Zalai Ernő

Nem-negatív Leontief-inverz létezésének két közgazdasági kritériuma

Bevezetés

A lineáris input-output modellel végzett elemzésekben kulcsszerepet tölt be a fajlagos ráfordítási mátrix (A) ún. Leontief-inverze $(E - A)^{-1}$. A Leontief-inverz (időnként az egyszerűség kedvéért: inverz mátrix) különböző lehetséges közgazdasági interpretációi, amelyekkel itt nem foglalkozunk, rendszerint az inverz mátrix nem-negativitását is megkövetelik. Nem véletlen tehát, hogy a nem-negatív Leontief-inverz létezésének matematikai illetve közgazdasági kritériumai megkülönböztetett figyelmet élveznek az elméleti irodalomban. Közülük legismertebbek a Hawkins—Simon [3], illetve Gale [2] által adott kritériumok. Az alternatív kritériumokat és azok egyenértékűségét kimerítő részletességgel tárgyalja Nikaido [9].

Matematikai szempontból nézve a fenti inverz létezése és nem-negativitása (feltéve, hogy A nem-negatív) egyenértékű azzal az állítással, hogy A domináns sajátértéke 1-nél kisebb (lásd a Perron—Frobenius-féle sajátérték-tételeket, például Krekó B. [5], Nikaido [9], Rózsa P. [11] művekben). Közgazdászok számára többet mondanak Gale [2] ún. produktivitási kritériumai. Az A mátrix produktivitásának feltételezése ismét csak egyenértékű a nem-negatív inverz mátrix létezésének feltételezésével. Gale az általános, illetve az irreducibilis A mátrix esetére külön fogalmazta meg a produktivitás közgazdasági kritériumát. A kritériumok egyaránt megadhatók primális és duális megfogalmazásban, amelyeket Robinson [10] nyomán technológiai illetve gazdasági produktivitásnak lehet nevezni.

A technológiai produktivitás *Gale* által adott feltétele az általános esetre a következőképpen foglalható össze. Az A ráfordítási együttható mátrix produktív, azaz van nem-negatív Leontief-inverze, ha a vizsgált gazdaságban minden termékből *van* végső kibocsátás, *vagy* ugyanazon átlagos ráfordítások mellett (egyéb feltételektől eltekintve) *elvben* keletkezhetne. Ami a feltétel első felét (tényleges termelés) illeti, ott az a kitétel okozhat fennakadást, hogy „minden termékből van végső kibocsátás", hiszen rendszerint vannak olyan termékek, amelyekre a végső fogyasztásban nincs szükség. A *fiktív termelés* bevezetésével viszont ismét túl matematikaivá válik a feltétel. Hogyan lehetne eldönteni azt, hogy elképzelhető-e ilyen termelés? A kérdés eldöntése matematikai szempontból valóban egyenértékű $(E - A)$ invertálhatóságának megvizsgálásával. Érdemes még a feltétel kapcsán utalni arra, hogy bár explicite nem kötöttük ki, hogy a vizsgált gazdaságban *minden terméket termelnek*, a feltételből azonban ez következik.

A jelzett megkötést kívánta enyhíteni Gale az irreducibilitás fogalmának bevezetésével. Ebben az esetben már elegendő mindössze annyit feltenni, hogy legalább egy ágazat termékéből van végső kibocsátás. Az irreducibilitás (indekompozábilitás) fogalmát sokféleképpen definiálhatjuk és jellemezhetjük. Nem célunk ezekkel itt részletesen foglalkozni, a fogalmat nem eléggé ismerő olvasó számára ismét csak a már korábban jelzett irodalmakat, illetve MÓCZÁR J. [6] dolgozatát ajánlhatjuk. A további felhasználás számára közöljük az irreducibilitás egyik alternatív definícióját. E szerint egy A mátrix akkor irreducibilis, ha bármely i, j indexpár esetén van olyan $i = k_0, k_1, \ldots$ $\ldots, k_s = j$ indexsorozat, hogy $a_{k_t, k_{t+1}} > 0$ $(t = 0, 1, \ldots, s-1)$. Közgazdaságilag ez a feltétel annyit jelent, hogy bármely ágazat közvetlenül ($s = 1$) vagy közvetve ($s > 1$) igényli bármely másik ágazat termelését. Vagyis ahhoz, hogy valamely ágazat termelhessen, *minden* más *ágazatnak termelnie kell.* Az ágazatok (termékek) ilyen szoros, kölcsönös függőségének feltételezése, különösen termékek szintjén megfogalmazott modellek esetén ismét csak ellentétben van a valóságos megfigyelésekkel, mivel egy gazdaságban nyilvánvalóan lehetnek önálló ágazatcsoportok. Ismét megjegyezzük, hogy a látszólag enyhébb megkötéssel szemben a teljes termelés vektora most is csak határozottan pozitív lehet.

A fentiek miatt érdekesnek látszik megvizsgálni, vajon lehet-e Gale feltételeivel egyenértékű, közgazdasági oldalról kézenfekvőbb produktivitási kritériumokat megfogalmazni. A kérdés természetesen inkább elméleti, s nem gyakorlati szempontból érdekes. Részben emiatt is, vizsgálatunkat a marxi értékmeghatározás ismert input-output modelljének keretében végezzük el (lásd például BRÓDY A. [1] és MORISHIMA [7]). Meg fogjuk mutatni, hogy lehetséges Gale kritériumait általánosítani, illetve közgazdasági szempontból elfogadhatóbbakkal helyettesíteni. A két új kritérium az *öncélú termelés*, illetve a gazdaság teljes *automatizálhatóságának* szabatos fogalmain alapul. Egyidejűleg megmutatjuk azt is, hogy a tiszta árutermelés modelljében a bevezetendő kritériumok szükségképpen teljesülnek és egyben elégségesek a pozitív értékek létezésének igazolásához.

Produktivitás és öncélú termelés

Egy gazdaságban egy adott ágazatcsoportról akkor mondjuk, hogy *öncélú termelést* folytat, ha előállított termékeik nem haladják meg saját termelő felhasználásukat ugyanezen termékekből (külső igények kielégítéséről tehát szó sem lehet).

Egy x termelés esetén tehát akkor beszélünk öncélú termelésről, ha A-nak van olyan

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

dekompozíciója, hogy x-et is megfelelően particionálva azt kapjuk, hogy[1]

$$x_2 \leqq A_{22} x_2 \quad \text{és} \quad x_2 > 0. \tag{1}$$

[1] Két vektor közötti nagyságrendi relációk jelölésére $>$ (minden komponensében nagyobb), $\geq$ (nem kisebb és legalább egy komponensében nagyobb) és $\geqq$ (egyetlen komponensében sem kisebb) jeleket fogjuk használni.

Célszerű lesz közelebbről megvilágítani a bevezetett fogalmat. Nyilvánvaló, hogy ha egy gazdaságot zárt termelési modellben ábrázolunk, akkor az adott gazdaság természetszerűleg öncélú termelést folytat, s itt a fogalom nem párosul semmiféle negatív megítéléssel. Ha viszont a termelést szűken értelmezzük, s a termelés alapvető céljának a végső kibocsátás elérését tekintjük, a termelő fogyasztást pedig szükséges áldozatnak, akkor az öncélú termelést negatívan kell megítélnünk, olyan tevékenységnek, amely a felhasznált elsődleges erőforrásokat elpazarolja. Nyílt modellek esetében rendszerint ez utóbbi értelmezés a helyénvaló.

Meg lehet mutatni, hogy a termelő felhasználásánál (pótlásnál) többet termelő[2] gazdaságban az ágazatok egy (valódi) része csak akkor folytathat öncélú termelést, ha az A mátrix, azaz a gazdaság nem teljesen összefüggő (reducíbilis). Fordítva azonban ez nem szükségszerű. Egy reducíbilis gazdaságban — ezt az állítást be is fogjuk bizonyítani — nem folyhat öncélú termelés, ha minden ágazat közvetlenül vagy közvetve hozzájárul a végső kibocsátáshoz. Ez viszont jóval enyhébb feltétel, mint az irreducibilitás. Fennállhat ugyanis akkor is, amikor — szélsőséges esetet véve — a gazdaság egymástól *teljesen független* ágazatcsoportokra esik szét. Csupán annyit kell feltételeznünk, hogy ezen önálló ágazatcsoportok mindegyikének van valamiből végső kibocsátása, s ehhez az adott csoporton belül mindenki valamivel hozzájárul.

Már itt célszerű felhívni a figyelmet arra, hogy Gale kritériumai az öncélú termelés lehetőségét kizárják. Az általános esetben ez teljesen nyilvánvaló, hiszen minden ágazat termékéből van végső kibocsátás. A másik esetben viszont az irreducibilitás feltevése, mint tudjuk, éppen azt jelenti, hogy minden ágazat termékére szükség van, közvetlenül vagy közvetve, bármelyik ágazatból származó végső kibocsátás előállításához. Vagyis a gyenge produktivitás és az öncélú termelés hiánya Gale két kritériumának általánosítását szolgáltatja.

Megjegyzendő még a definíció kapcsán, hogy az (1) feltételből már az is következik, hogy az A_{22} mátrix domináns sajátértéke 1 vagy 1-nél nagyobb. Ez a sajátérték-tételekből ismert állítás, de könnyen igazolhatjuk is. Ha ugyanis a jelzett sajátérték 1-nél kisebb lenne, akkor $(E - A_{22})^{-1}$ létezne és nem-negatív lenne. Ezen inverzzel az (1) egyenlőtlenség $(E - A_{22})x_2 \leq 0$ alakját beszorozva $x_2 \leq 0$ egyenlőtlenséghez jutnánk, ellentétben feltevésünkkel. Ha viszont A_{22} domináns sajátértéke 1 vagy 1-nél nagyobb, akkor nem létezhet olyan p_2^* nem-negatív vektor, amelyre fennállna a $p_2^* > p_2^* A_{22}$ egyenlőtlenség.[3] Egy olyan gazdaságban, ahol minden áru termeléséhez szükség van (közvetlenül vagy közvetve) valamilyen pozitív árú elsődleges erőforrásra, például munkaerőre, mindez egyszersmind azt is jelenti, hogy nincs olyan árrendszer, hogy legalább egy ágazat ne legyen veszteséges. *Tiszta árutermelés viszonyai között tehát az öncélú termelés lehetősége* lényegében *kizárt.*

Mindezekből a fejtegetésekből is látszik már, hogy az *öncélú termelés hiánya* és a termelő rendszer *produktivitása* egymást szorosan feltételező fogalmak. Ezt fogjuk a következőkben bebizonyítani. Először egy fentebb már előrebocsátott állítást fogunk tétel formájában bizonyítani.

[2] Ezt a kritériumot gyenge technológiai produktivitásnak lehetne nevezni, mivel Gale mindkét feltétele magában rejti.

[3] Ez ugyanis éppen a Gale-féle produktivitási feltétel duális (gazdasági) változata, amiből az következne, hogy a nevezett sajátérték 1-nél kisebb.

1. *TÉTEL*: Egy (gyengén produktív) gazdaságban, ahol minden ágazat termel ($x > 0$) és van végső kibocsátás ($x \geq Ax$), akkor és csak akkor folyik öncélú termelés, ha a végső kibocsátást nem adó ágazatok között vannak olyanok, amelyek termelését egyetlen végső kibocsátó ágazat sem igényli, sem közvetlenül, sem közvetve.

Bizonyítás: Nyilván elegendő azt megmutatni, hogy azok és csak azok az ágazatok alkotnak öncélú termelést folytató ágazatcsoportot, amelyek termelésére a végső kibocsátást adó ágazatok nem támasztanak sem közvetlenül, sem közvetve igényt.

Legyen I_0 a végső kibocsátó ágazatok indexeinek halmaza. Ilyen ágazatok definíció szerint nem folytathatnak öncélú termelést. Legyen I_1 azon nem végső kibocsátó ágazatok indexhalmaza, amelyek közvetlenül vagy közvetve „szállítanak" a végső kibocsátóknak. Azaz $j \in I_1$ akkor és csak akkor, ha $j \notin I_0$ és van olyan $j = j_0, j_1, \ldots, j_k$ index sorozat, hogy $j_k \in I_0$ és $a_{j_t, j_{t+1}} > 0$ ($t = 0, 1, \ldots, k-1$). Nyilvánvaló, hogy az I_1-be tartozó ágazatok sem tartozhatnak öncélú ágazatcsoporthoz.

Öncélú termelést folytató ágazatok tehát csak az $N - (I_0 \cup I_1)$ ágazatok között lehetnek, ahol $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ha tehát öncélú termelés folyik, akkor szükségképpen kell lenni olyan ágazatoknak, amelyek sem közvetlenül, sem közvetve nem járulnak hozzá a végső kibocsátáshoz.

Most megmutatjuk, hogy a fennmaradó ágazatok valóban egy öncélú termelést folytató csoportot képeznek. Ehhez vegyük figyelembe, hogy $a_{ij} = 0$ minden $i \in N - (I_0 \cup I_1)$ és $j \in I_0 \cup I_1$ esetén.

Ha ugyanis a_{ij} pozitív lenne, akkor az i-edik ágazat közvetlenül szállítana vagy egy végső kibocsátónak, vagy egy olyan ágazatnak, amelyik közvetlenül vagy közvetve szállít végső kibocsátó ágazatnak. Akármelyik eset áll is elő, az i-edik ágazat közvetlenül vagy közvetve szállítója lenne valamelyik végső kibocsátónak, így feltevésünkkel ellentétben az I_1 halmazban lenne.

Partícionáljuk most az A mátrixot és az x vektort az alábbiak szerint:

$$A_{22} = \{a_{ij} : i, j \in N - (I_0 \cup I_1)\}$$

$$x_2 = \{x_i : i \in N - (I_0 \cup I_1)\}.$$

Az $x \geq Ax$ összefüggés miatt, továbbá mivel $A_{21} = 0$ azt kapjuk, hogy

$$x_2 \geq A_{22} x_2$$

De mivel ezen ágazatoknak nincs végső kibocsátása, ezért

$$x_2 = A_{22} x_2,$$

vagyis valóban öncélú termelést folytató ágazatokról van szó.[4] Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A teljes automatizálhatóság kritériumával való későbbi összehasonlítás végett fel kívánjuk hívni az olvasó figyelmét egy érdekes strukturális jellegzetességre. Nevezetesen arra, hogy egy gyengén produktív és öncélú termelést folytató gazdaságban van olyan ágazatcsoport (I_2), amely esetében $A_{21} = 0$

[4] Az ilyen termelőrendszert Gale [2] kvázi-produktív gazdaságnak nevezi (a mi fogalmainkkal *csak gyengén produktív* gazdaságról beszélhetnénk).

és a nettó kibocsátás megfelelő alvektora $x_2^0 = 0$. Látni fogjuk majd, hogy teljes automatizálhatóság esetén ennek duális megfelelőjét fogjuk kapni.

Valós megfigyelésen alapuló AKM-ek esetében nyilván minden ágazat termel ($x > 0$), s ha a munkaerő-szektor nem szerepel az ágazatok között, akkor kell lennie végső kibocsátásnak is. Azt viszont nem lehet garantálni, hogy minden ágazat nettó kibocsátása nem-negatív, ugyanis a külső források (készlet, import) igénybevétele egyes ágazati kibocsátások esetében meghaladhatja a külső fogyasztást. Ha azonban a ***tényleges*** termelés *vagy* (változatlannak tekintett fajlagos ráfordítások mellett) valamilyen *fiktív* termelés akkora, hogy minden ágazat nettó kibocsátása nem-negatív és néhányé pozitív, akkor az öncélú termelés hiánya biztosítja A nem-negatív Leontief-inverzének létezését. Ezt fogalmazzuk meg és bizonyítjuk be az alábbiakban.

2. *TÉTEL:* Tegyük fel, hogy az A fajlagos ráfordítási együtthatókkal jellemzett, gazdaságban minden ágazat termel ($x > 0$), és minden ágazat nettó kibocsátása nem-negatív, néhányé pozitív (azaz a gazdaság gyengén produktív):

$$x \geq Ax, \tag{2}$$

továbbá a gazdaságban nem folyik öncélú termelés. A fenti gazdaság A mátrixának létezik nem-negatív Leontief-inverze. Általában pedig, ha A-nak van nem-negatív L-inverze, akkor az adott ráfordítási együtthatók mellett nem képzelhető el öncélú termelés.

Bizonyítás: A tétel első felének bizonyításához azt fogjuk megmutatni, hogy A domináns sajátértéke 1-nél kisebb, amiből már — mint ismert (lásd a Perron—Frobenius-tételeket) — következik állításunk helyessége.

Mivel $x > 0$, ezért tetszőleges 1-nél nagyobb k esetén azt kapjuk, hogy

$$kx > Ax.$$

A Perron—Frobenius-tételekből következik,[5] hogy $\lambda(A)$ (az A mátrix domináns sajátértéke) ezen k értékeknél csak kisebb lehet.

Meg kell még mutatni, hogy $\lambda(A)$ nem lehet 1 sem. Indirekt úton bizonyítunk. Ha 1 az A mátrix domináns sajátértéke lenne, akkor tartozna hozzá szemipozitív x_0 sajátvektor, amely tehát kielégítené az alábbi egyenlőséget:

$$x_0 = Ax_0. \tag{3}$$

A (2) és (3) összefüggések összevetéséből közvetlenül belátható, hogy x és x_0 arányaiban szükségképpen eltér. Éppen ezért van olyan pozitív α skalár, amely esetén az alábbi szabály szerint képzett x_α vektor szemipozitív, de nem lesz határozottan pozitív:

$$x_\alpha = x - \alpha x_0.$$

Ugyancsak a (2) és (3) feltételek miatt azt kapjuk, hogy

$$x_\alpha - Ax_\alpha = x - Ax,$$

azaz x_α ugyanazt a végső kibocsátást eredményezi, mint x. Ugyanakkor néhány ágazat x_α esetében egyáltalán nem termel. Ez csak akkor fordulhat elő, ha

[5] Lásd például NIKAIDO [9], HEGEDÜS M.—ZALAI E. [4].

ezen ágazatok termelését az adott végső kibocsátást előállító ágazatok sem közvetlenül, sem közvetve nem igénylik. Így az 1. tétel értelmében ezek az ágazatok x esetében öncélú termelést folytattak volna, ez pedig feltevésünknek ellentmondana.

Ami a tétel második felét illeti, azt kell megmutatnunk, hogy A-nak nem lehet olyan

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

dekompozíciója, hogy az

$$x_2 \leqq A_{22} x_2 \tag{4}$$

egyenlőtlenségnek legyen pozitív megoldása. Ez jelentené ugyanis az öncélú termelés lehetőségét.

Korábban már megmutattuk, hogy a (4) egyenlőtlenség pozitív megoldásából az következne, hogy A_{22} domináns sajátértéke nagyobb vagy egyenlő 1-gyel. Ebből viszont az következne, hogy A domináns sajátértéke is nagyobb vagy egyenlő 1-gyel,[6] azaz A-nak nem lenne nemnegatív Leontief-inverze. Ez pedig feltevésünknek ellentmondana. A bizonyítást ezzel befejeztük.

Produktivitás és teljes automatizálhatóság

A teljes automatizálhatóság fogalmát egzakt formában, tudomásunk szerint először MORISHIMA és CATEPHORES [8] használta egy Neumann-gazdaság keretében. Vezessük be először is az m^* vektort a fajlagos munkaráfordítások jelölésére.

Egy A és m^* ráfordítási fajlagosokkal jellemzett gazdaságot akkor nevezünk *teljesen automatizálhatónak*, ha a termelő szféra képes legalább a saját termelő felhasználásával egyenlő termékmennyiséget előállítani munkaerő felhasználása nélkül. Azaz, ha van olyan szemipozitív x vektor, amely esetében $Ax \leqq x$ és $m^* x = 0$.

Könnyen belátható, hogy a teljes automatizálhatóságnak szükséges feltétele, hogy vagy $m^* = 0^*$ legyen vagy az A és m^* fejlagos ráfordítási együtthatóknak legyen alábbi jellegű particiója:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$(m_1^* \quad 0^*),$$

ahol tehát a második ágazatcsoport egyáltalán nem igényel munkaráfordítást. Teljes automatizáltság esetén ugyanis csak olyan ágazatcsoportba tartozó árukat termelhetnek, amelyek sem közvetlenül, sem közvetve nem igényelnek munkaráfordítást.

Összevetve a fentit az öncélú termelés esetére megfogalmazott 1. tétel következményével, látható, hogy a teljes automatizálhatóság fogalma számos

[6] Egy nemnegatív mátrix domináns sajátértéke ugyanis nem lehet kisebb egyetlen minorjának domináns sajátértékénél sem. Lásd például NIKAIDO [9].

tekintetben az előbbi duálisának tekinthető. Ez a dualitás azonban csak strukturálisan áll fenn, hiszen a teljes automatizálhatóság egy gyengén produktív alrendszert feltételez, míg az öncélú termelés fennállása, mint láttuk, egy improduktív alrendszer létét implikálta. A két feltétel tehát korántsem egyenértékű. A marxi értékek elemzése esetében a teljes automatizálás lehetőségét mindenképpen ki kell zárnunk (munka nélkül működő gazdaságban a munkaértékek fogalma értelmetlenné válik). Látni fogjuk majd viszont, hogy ennek kizárása milyen hatásos: mind az értékek létezését mind a pozitivitását biztosítja. Mielőtt azonban ennek tárgyalására áttérnénk, célszerű külön megvizsgálni a teljes automatizálhatóság egyes sajátos tulajdonságait.

Fentebb jeleztük már a teljes automatizálhatóság egy szükséges feltételét. Most külön tételben megmutatjuk, hogy produktív A mátrix esetén a jelzett strukturális sajátosság szükséges és elégséges feltétele a teljes automatizálhatóságnak.

3. TÉTEL: Egy A és m^* nem-negatív ráfordítási együtthatókkal jellemzett produktív gazdaság akkor és csak akkor automatizálható teljesen, ha az áruknak (ágazatoknak) van egy olyan csoportja, amelyek termeléséhez sem közvetlenül, sem közvetve nincs szükség munkaerőre.

Bizonyítás: Elégségesség. Legyen N az összes, I_2 pedig azon áruk (ágazatok) indexeit tartalmazó halmaz, amelyek termeléséhez nincs munkaerőre szükség. Ha $I_2 = N$, akkor $m^* = 0^*$ és így a produktivitás feltételéből következik már a teljes automatizálás lehetősége. Ha $I_2 \neq N$ (feltevésszerűen nem lehet üres sem!), akkor A-t és m^*-ot $I_1 = N - I_2$ és I_2 indexhalmazoknak megfelelően partícionálva beláthatjuk egyrészről azt, hogy $m_2^* = 0^*$, másrészről azt, hogy $A_{12} = 0$. Ellenkező esetben ugyanis az I_2-be tartozó áruk valamelyikének vagy közvetlenül, vagy közvetve lenne munkaerő-igénye. Mivel pedig A produktív, azaz domináns sajátértéke 1-nél kisebb, ezért A_{22} minorja is produktív. Ebből már egyszerűen belátható, hogy található olyan $x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ vektor, amelyben x_2 pozitív, $x \geq Ax$ és $m^*x = 0$.

Szükségesség. Legyen x a teljes automatizálhatóságot eredményező termelési vektor és tegyük fel, hogy az ágazatok sorrendje olyan, hogy a felsorolásban elöl szerepelnek a nem termelő ($x_1 = 0$) ágak, hátul a termelő ágak ($x_2 > 0$). Ennek megfelelően partícionálva az együttható mátrixot, illetve vektort azt kapjuk, hogy $m_2 = 0$ illetve $A_{12} = 0$. Ebből pedig már állításunk helyessége közvetlenül kiolvasható. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A következő két tételt úgy tekintjük mint Marx intuitív fogalomhasználatának matematikai igazolását. Egyszerűen fogalmazva arról van szó, hogy egy olyan tiszta árutermelő gazdaságban, amely a munkaerőt nem nélkülözheti, a ráfordítási fajlagosok mátrixa szükségképpen produktív és minden árunak egyértelműen meghatározott, pozitív munkaértéke van.

4. TÉTEL: Ha a vizsgált gazdaságban tiszta árutermelés folyik, azaz az érvényes árak ($p_a > 0$) és bér ($w_a > 0$) mellett egyetlen áru termelése sem veszteséges ($p_a^* \geq p_a^* A + w_a m^*$), továbbá a gazdaságot nem lehet teljesen automatizálni, *akkor* a gazdaság fajlagos ráfordítási mátrixa (A) szükségképpen produktív.

Bizonyítás: Az a tény, hogy egyetlen áru termelése sem volt veszteséges, azt is jelenti, hogy az árak nem lehetnek kisebbek az anyagköltségeknél, azaz

$$p_a^* \geq p_a^* A. \tag{5}$$

Sőt, határozott egyenlőség sem állhat fenn mindenhol, mert akkor a pozitív munkabér miatt veszteséggel állítanák elő azon árukat, amelyek (közvetlenül) felhasználnak munkaerőt. Munkarőt pedig valahol használni kell, különben teljesen automatizált gazdaságról lenne szó. Az (5) egyenlőtlenségből és p_a pozitivitásából következik, hogy A domináns sajátértéke 1-nél nem lehet nagyobb. Most megmutatjuk, hogy nem lehet 1 sem. Ha ugyanis 1 lenne, akkor lenne olyan szemipozitív $\hat{p}$ vektor, amely kielégítené az alábbi sajátérték-egyenletet:

$$\hat{p}^* = \hat{p}^* A. \tag{6}$$

Belátható, hogy p_a és $\hat{p}$ arányaiban szükségképpen eltér egymástól (mivel az (5) feltétel nem lehet tiszta egyenlőség), ezért van olyan pozitív és egyértelműen meghatározott α, amely mellett a

$$p_\alpha = p_a - \alpha \hat{p}$$

vektor nem-negatív , de legalább egy elemében 0. Az (5) és (6) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$p_\alpha^* \geq p_\alpha^* A, \tag{7}$$

továbbá a nyert egyenlőtlenség-rendszerben ott és csak ott szerepelhet egyenlőség (illetve egyenlőtlenség), ahol az (5) rendszerben. Legyen mármost

$$I_2 = \{i : p_{\alpha i} = 0\}, \qquad I_1 = N - I_2,$$

s partícionáljuk a változókat és feltételeket ezen indexhalmazoknak megfelelően. Ekkor a (7) egyenlőtlenségek I_2-be tartozó részére azt kapjuk, hogy

$$0^* = p_{\alpha_2}^* \geq p_{\alpha_1}^* A_{12} + 0^* A_{22} \geq 0^*.$$

Ebből következik egyrészt az, hogy $A_{12} = 0$, másrészt pedig az, hogy az I_2-be tartozó feltételek (5)-ben is egyenlőségek voltak, azaz:

$$p_{a2}^* = p_{a2}^* A_{22}.$$

Most már majdnem célnál vagyunk. Mivel az I_2-be tartozó áruk termelése sem volt veszteséges, ezért ott nem használhattak fel (közvetlenül) munkaerőt, azaz $m_2^* = 0^*$. Másfelől A_{22} az A mátrix minorja, így A_{22} domináns sajátértéke sem lehet 1-nél nagyobb. A kapott egyenlőség tehát éppen azt mutatja, hogy A_{22}-nek az 1 domináns sajátértéke. Ezért tartozik hozzá szemipozitív x_2 sajátvektor ($x_2 = A_{22} x_2$). Mivel $A_{12} = 0$, $m_2^* = 0^*$, ezért az $x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ termelési szintvektor mellett a gazdaság teljesen automatizált lenne. Ez pedig feltevésünknek ellentmondana. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A munkaértékek létezése és pozitivitása

Jeleztük, hogy az új feltételekkel részben az volt a célunk, hogy a vizsgált modell keretei között a marxi értékek létezésének és pozitivitásának minél kézenfekvőbb és általánosabb kritériumait fogalmazhassuk meg. Tulajdonképpen most már minden szükséges feltétel rendelkezésünkre áll a kritériumok tételszerű megfogalmazásához. Célszerű azonban előtte röviden megvilágítani a kérdés közgazdasági hátterét.

Korábban már utaltunk arra, hogy egy gazdaság teljes automatizálhatósága nem csak utópia, de szöges ellentétben is áll magával a munkaérték fogalmával. Ezt a lehetőséget tehát mindenképpen ki kell zárnunk, de ez semmi tényleges megkötést nem jelent.

A fenti feltétel mellett még szükségünk van valamilyen formában az A mátrix produktivitását biztosító feltételekre. Ezt, a korábbiak alapján, kétféleképpen fogalmazhatjuk meg. Az öncélú termelés hiányának és a pótlást meghaladó termelés létezésének feltételezése a gazdaság produktivitását *technológiai oldalról* biztosítaná. Joggal felvethető azonban az az ellenérv, hogy egy valós gazdaságban sohasem pótolják természetben teljesen az elhasznált anyagi eszközöket. Ez a feltételezés tehát meglehetősen elvont, ezen még az sem segít, ha itt Marxra hivatkozunk, aki a bővített újratermelést úgy tárgyalja, mint amelyik tartalmazza az egyszerű újratermelés mozzanatát. Sokkal kézenfekvőbb tehát a másik út, amelyet a tiszta árutermelés szükségszerű kritériuma tesz lehetővé. Nevezetesen az a feltevés, hogy ne legyen veszteséges egyetlen áru termelése sem. Ez a feltétel a teljes automatizálás lehetetlenségével együtt *gazdasági oldalról* biztosítja A mátrix produktivitását. A teljesség kedvéért az alábbi tételben mindkét feltételt közöljük.

5. TÉTEL: Tekintsünk egy A és m nem-negatív fajlagos ráfordításokkal jellemzett gazdaságot. Legyen $x_a > 0$ a teljes termelés tényleges nagysága, $p_a > 0$ a tényleges árak vektora, $w_a > 0$ a tényleges munkabér. A fenti gazdaságban az értékek egyértelműen meghatározottak és pozitívak, ha a gazdaság *nem automatizálható teljesen* és teljesül az alábbi feltételek közül *valamelyik:*

i) A gazdaságban *nem* folyt *öncélú termelés*, és minden áruból legalább annyit termeltek, mint amennyit a termelésben azokból felhasználtak, valamint legalább egy áruból jutott nem termelő fogyasztásra is *(pótlást meghaladó termelés)*.

ii) A gazdaságban *egyetlen áru termelése sem volt veszteséges.*[7]

Bizonyítás: Mivel vagy a 2. vagy a 4. tétel feltételei teljesülnek, ezért az A mátrix szükségképpen produktív. Az értékek vektora (p) tehát egyértelműen meghatározható az alábbi képlet alapján (lásd, például BRÓDY A. [1]):

$$p^* = m^*(E - A)^{-1}.$$

Az A mátrix produktivitása és a ráfordítási együtthatók nem-negativitása miatt p szükségképpen nem-negatív. Be kell még látnunk, hogy p nemcsak

[7] Természetesen az iparágak átlagában értendő, hogy egyetlen áru termelése sem veszteséges. Egyes egyéni termelők termelhetnek veszteséggel.

nem-negatív, de határozottan pozitív vektor. Tegyük fel, hogy p valamelyik komponense, mondjuk az i-edik, nulla lenne, azaz

$$p_i = m^*(E - A)^{-1} e_i = 0.$$

ahol e_i az i-edik n-ed rendű egységvektor.

Az $x_i = (E - A)^{-1} e_i$ olyan termelési vektorként értelmezhető, amely esetén egyrészt az előállított termékmennyiség a pótlás igényét meghaladja, másrészt munkaerő felhasználását nem igényli. Mindez viszont ellentétben állna feltevésünkkel, amely szerint a gazdaság nem automatizálható teljesen. Ezzel a bizonyítást befejezzük.

Végeredményben tehát Bródy A., Morishima és mások a marxi érték-, ár- és újratermelési elmélet matematikai megfogalmazásaiban teljes joggal feltételezhették az A mátrix produktivitását.

(Beérkezett: 1981. november 4-én)

IRODALOM

1. BRÓDY A.: *Érték és újratermelés.* Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. GALE, D.: *The theory of linear economic models.* New York, 1960. Mc Graw Hill.
3. HAWKINS, D.—SIMON, H. A.: „Note: Some conditions of macroeconomic stability", *Econometrica 17,* No. 3—4.
4. HEGEDÜS M.—ZALAI E.: *Fixpont és egyensúly a gazdasági modellekben.* Budapest, 1978. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
5. KREKÓ B.: *Lineáris algebra.* Budapest, 1976. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
6. MÓCZÁR J.: „A dekompozábilitás kiterjesztése a gazdaság lineáris modelljeiben", *Szigma,* 1980. 1—2. sz.
7. MORISHIMA, M.: *Marx's Economics.* Cambridge, 1973. Cambridge University Press.
8. MORISHIMA, M.—CATEPHORES, G.: *Value, exploitation and growth.* London, 1978. Mc Graw Hill.
9. NIKAIDO, H.: *Convex structures and economic theory.* New York, 1968. Academic Press.
10. ROBINSON, S. M.: „Irreducibility in the von Neumann model", *Econometrica 41,* No.3.
11. RÓZSA P.: *Lineáris algebra és alkalmazásai.* Budapest, 1974. Műszaki Könyvkiadó.

TWO ECONOMIC CRITERIA FOR THE EXISTENCE OF NONNEGATIVE LEONTIEF INVERSE

The productivity of the input-output coefficient matrix (A) plays crucial role in both the theoretical and applied input-output analysis. This ensures the existence of the Leontief inverse, $(I-A)^{-1}$. There are several productivity criteria known in the literature, among them two criteria proposed by Gale. This paper provides two new criteria based on the exact concepts of selfserving production and full-automation. They can be viewed as dual concepts and extensions of Gale's criteria. In the context of the Marxian value model it will be shown that these new conditions trivially hold and provide sufficient basis for the existence and positivity of labor values.

ДВА ЭКОНОМИЧЕСКИХ КРИТЕРИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕНЕГАТИВНОЙ ИНВЕРСИИ ЛЕОНТЬЕВА

В теоретических и практических исследованиях, проводимых с помощью модели затраты-выход, важная роль принадлежит матрице коэффициента затрат (A) инверсии Леонтьева $(E-A)^{-1}$. Из экономических и математических условий существования (продуктивности) инверсии наиболее известны условия продуктивности Гейла. В статье формулируются два новых условия, равнозначных и отчасти обобщающих критерии Гейла. Два условия основаны на парных понятиях, находящихся в дуалистическом отношении между собой, — четких понятиях производства как такового и полной автоматизации. Одновременно показывается, что ценностная модель Маркса (предполагающая чисто товарное производство) необходимо отвечает новым условиям, которые одновременно также служат достаточными критериями существования положительной стоимости.