-2. levezetését R-2.-ből itt mellőzzük.[13]

V-3. tulajdonság. A végső paraméterek $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^t$ és $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^t$ mátrixai és a végső egyenletrendszer $\mathbf{w}_t$ látens változóinak egyidejű és késleltetett kovariancia mátrixai az $[1, \ldots, T]$ megfigyelés időszakban *időben nem állandók:* részben t, részben τ szerint *az idő függvényei.*

A V-3. érvényessége a V-1. és a V-2. alapján könnyen belátható.

V-4. tulajdonság. A predeterminált változók (itt az endogén változók $\mathbf{y}_0'$ kezdeti értékegyüttese és az exogén változók $\mathbf{z}_{t-\tau}'(\tau \geq 0)$ időbeli pályája és a végső forma $\mathbf{w}_t'$ látens változói *sztochasztikusan függetlenek* (vagy legalábbis egyidejűleg korrelálatlanok).

V-4. levezetését R-4.-ből itt nem végezzük el. Sztochasztikus függetlenség esetén a végső forma látens változóinak a predeterminált változókra vonatkozó feltételes eloszlása megegyezik feltétel nélküli eloszlásukkal!

A végső forma szerepe és tartalma

A végső forma szerepe. A végső formából nyerhető információk — szimultán *dinamikus* modellben — kiegészítik a strukturális és a redukált formából nyert információkat, nélkülözhetetlenek a gazdaság működésének teljes megismeréséhez. A végső forma lehetőséget ad az endogén és az exogén változók *közvetett*

[12] Az elfajult együttes normális eloszlásról lásd pl. [3. 368—369. pp.] vagy [4, 142. p.].
[13] Levezetését lásd pl. [11]-ben!

késleltetett kauzális kapcsolatainak kvantitatív jellemzésére. Ugyanakkor a végső egyenletek — a redukált egyenletekhez hasonlóan — nem adják a gazdaság működésének olyan közgazdaságilag értelmezhető leírását, mint a strukturális egyenletek.

Az endogén változók együttes feltételes eloszlása. A végső formából is meghatározható az endogén változóknak a predeterminált változókra (itt az endogén változók $\mathbf{y}_0'$ kezdeti érték együttesére és az exogén változók $\mathbf{z}_{t-\tau}'(\tau \geq 0)$ időbeli pályájára) — pontosabban azok egy-egy realizációjára — vonatkozó együttes feltételes eloszlása. Ez az eloszlás *normális*, amelynek dimenzióját a $\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}$ mátrix rangja határozza meg,

$$E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0',\mathbf{z}_{t-\tau}') = E(\mathbf{y}_0'\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}^t + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{z}_{t-\tau}'\mathbf{\Pi}_\mathrm{II}\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}^\tau + \mathbf{w}_t'|\mathbf{y}_0',\mathbf{z}_{t-\tau}') =$$

$$= E(\mathbf{y}_0'\mathbf{\Pi}_t' + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{z}_{t-\tau}'\mathbf{\Pi}_\mathrm{II}\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}^\tau + \mathbf{w}_t') = \mathbf{y}_0'\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}^t + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{z}_{t-\tau}'\mathbf{\Pi}_\mathrm{II}\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}^\tau \tag{3.5}$$

várható érték vektorral és

$$E\{[\mathbf{y}_t' - E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0',\mathbf{z}_{t-\tau}')]'[\mathbf{y}_t' - E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0',\mathbf{z}_{t-\tau}')]|\mathbf{y}_0',\mathbf{z}_{t-\tau}'\} =$$

$$= E(\mathbf{w}_t\mathbf{w}_t'|\mathbf{y}_0',\mathbf{z}_{t-\tau}') = E(\mathbf{w}_t\mathbf{w}_{t-\tau}') = \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{\Pi}_\mathrm{I}'^\tau\mathbf{\Omega}\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}^\tau = \mathbf{\Theta}_\tau \tag{3.6}$$

(egyidejű) kovariancia mátrixszal. Ezt az

$$f(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0',\mathbf{z}_{t-\tau}') \sim N(\mathbf{y}_0'\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}^t + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{z}_{t-\tau}'\mathbf{\Pi}_\mathrm{II}\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}^\tau;\mathbf{\Theta}_\tau) \tag{3.7}$$

formában szimbolizálhatjuk.

A végső paraméterek mint parciális deriváltak. Az egyes végső paraméterek — erről a (3.5)-ben végzett parciális deriválással meggyőződhetünk — az egyes endogén változók feltételes várható értékének az egyes endogén változók kezdeti értékei, illetve az egyes exogén változók különböző időszakokhoz tartozó értékei szerinti parciális deriváltjai, azaz

$$[\pi_{m'm}]_t = \partial E(y_{m't}|\mathbf{y}_0',\mathbf{z}_{t-\tau}')/\partial y_{m0}, \tag{3.8}$$

illetve

$$[\pi_{km}]_\tau = \partial E(y_{mt}|\mathbf{y}_0',\mathbf{z}_{t-\tau}')/\partial z_{k,t-\tau} \tag{3.9}$$

Ebből az interpretációból következik a végső paraméterek értelmezésénél is hangsúlyozandó *ceteris paribus* elv.

A végső paraméterek tartalma. Tekintsük a (3.1) végső egyenletrendszert! A végső paraméterek általános tartalmát — (3.8) és (3.9)-beli matematikai interpretációjukat is figyelembe véve — a következőkben fogalmazhatjuk meg:

A $\mathbf{\Pi}_t^\mathrm{I}$ mátrix egyes elemei azt *a közvetlen késleltetett hatást* mérik, amelyet az egyes endogén változók kezdeti értékeinek „egységnyi növekedése" az egyes endogén változók feltételes várható értékére a modell egészében a megfigyelési időszak t-edik részidőszakában, azaz *t időegységnyi késéssel* c.p. kifejt.

A $\mathbf{\Pi}_\mathrm{II}\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}^\tau$ mátrixok egyes elemei

$\tau = 0$ esetén az egyes exogén változók egységnyi növekedésének az egyes endogén változók feltételes várható értékére kifejtett *teljes egyidejű hatását* mérik, c.p.;

$\tau > 0$ esetén az egyes exogén változók egyszeri egységnyi növekedésének *közvetett késleltetett hatását* mérik az egyes endogén változók feltételes várható értékére *τ időegységnyi késéssel*, c.p.

Figyeljük meg, hogy a $\mathbf{\Pi}_{II}\mathbf{\Pi}_{I}^{\tau}$ mátrix elemei ($\tau > 0$) az exogén változók *egyszeri* egységnyi növekedésének τ részidőszakkal később érvényesülő közvetett késleltetett hatását mérik; ebben az esetben az egyes exogén változók a megfigyelési időszak valamely részidőszakában egy egységgel nőnek, a következő részidőszakokban viszont ismét a régi szintjükön alakulnak (a gazdaságot *egyetlen külső impulzus* éri). A gyakorlatban ez az eset — jóllehet előfordul — inkább kivételnek számít. Jellemzőbb az az eset, amelyben az exogén változók a megfigyelési időszak valamely részidőszakában egy egységgel nőnek és az azt követő részidőszakok egy sorában az új szintjükön alakulnak. Ekkor az exogén változók *fenntartott* egységnyi növekedéséről beszélünk (a gazdaságot érő *külső impulzus a megfigyelési időszak több egymást követő részidőszakában megismétlődik*). A kétféle változás különbségét a 3.A. ábra szemlélteti.

Kérdés: hogyan tudjuk mérni azt a közvetett késleltetett hatást, amelyet az egyes exogén változók fenntartott egységnyi változása az egyes endogén változók feltételes várható értékére τ részidőszakkal később, c.p. kifejt? Azt a paramétermátrixot, amelynek elemei ezt a hatást mérik, könnyen meghatározhatjuk. A szóban forgó változás időszakában ($\tau = 0$) ennek (teljes egyidejű) hatását a $\mathbf{\Pi}_{II}$ mátrix elemei, egy időszakkal később ($\tau = 1$) a $\mathbf{\Pi}_{II}\mathbf{\Pi}_{I} + \mathbf{\Pi}_{II}$, vagyis az előző időszakban bekövetkezett változás közvetett késleltetett hatását és a folyó időszakban is érvényesülő (fenntartott) változás teljes egyidejű hatását jellemző paramétermátrixok összegének elemei mérik. Ezt a gondolatmenetet tovább folytatva felírhatjuk az általános képletet $\sum_{\nu=0}^{\tau} \mathbf{\Pi}_{II}\mathbf{\Pi}_{I}^{\nu}$ formában. Ennek a mátrixnak az elemei mérik tehát az egyes exogén változók fenntartott egységnyi növekedésének az egyes endogén változók feltételes várható értékére kifejtett közvetett késleltetett hatását τ részidőszakkal később, c.p.[14]

A $\mathbf{\Pi}_{II}\mathbf{\Pi}_{I}^{\tau}$ és a $\sum_{\nu=0}^{\tau} \mathbf{\Pi}_{II}\mathbf{\Pi}_{I}^{\nu}$ paramétermátrixok mint késleltetett multiplikátorok.

A $\mathbf{\Pi}_{II}\mathbf{\Pi}_{I}^{\tau}$, illetve $\sum_{\nu=0}^{\tau} \mathbf{\Pi}_{II}\mathbf{\Pi}_{I}^{\nu}$ paramétermátrixok elemei az egyes exogén változó-egyszeri egységnyi, illetve fenntartott egységnyi növekedésének az egyes endogén változók feltételes várható értékére τ időegységnyi késéssel kifejtett közvetett késleltetett hatását mérik, tehát *késleltetett multiplikátorok*ként értelmezhetők. Ez a Keynes-i multiplikátor fogalom egy újabb, *dinamikus* általánosítása.

[14] Természetesen a gyakorlatban a különböző exogén változók egyszeri és fenntartott változása *együttesen* is előfordul(hat). Az itt definiált paraméter-mátrixok az egyik vagy a másik változás közvetett késleltetett hatását mérik és definíciójuk az exogén változók *vektorára* vonatkozik. Abban az esetben, ha egyes exogén változókra az egyik, másokra a másik változástípus érvényes, úgy mindkét paramétermátrixot meghatározzuk és a változás jellegétől függően a változás hatását az egyik, vagy a másik paramétermátrix megfelelő elemével jellemezzük.

A multiplikátorfogalom további általánosításai

Kumulált multiplikátorok. A gyakorlatban érdekes kérdés, hogy az egyes exogén változók egyszeri egységnyi, illetve fenntartott egységnyi növekedése milyen hatást eredményez az egyes endogén változók feltételes várható értékére, c.p. több, mondjuk η részidőszak alatt összesen. Az erre a kérdésre választ adó paramétermátrixokat könnyen felírhatjuk, ha a megfelelő változás teljes egyidejű és közvetett késleltetett hatásait jellemző paramétermátrixokat összegezzük $\sum_{\tau=0}^{\eta-1} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau}$, illetve $\sum_{\tau=0}^{\eta-1} \sum_{\nu=0}^{\tau} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\nu}$ formában. Ezen paramétermátrixok elemei — multiplikátorok összegei lévén — maguk is multiplikátorokként, éspedig *kumulált multiplikátorok*ként értelmezhetők.

Totális vagy egyensúlyi multiplikátorok. A kumulált multiplikátorok meghatározásánál az időhorizont — η — megválasztása mindig tartalmaz önkényességet, így ezek csak részleges képet adnak az exogén változók változásának a gazdaságra gyakorolt teljes hatásáról. Célszerű ezért az időhorizontot végtelenre választani. Ennek lehetősége értelemszerűen csak az exogén változók *egyszeri* egységnyi növekedésével összefüggésben adott és a

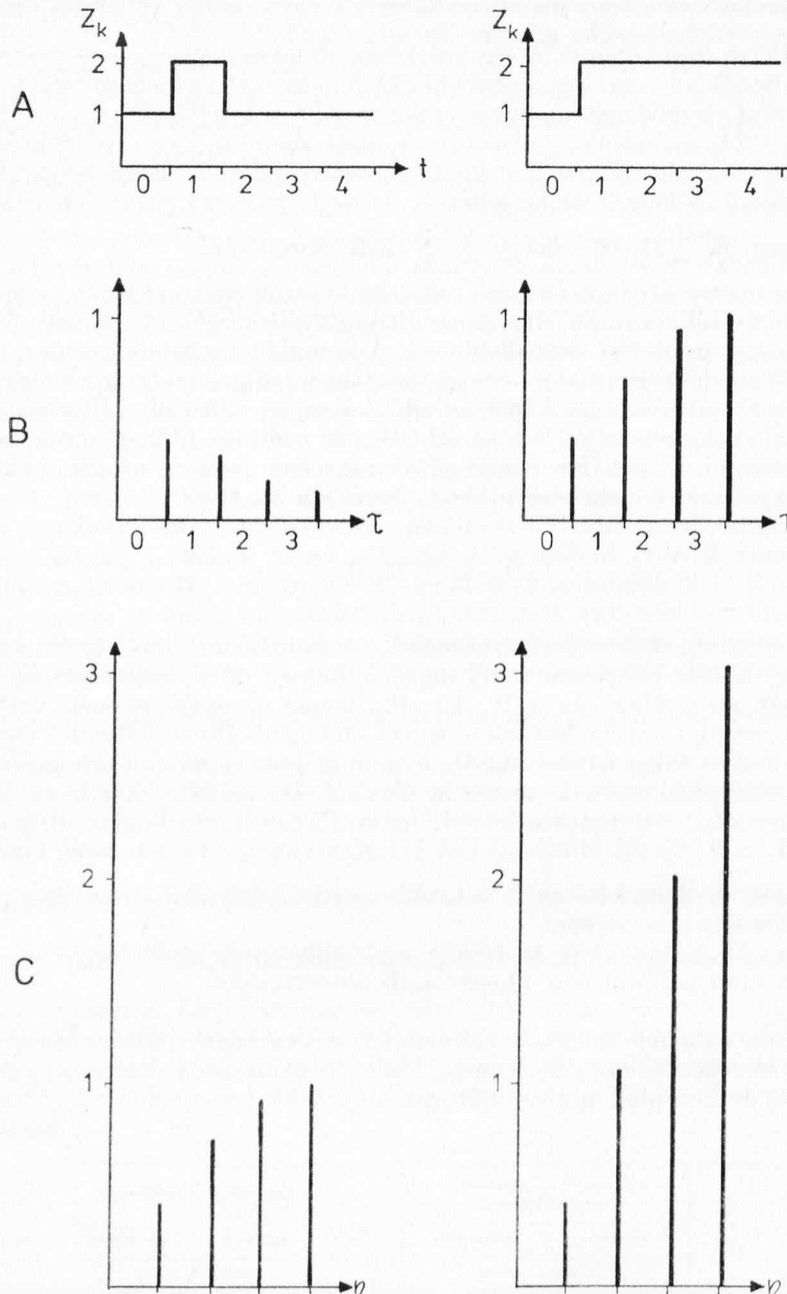
$$\mathbf{D}_{\infty} = \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} \tag{3.10}$$

végtelen mátrixhatványsorral értelmezett paramétermátrixot eredményezi, amely vagy létezik vagy nem, attól függően, hogy a (3.10) konvergens-e vagy sem. Abban az esetben, ha a $\mathbf{D}_{\infty}$ létezik, elemei az egyes exogén változók egyszeri egységnyi növekedésének az egyes endogén változó feltételes várható értékére kifejtett teljes hatását mérik, c.p., multiplikátorokként értelmezhetők és *totális multiplikátorok*nak nevezzük őket. A $\mathbf{D}_{\infty}$ mátrix létezik és $\mathbf{D}_{\infty} = (\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}(\mathbf{I}_{M} - \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}})^{-1}$ formában írható, ha a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ aszimptotikusan nilpotens, azaz $\lim_{t\to\infty} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}} = \mathbf{0}$ teljesül. Minthogy (vö. III. rész!) ugyanez a gazdaság kiegyensúlyozott fejlődésének feltétele is, a totális multiplikátorokat szokás *egyensúlyi multiplikátorok*nak is nevezni.

3. *példa.* Az alábbiakban (a totális multiplikátorok kivételével) az eddig megismert multiplikátorokat illusztráljuk numerikusan.

1. *táblázat:* Valamely z_k exogén változó egyszeri egységnyi, illetve fenntartott egységnyi növekedésének valamely y_m endogén változóra vonatkozó egyidejű, késleltetett és kumulált multiplikátorai.

τ	Egyidejű és késleltetett multiplikátorok		η	Kumulált multiplikátorok	
	egyszeri	fenntartott		egyszeri	fenntartott
	növekedés esetén			növekedés esetén	
0	0,4	0,4	1	0,4	0,4
1	0,3	0,7	2	0,7	1,1
2	0,2	0,9	3	0,9	2,0
3	0,1	1,0	4	1,0	3,0



3. ábra. A. Az exogén változók (a) egyszeri egységnyi, (b) fenntartott egységnyi növekedése. B. Egyidejű és késleltetett multiplikátorok. C. Kumulált multiplikátorok

Vegyük észre, hogy az 1. táblázat 2. oszlopában szereplő számok a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau}$ mátrixsorozat ($\tau = 0, 1, 2, 3$) tagjai k-adik sorának m-edik elemei. Ha tehát ezeket a multiplikátorokat ismerjük és a különböző multiplikátorok kapcsolatát megértettük, úgy ezekből a többi elemi számolással meghatározható. Az 1. táblázatban szereplő multiplikátorokat grafikusan a 3. ábra B. és C. része szemlélteti.

III. A gazdaság működésének elemzése

A gazdaság működésének leírása és elemzése szorosan összekapcsolódó munkafolyamatok: a gazdaság működése leírásának folyamata belenyúlik az elemzés folyamatába, bár nem meríti ki azt. Így az ökonometriai modellel végzett elemzések két nagyobb témakörbe sorolhatók.

1. Struktúra- és multiplikátorelemzés

Magától értetődő, hogy a modell alapján végzett gazdasági elemzés — a modell számszerűsítése után — a struktúra vizsgálatával, a közgazdaságilag is értelmezhető *strukturális paraméterek elemzésével*, a belőlük a gazdaság működésére levonható következtetések megfogalmazásával kezdődik. Ezután — és értelemszerűen ugyancsak a modell számszerűsítese után — kerül sor a gazdaság működésének mélyebb — közvetett — összefüggéseit is feltáró *multiplikátorok elemzésére*. Mindezek a vizsgálatok együttesen adnak képet — kvantitatív információkat — a gazdaságban érvényesülő közvetlen és közvetett kauzális összefüggésekről.

2. Egyensúlyvizsgálat

Gazdasági egyensúly — kiegyensúlyozott fejlődés

Gazdasági egyensúly esetén a gazdasági alanyok magatartásukon nem változtatnak. A gazdaság egy egyensúlyi állapota — ha létezik — az adottságok változásához való alkalmazkodás útján jön létre és az adottságok változása következtében bomlik meg: az adottságok változása a gazdasági alanyokat magatartásuk változtatására készteti és ez az alkalmazkodási folyamat a gazdaság egy másik állapotának kialakulásához vezet, amely vagy szintén egyensúlyi állapot vagy nem. Ha a gazdaság (egyensúlyi állapotából kitérítve) egyensúlyi állapot felé halad, *fejlődése kiegyensúlyozott.*

Fordítsuk le mindezt a „modell nyelvére"!

A modellben a megfigyelhető adottságokat az exogén (predeterminált) változók egy-egy értékegyüttese képviseli, a gazdaság egy-egy állapotát az endogén változóknak az exogén (predeterminált) változókra vonatkozó egy-egy együttes feltételes eloszlása jellemzi. Ennek megfelelően:

a gazdaság egyensúlyi állapotban van, ha az endogén változók együttes feltételes eloszlása nem változik, hacsak az exogén (predeterminált) változók értékegyüttese nem változik;

a gazdaság fejlődése kiegyensúlyozott, ha az endogén változók együttes feltételes eloszlásainak sorozata olyan együttes feltételes eloszlásukhoz konvergál, amely nem változik, hacsak az exogén (predeterminált) változók értékegyüttese nem változik.

Az egyensúlyvizsgálat alapkérdései. Az egyensúlyvizsgálat alapvetően három kérdésre keres választ:

(a) létezik-e az adott gazdaságban egyensúlyi állapot vagy sem?

(b) hogyan jellemezhető ez az egyensúlyi állapot kvantitatíve, ha létezik?

(c) milyen jellegű pályán jut el a gazdaság egyik egyensúlyi állapotból a másikba, ha fejlődése kiegyensúlyozott, illetve milyen jellegű pályán halad, ha fejlődése nem kiegyensúlyozott?

Ezen kérdések közül statikus modellben csak az első kettő válaszolható meg (komparatív statikus elemzés), dinamikus modellben mind a három (dinamikus elemzés), de az első két kérdésre adott válasz is különböző statikus és dinamikus modellben!

Komparatív statikus elemzés

Statikus modellben, az endogén változók alakulását a redukált egyenletrendszer írja le a változó adottságok (végső okok) függvényében, ezért a komparatív statikus elemzés *eszköze: a statikus modell redukált formája.*

Tekintsük a statikus modell

$$\mathbf{y}_t' = \mathbf{z}_t'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} + \mathbf{v}_t' \tag{2.1}$$

redukált egyenletrendszerét, amelyben a $\mathbf{v}_t$ látens változók együttes eloszlása a (II.2.5) alatt adott! Ebből az endogén változóknak az exogén változók valamely rögzített $\bar{\mathbf{z}}'$ értékegyüttesére vonatkozó együttes feltételes eloszlása meghatározható. Ez az eloszlás M-dimenziós *normális* eloszlás,

$$E(\mathbf{y}_t'|\bar{\mathbf{z}}') = E(\bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} + \mathbf{v}_t'|\bar{\mathbf{z}}') = E(\bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} + \mathbf{v}_t') = \bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \tag{2.2}$$

várható érték vektorral és

$$E\{[\mathbf{y}_t' - E(\mathbf{y}_t'|\bar{\mathbf{z}}')]'[\mathbf{y}_t' - E(\mathbf{y}_t'|\bar{\mathbf{z}}')]|\bar{\mathbf{z}}'\} = E(\mathbf{v}_t\mathbf{v}_t'|\bar{\mathbf{z}}') = E(\mathbf{v}_t\mathbf{v}_t') = \mathbf{\Omega} \tag{2.3}$$

kovariancia mátrixszal. Eredményünket az

$$f(\mathbf{y}_t'|\bar{\mathbf{z}}') \sim N(\bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}; \mathbf{\Omega}) \tag{2.4}$$

formában szimbolizálhatjuk.

Válaszaink most már az egyensúlyvizsgálat kérdéseire:

(a) A (2.2) feltételes várhatóérték vektor akkor és csak akkor változik, ha az exogén változók értékegyüttese változik, ennek megfelelően *egysúlyiérték vektor*nak tekinthető, a (2.3) feltételes kovariancia mátrix pedig az exogén változók értékegyüttesétől független (és időben állandó). Ugyanakkor statikus modellben *az exogén változók bármely értékegyüttese egyensúlyi állapotot határoz meg:* az exogén változók értékegyüttesének megváltozása a gazdaságot egyik egyensúlyi állapotából kitérítve egy másik egyensúlyi állapotba juttatja.

(b) *A gazdaság egy-egy egyensúlyi állapota kvantitative* — a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}$ és a $\mathbf{\Omega}$ becslésének ismeretében — *a* (2.4) *feltételes eloszlás felhasználásával* — a konfidenciaintervallumokhoz (tartományokhoz) hasonló — *lehetőségi intervallummal (tartománnyal) jellemezhető.* Ebben az exogén változók adott értékegyüttese mellett — egyensúlyi állapotban — egy-egy endogén változó vagy az összes endogén változó előre meghatározott valószínűséggel realizálódik.

4. *példa.* Célszerű a lehetőségi tartomány szerkesztését grafikusan is illusz-rálnunk. Tekintsük ehhez a I. (1.5)—(1.6) strukturális egyenletrendszert és — egyszerűség kedvéért — hagyjuk figyelmen kívül a szabad konstansokat! Az I. (1.5)—(1.6) strukturális egyenletrendszerből egyszerűen előállítható az

$$y_{1t} = \pi_{11} z_{1t} + \pi_{21} z_{2t} + v_{1t}$$

$$y_{2t} = \pi_{12} z_{1t} + \pi_{22} z_{2t} + v_{2t}$$

redukált egyenletrendszer, amelyben $E(v_{1t}^2) = \omega_{11}$, $E(v_{2t}^2) = \omega_{22}$ $E(v_{1t} v_{1t'}) = = \omega_{12} (t = t')$ és $r = \omega_{12}/\sqrt{\omega_{11}\omega_{22}}$. Az exogén változók valamely rögzített z_1, z_2 értékére — a korrelációs együttható felhasználásával — felírhatjuk az endogén változók normális együttes feltételes eloszlásának sűrűségfüggvényét

$$f(y_{1t}, y_{2t} | \bar{z}_1, \bar{z}_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\omega_{11}\omega_{22}(1-r^2)}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-r^2)} \left[\frac{y_{1t} - E[y_{1t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2])}{\omega_{11}} \right]^2 - \right.$$

$$\left. - 2r \left(\frac{y_{1t} - E(y_{1t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2)}{\sqrt{\omega_{11}}} \right) \left(\frac{y_{2t} - E(y_{2t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2)}{\sqrt{\omega_{22}}} \right) + \frac{(y_{2t} - E[y_{2t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2]^2}{\omega_{22}} \right\}$$

formában.[15] Az endogén változóknak ez a kétdimenziós normális együttes feltételes eloszlása az $E(y_{1t}, y_{2t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ együttes feltételes várhatóérték mint középpont, körül az (y_{1t}, y_{2t}) síkon a kétdimenziós normális eloszlással kapcsolatban jól ismert (aszimmetrikus) ,,harangtestet'' határoz meg, amelynek az (y_{1t}, y_{2t}) síkkal párhzamos metszetei az

$$\frac{(y_{1t} - E[y_{1t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2])^2}{\omega_{11}} - 2r \left(\frac{y_{1t} - E[y_{1t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2]}{\sqrt{\omega_{11}}} \right) \left(\frac{y_{2t} - E[y_{2t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2]}{\sqrt{\omega_{22}}} \right) +$$

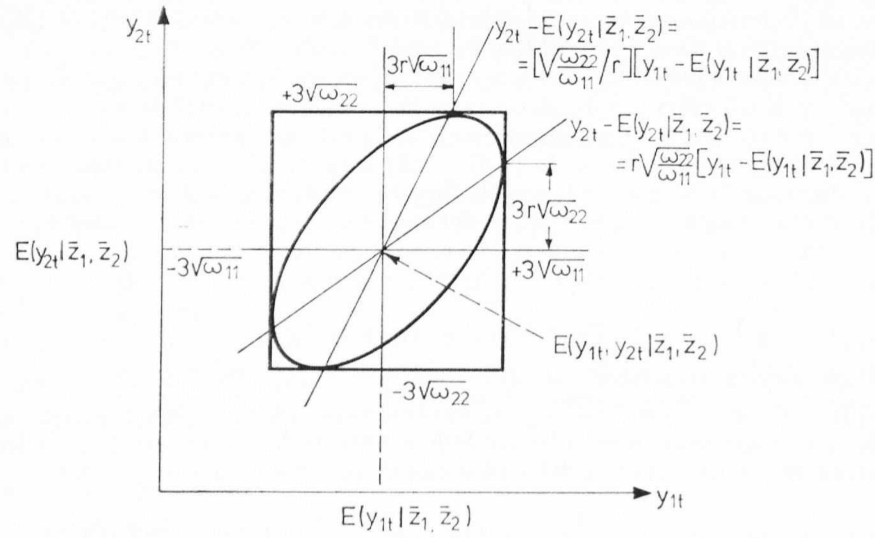
$$+ \frac{(y_{2t} - E[y_{2t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2])^2}{\omega_{22}} = k$$

egyenlettel leírható ellipszissereget alkotnak, k az ellipszissereg paramétere. Eddigi eredményeink alapján az (y_{1t}, y_{2t}) együttes feltételes eloszlását egyensúlyi állapotban jellemző lehetőségi tartományt a 4. ábra szemlélteti.

Az y_{1t}, illetve az y_{2t} — egyensúlyi állapotban — külön-külön 99,3%-os valószínűséggel az $E(y_{1t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2) \pm 3\sqrt{\omega_{11}}$, illetve az $E(y_{2t}|\bar{z}_1, \bar{z}_2) \pm 3\sqrt{\omega_{22}}$ lehetőségi intervallumokban (a 4. ábrán a téglalap oldalai) realizálódnak. (y_{1t}, y_{2t}) együttes realizációit — egyensúlyi állapotban — ugyanilyen valószínűségi szinten a 4. ábrán látható ellipszis mint lehetőségi tartomány tartalmazza $3r\sqrt{\omega_{11}}$ és $3r\sqrt{\omega_{22}}$ paraméterekkel.

Minthogy a statikus modell nem nyújt információt arról, hogy milyen *jellegű* pályán jut el a gazdaság egyik egyensúlyi állapotából a másikba, csak

[15] Lásd [13, 227. p.]!



4. ábra. Lehetőségi tartomány két endogén változóra

komparatív statikus elemzésre ad lehetőséget: a gazdaság két vagy több kvantitative jellemzett egyensúlyi állapotának összehasonlítására.[16]

Dinamikus elemzés

Dinamikus modellben az endogén változók alakulását a végső egyenletrendszer írja le a változó adottságok (végső okok) függvényében, ezért a dinamikus elemzés *eszköze: a dinamikus modell végső formája.*

(a) *Kiegyensúlyozott-e a gazdaság fejlődése vagy sem?*

A komparatív statikus elemzésnél megállapítottuk, hogy az exogén változók minden értékegyüttese egyensúlyi állapotot határoz meg, amely kvantitative az endogén változóknak az exogén változókra vonatkozó együttes feltételes eloszlása alapján szerkesztett lehetőségi intervallumokkal vagy tartománnyal jellemezhető. Vizsgáljuk most meg, hogy a komparatív statikus elemzésnek ez a megállapítása érvényes-e, ez az eljárása alkalmazható-e dinamikus elemzésnél!

Tekintsük a dinamikus modell (II.3.1) végső egyenletrendszerét, amelyben a $\mathbf{w}_t$ látens változók együttes eloszlása (II.3.4) alatt adott! Ebből az endogén változóknak az exogén változók valamely $\bar{\mathbf{z}}'$ rögzített értékegyüttesére (és az endogén változók definíciószerűen konstans $\mathbf{y}_0'$ kezdeti értékegyüttesére)

[16] Az ökonometriai modellek számszerűsítéséhez az endogén és az exogén (predeterminált) változók *diszkrét* megfigyelései állnak rendelkezésünkre. Ez a körülmény motiválja az egyensúlyi állapotnak és a kiegyensúlyozott fejlődésnek jelen tanulmányban adott — de az ökonometriaelméletben általánosan is elfogadott — értelmezését. A valóságban az exogén (predterminált) változók többsége folytonos, így az endogén változók együttes feltételes eloszlásának momentumai is állandóan változnak, az exogén (predeterminált) változók egy-egy diszkrét (konstans!) megfigyelése mellett azonban állandók (állandókhoz konvergálnak).

vonatkozó együttes feltételes eloszlása meghatározható. Ez az eloszlás *normális*; dimenzióját a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ rangja határozza meg, és az eloszlásnak

$$E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}') = \mathbf{y}_0'\mathbf{\Pi}_t^{\mathrm{I}} + \sum_{\tau=0}^{t-1} \bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} \tag{2.5}$$

a várható érték vektora és

$$E\{[\mathbf{y}_t' - E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}')]'[\mathbf{y}_t' - E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}']|\mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}'\} = \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{\Pi}'^{\tau}\mathbf{\Omega}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} = \mathbf{\Theta}_{\tau} \tag{2.6}$$

a kovariancia mátrixa (vö.: (II.3.5–3.6)!). Eredményünket

$$f(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}') \sim N(\mathbf{y}_0'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^t + \sum_{\tau=0}^{t-1} \bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau}; \mathbf{\Theta}_{\tau}) \tag{2.7}$$

formában szimbolizálhatjuk.

A (2.5)–(2.7) alapján megállapíthatjuk, hogy

(i) A (2.5) várhatóérték vektor akkor is változik, ha az exogén változók nem változnak; ugyanez igaz a (2.6) feltételes kovariancia mátrixra is. Dinamikus modellben tehát *az exogén változók egy-egy értékegyüttese nem egyensúlyi állapotot határoz meg*, így a (2.7) együttes feltételes eloszlás nem a gazdaság egy egyensúlyi állapotát jellemzi, hanem a gazdaság állapotát a megfigyelési időszak t-edik részidőszakában;

(ii) *A gazdaság fejlődése akkor és csak akkor kiegyensúlyozott, $t \to \infty$ esetén akkor és csak akkor tart egyensúlyi állapot felé, ha a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ mátrix aszimptotikusan nilpotens*, azaz $\lim_{t\to\infty} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^t = \mathbf{0}$. Ebben az esetben a (2.7) feltételes eloszlások sorozata normális *határ*eloszláshoz konvergál

$$\lim_{t\to\infty} E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}') = \sum_{\tau=0}^{\infty} \bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} = \bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} = \bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}(\mathbf{I}_M - \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}})^{-1} \tag{2.8}$$

aszimptotikus várható érték vektorral és

$$\lim_{t\to\infty} E\{[\mathbf{y}_t' - E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}')]'[\mathbf{y}_t' - E(\mathbf{y}_t'|\mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}')]|\mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}'\} =$$

$$= \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau\prime}\mathbf{\Omega} \sum_{\tau=0}^{\infty} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{t} = (\mathbf{I}_M - \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}')^{-1}\mathbf{\Omega}(\mathbf{I}_M - \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}})^{-1} \tag{2.9}$$

aszimptotikus kovariancia mátrixszal. Eredményünket

$$f(y_t'|\bar{\mathbf{z}}') \approx N[\bar{\mathbf{z}}'\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}(\mathbf{I}_M - \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}})^{-1}(\mathbf{I}_M - \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}})^{-1}\mathbf{\Omega}(\mathbf{I}_M - \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}})^{-1}] \tag{2.10}$$

formában szimbolizálhatjuk.

Láthatjuk, hogy a (2.8) aszimptotikus várható érték vektor akkor és csak akkor változik, ha az exogén változók értékegyüttese változik, ennek megfelelően *egyensúlyérték vektor*nak tekinthető; a (2.9) aszimptotikus kovariancia mátrix pedig az exogén változók értékegyüttesétől független és időben állandó.

(b) *Hogyan jellemezhető kvantitative a gazdaság egyensúlyi állapota, ha létezik, dinamikus modellben?*

A gazdaság egyensúlyi állapotát kvantitative jellemezhetjük – a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$, a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}$ és az $\mathbf{\Omega}$ mátrixok becslésének ismeretében – dinamikus modellben is ún.

lehetőségi intervallumokkal vagy tartománnyal, ezek (ennek) szerkesztése azonban a (2.10) *feltételes határeloszláson alapul.*[17]

(c) *Az endogén változók időbeli pályájának vizsgálata*

Az endogén változók időbeli pályájának vizsgálata az egyensúlyvizsgálat 3. alapkérdésére ad választ: milyen *jellegű* pályán jut el a gazdaság egyik egyensúlyi állapotából a másikba, ha fejlődése kiegyensúlyozott, illetve milyen *jellegű* pályán halad, ha fejlődése nem kiegyensúlyozott. Hangsúlyozzuk, hogy e kérdés feltevésénél *nem* az endogén változók *konkrét* időbeli alakulására, realizációira vagyunk kíváncsiak, *hanem* azok *állandó, karakterisztikus* jellemzőire: *a gazdaság karakterisztikus dinamikus tulajdonságaira.* Figyelmünket először az általánosabb esetre irányítjuk: nem tételezzük fel, hogy a gazdaság fejlődése kiegyensúlyozott. Látni fogjuk, hogy ezen vizsgálat eredményei — értelemszerűen — kiegyensúlyozott fejlődés esetén is érvényesek.

A gazdaság önmozgása

Tekintsük az endogén változók (2.7) alatti együttes feltételes eloszlását, amely a gazdaság egy (nem egyensúlyi) állapotát jellemzi és első közelítésben tételezzük fel, hogy a gazdaságot a megfigyelési időszakban nem érik külső (exogén) hatások ($\bar{\mathbf{z}}' = \mathbf{0}$)! Ekkor az endogén változók feltételes várhatóérték vektora kizárólag az endogén változók kezdeti értékvektorának függvényében változik

$$E(\mathbf{y}_t' \mid \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0' \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^t \tag{2.11}$$

szerint, ahol a változást a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^t$ mátrix jellemzi. Ezt a változást, amely dinamikus modellben a gazdaságot érő külső (exogén) hatások nélkül is lejátszódik, a gazdaság önmozgásának nevezzük.

Vizsgáljuk meg, *mitől és hogyan* függ a gazdaság önmozgásának jellege!

A kvardatikus $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ mátrix diagonalizálható

$$\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}} = \mathbf{P\Lambda Q}. \tag{2.12}$$

szerint, ahol $\mathbf{\Lambda} = \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_M \rangle$ a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ mátrix sajátértékeit tartalmazó diagonális mátrix, P és Q ortogonális mátrixok ($\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$) feltéve, hogy a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ mátrix *valamennyi* sajátértéke egyszeres.[18] A $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$ összefüggés felhasználásával

$$\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^2 = \mathbf{P\Lambda QP\Lambda Q} = \mathbf{P\Lambda^2 Q}, \tag{2.13}$$

hasonlóan

$$\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^t = \mathbf{P\Lambda}^t\mathbf{Q} \tag{2.14}$$

teljesül. Minthogy $\mathbf{\Lambda}^t = \langle \lambda_1^t, \ldots, \lambda_M^t \rangle$, abban az esetben, ha a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ mátrix *minden nem-zérus* sajátértéke egyszeres, a (2.12)

$$\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^t = \sum_{m=1}^{M'} \lambda_m^t \mathbf{R}_m \quad M' \leq M; \; M' = r(\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}), \tag{2.15}$$

[17] Vö. a 16. jegyzettel!

[18] Lásd [8]!

a (2.11) pedig az

$$E(\mathbf{y}_t' \mid \mathbf{y}_0') = \mathbf{y}_0' \sum_{m=1}^{M'} \lambda_m^t \mathbf{R}_m \tag{2.16}$$

alakban írható, ahol $\mathbf{R}_m = \mathbf{p}_m \mathbf{q}_m'$, azaz a $\mathbf{P}$ m-edik oszlopvektorának és a $\mathbf{Q}$ m-edik sorvektorának szorzatából keletkező diád.[19]

A (2.16)-ban az $\mathbf{y}_0'$ vektor és az $\mathbf{R}_m$ mátrixok *konstansok*, kizárólag a λ_m-ek *változnak t-ben*. Így belátható hogy, a gazdaság önmozgása az endogén változók kezdetiérték vektorából kiinduló mozgások eredőjeként (szuperpozíciójaként) alakul és az összetevő mozgások *jellegét* a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ mátrix λ_m sajátértékeinek jellege határozza meg az alábbiak szerint:

(α) – ha λ_m = pozitív valós szám, akkor ez egyirányú *(monoton)* komponenst;
– ha λ_m = negatív valós szám, akkor ez *oszcilláló* komponenst;
– ha $\lambda_m = a(\cos b \pm i \sin b)$ konjugált komplex számpár, akkor ez *periodikus* komponenst visz a gazdaság önmozgásába (az endogén változók pályájába) a^t amplitúdóval és $2\pi/b$ periódushosszal;

(β) – ha $|\lambda_m| < 1$, a kérdéses komponens *konvergens* (ciklikus komponens esetén *csillapuló*) mozgást;
– ha $|\lambda_m| = 1$, a kérdéses komponens *önmagát ismétlő* mozgást;
– ha $|\lambda_m| > 1$, a kérdéses komponens *divergens* (ciklikus komponens esetén *explozív*) mozgást képvisel.[20]

(γ) valamennyi λ_m sajátérték valamennyi endogén változó pályája *jellegé*nek meghatározásában szerepet játszik; közülük alapvető az abszolút értékben legnagyobb, *ún. domináns sajátérték* hatása;

(δ) az $\mathbf{y}_0'$ és az $\mathbf{R}_m$ konstans vektor és mátrixok csak a sajátértékek által meghatározott jellegű mozgások *mértékét* befolyásolják.

Abban az esetben, ha a domináns sajátértékre $|\lambda_m| < 1$ teljesül, akkor $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^t = \lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^t\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, vagyis a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ mátrix aszimptotikusan nilpotens és a gazdaság önmozgása ($t \to \infty$ esetén) elhal. A dinamikus elemzés (b) pontjában beláttuk, hogy a gazdaság kiegyensúlyozott fejlődésének feltétele a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ aszimptotikus nilpotenciája. Jelen eredményünk ahhoz nyújt eszközt, hogy megvizsgáljuk, vajon ez a feltétel teljesül-e vagy sem.

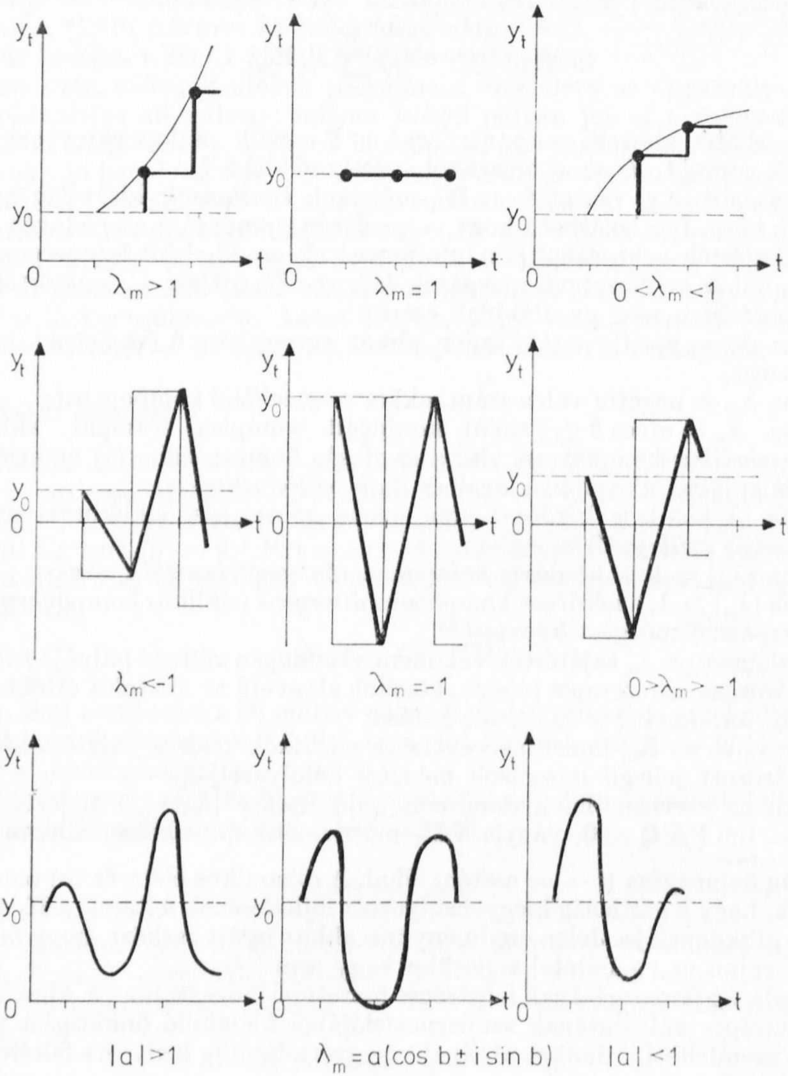
A gazdaság önmozgásának lehetséges összetevő mozgásait az 5. ábra az ezek két lehetséges változatának szuperpozíciójából kialakuló önmozgást pedig a 6. ábra szemlélteti. Mindkét ábránál az egyértelműség kedvéért feltételeztük, hogy $\mathbf{y}_0' > \mathbf{0}$.

A külső (exogén) hatások figyelembevétele

A fent megfogalmazott következtetéseink akkor is érvényesek, ha egyszerűsítő feltevésünket feloldjuk: vizsgálatunkba bekapcsoljuk az exogén változók $\bar{\mathbf{z}}'$ értékegyüttesének hatását is, hiszen a (2.11)–(2.16) gondolatmenetét követve (2.5) felírható az

$$E(\mathbf{y}_t' \mid \mathbf{y}_0', \bar{\mathbf{z}}') = \mathbf{y}_0' \sum_{m=1}^{M'} \lambda_m^t \mathbf{R}_m + \bar{\mathbf{z}}' \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \sum_{\tau=0}^{t-1} \sum_{m=1}^{M'} \lambda_m^\tau \mathbf{R}_m \tag{2.17}$$

[19] Lásd [16, 181. p.]!
[20] Lásd [1, 197–201. pp.]!

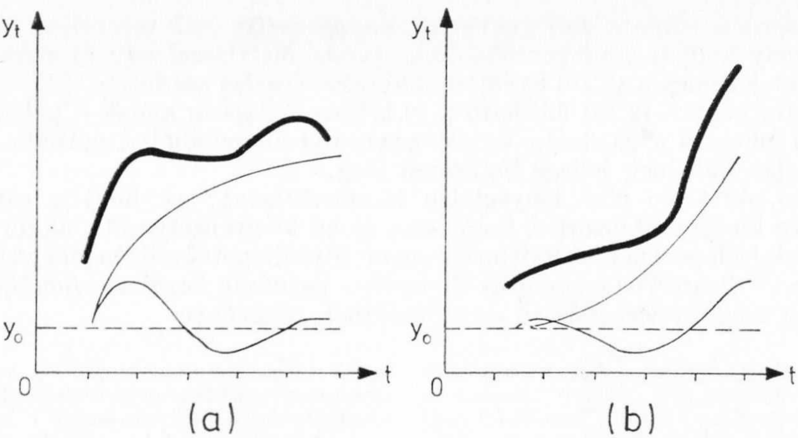


5. ábra. A gazdaság önmozgását összetevő mozgások jellege

felbontásban. Ennek megfelelően

(α) a külső (exogén) hatások az endogén változók pályájában ugyanolyan jellegű mozgásokat indukálnak, mint az endogén változók kezdeti értékei: ezen összetevő mozgások *jellegét* a mátrix $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ sajátértékeinek jellege határozza meg;

(β) a konstans $\bar{\mathbf{z}}'$, $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}}$ és $\mathbf{R}_m$ vektor és mátrixok ezen összetevő mozgásoknak csak a *mértékét* befolyásolják.



6 ábra. Monoton és ciklikus komponens szuperpozíciójából adódó önmozgás (a) kiegyensúlyozott, (b) nem kiegyensúlyozott fejlődés esetén

Befejezésül tételezzük fel, hogy a dinamikus modellben ábrázolt gazdaság egyensúlyi állapotban van, és az egyensúlyi állapot a (2.10) együttes feltételes eloszlással jellemezhető! Jelöljük a (2.8) egyensúlyi érték vektort $\bar{\mathbf{y}}'$-sal, amely az

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{y}}' &= \sum_{\tau=0}^{\infty} \bar{\mathbf{z}}' \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} = \sum_{\tau=0}^{t-1} \bar{\mathbf{z}}' \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} + \sum_{\tau=t}^{\infty} \bar{\mathbf{z}}' \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} = \\ &= \sum_{\tau=1}^{t-1} \bar{\mathbf{z}}' \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} + \sum_{\tau=0}^{\infty} \bar{\mathbf{z}}' \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{t} = \sum_{\tau=0}^{t-1} \bar{\mathbf{z}}' \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} + \bar{\mathbf{y}} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{t}\end{aligned} \tag{2.18}$$

alternatív formában írható. Ugyancsak tételezzük fel, hogy a gazdaságot külső impulzus éri, az exogénváltozók értékegyüttese $\bar{\mathbf{z}}'$-ról $\bar{\bar{\mathbf{z}}}'$-ra változik ($\bar{\bar{\mathbf{z}}}' = \bar{\mathbf{z}}' + \Delta\bar{\mathbf{z}}'$). Ez a külső impulzus a (2.10) által jellemzett egyensúlyi állapotot nyilvánvalóan megbontja és a t-edik részidőszakra a gazdaságnak az

$$\mathbf{y}_t^{*\prime} = \mathbf{y}_0^{*\prime} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{t} + \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{z}^{*\prime} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}^{\tau} \tag{2.19}$$

várhatóérték vektor és a (2.6) kovariancia mátrix által jellemzett állapotát határozza meg, ahol $\mathbf{y}^{*\prime} = \mathbf{y}' - \bar{\mathbf{y}}$ és $\mathbf{z}^{*\prime} = \bar{\bar{\mathbf{z}}}' - \bar{\mathbf{z}}'$. A (2.19) és a (2.6) által jellemzett állapot — mint tudjuk — *nem* egyensúlyi állapot!

Gondolatmenetünk elején feltételeztük, hogy a dinamikus modellben ábrázolt gazdaság egyensúlyban van. Annak feltétele, hogy ez az egyensúlyi állapot létrejöjjön, — korábbi eredményeink alapján tudjuk — a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ mátrix aszimptotikus nilpotenciája, azaz hogy a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ domináns sajátértékére $|\lambda_m| < 1$ teljesül.

Mi *következik* ebből?

(α) Ha a $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}}$ domináns sajátértékére $|\lambda_m| < 1$ teljesül, a (2.19) felírható várhatóérték vektorok sorozata az

$$\bar{\mathbf{y}}^{*\prime} = \lim_{t \to \infty} \mathbf{y}_t^{*\prime} = \mathbf{z}^{*\prime} \mathbf{\Pi}_{\mathrm{II}} (\mathbf{I}_M - \mathbf{\Pi}_{\mathrm{I}})^{-1} \tag{2.20}$$

aszimptotikus várhatóérték vektorhoz, az *egyensúlyi érték* vektorhoz, konvergál, amely a (2.9) aszimptotikus kovariancia mátrixszal egy új egyensúlyi állapotot jellemez a (2.10) együttes feltételes eloszlás szerint.

(β) Minthogy a (2.19) felírható a (2.17) analógiájára, annak a pályának a jellegét amelyen a gazdaság egyik egyensúlyi állapotából a másikba eljut, a $\mathbf{\Pi}_\mathrm{I}$ sajátértékeinek jellege határozza meg.

Utolsó, de talán nem lényegtelen ***következtetésünk:*** az, hogy a gazdaság fejlődése kiegyensúlyozott-e, vagy sem, és ha kiegyensúlyozott, akkor egyik egyensúlyi állapotból kitérítve másik egyensúlyi állapotát milyen jellegű pályán éri el, a — dinamikus modellben ábrázolt — gazdaság *immanens tulajdonsága*, amely a megfigyelési időszak struktúrájának függvénye.

(Beérkezett: 1981. december 15-én.)

IRODALOM

1. BAUMOL, W.: *Economic Dynamics*, New York, 1959. Macmillan.
2. DHRYMES, PH. J.: *Econometrics*, New York—London, 1970. Harper and Row.
3. DHRYMES, PH. J.: *Introductory Econometrics*, New York (Heidelberg) Berlin, 1978 Springer.
4. FISZ, M.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik*, Berlin, 1971. VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften.
5. GOLDBERGER, A. S.: *Impact Multipliers and Dynamic Properties of the Klein—Goldberger Model*. Amsterdam, 1959. North-Holland.
6. GOLDBERGER, A. S.: *Econometric Theory*, New York. 1964. John Wiley and Sons.
7. KLEIN, L. R.: *The Keynesien Revolution*, New York, 1947.
8. KREKÓ, B.: *Lineáris algebra* Budapest, 1976. KJK.
9. KOOPMANS, T. J.—W. M. C. HOOD: „The Estimation of Simultaneous Linear Relationships." In: Hood, W. M. C.—T. J. Koopmans, Eds: *Studies in Econometric Method*, New York — John Wiley and Sons, 92—112. pp.
10. KUHN, H.: *Die Struktur quantitativer Modelle: zur wirtschaftstheorietischen Grundlegung der Ökonometrie*. Tübingen, 1968. J. C. B. Mohr.
11. PAIZS, J.: *Ökometriaelmélet*, Budapest, MKKE Népgazdasági Tervezési Intézet Tervezésmódszertani Osztály, 1980. (Sokszorosított egyetemi tananyag.)
12. PAPANDREOU, A. G.: *Economics as a Science*. Chicago 1958.
13. PRÉKOPA A.: *Valószínűségelmélet*. Budapest, 1972. Műszaki Kk.
14. THEIL, H.—J. C. G. BOOT: The Final Form of Economic Equation Systems, *Econometrica*, 1962. pp. 136—152.
15. TINBERGEN, J.: *Ökonometria*, Budapest, 1957. KJK.
16. ZURMÜHL, R.: *Matrizen*, Berlin, 1958. Springer.