Török Tamás

A következetes rangsorolás egy új értelmezése

1. Bevezetés

Tételezzünk fel különböző alternatíváknak egy n elemű $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ halmazát, melynek elemei összehasonlíthatók egy közös T tulajdonságuk alapján.

Bármely $x_i, x_j \in X$ esetén az x_i alternatívát *preferálhatjuk* az x_j alternatívával szemben; jele; x_iPx_j, x_i-t és x_j-t *indifferensnek* minősíthetjük; jele: x_iIx_j, vagy x_j-t preferáljuk x_i-vel szemben. Ha x_iPx_j vagy x_iIx_j, akkor ezt x_iRx_j jelöli. Az R tehát egy bináris reláció $X \times X$-en.

Tartalmi szempontból a preferálás egyszerűen előnyben részesítést jelent, vagyis x_i-t akkor preferáljuk x_j-vel szemben, ha a T tulajdonság szerint kedvezőbbnek ítéljük. Az x_i és az x_j indifferens megítélése nem jelenti a két alternatíva feltétlen azonosságát; csupán azt, hogy nem tudunk különbséget tenni x_i és x_j között a T tulajdonság alapján.

Például különböző tárgyak súly szerinti összehasonlításakor indifferensnek ítélhetünk két tárgyat, ha a valóságos (mérleg szerinti) súlykülönbség kisebb, mint az általunk érzékelhető minimális súlykülönbség.

Ha valamennyi (x_i, x_j) alternatíva-párt összehasonlítottunk, és megadtuk az x_iPx_j, x_iIx_j, x_jPx_i relációk valamelyikét (vagyis, ha R teljes és kapcsolt), akkor rendelkezésünkre áll egy $\langle X \times X, R \rangle$ relációs struktúra. Felmerül a következő kérdés: milyen esetben nevezzük *racionálisnak, következetesnek* az $\langle X \times X, R \rangle$ struktúrát, és hogyan definiáljuk az alternatívák rangsorát?

Ennek a kérdésnek a megválaszolása, az alternatíva-páronkénti összehasonlításokon alapuló értékrend következetességének definiálása nemcsak önmagában érdekes és lényeges probléma, hanem a csoportos döntések, a társadalmi választások vizsgálatában is [1, 4, 5].

Ebben a cikkben *a P és I reláció valóságos tartalmából kiindulva* (formális definiálásuk nélkül) *a következetes rangsorolás egy új értelmezését adjuk.*

2. A szakirodalmi előzmények rövid elemzése

A szakirodalomban a következetességet Kendall [3] javaslatára alternatíva-hármasok tranzitivitásával azonosítják [1—5]. Az (x_i, x_j, x_k) hármas páronkénti összehasonlításakor az alábbi:

(1) a) $(x_iPx_j \,\&\, x_jPx_k) \rightarrow x_iPx_k$

b) $(x_iIx_j \,\&\, x_jIx_k) \rightarrow x_iIx_k$

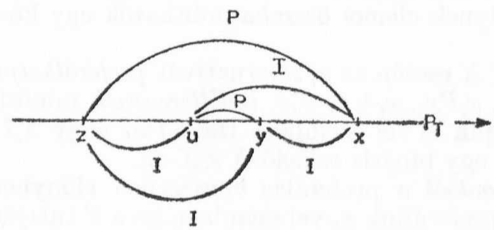
implikációk teljesülését várják el, tehát a P és az I tranzitivitását egyaránt.

Nevezzük az $\langle X \times X, R \rangle$ struktúrát *R-tranzitívnak*, ha valamennyi x_i, x_j, $x_k \in X$ esetén teljesül (1). Ez a racionalitási kritérium szerepel a társadalmi választás ARROW-féle modelljében is [1].

Az R-tranzitivitás (1.b) elvárása túl erősnek tűnik, ugyanis az indifferencia-reláció ily módon elveszíti valóságos tartalmát; tulajdonképpen egyenlőséget jelent, és nem tűr meg egy „megkülönböztethetetlenségi tartományt".

Igaz, hogy a valós számok körében értelmezett „$\geq$" reláció tranzitivitásának „átültetése" a P és I relációra kézenfekvő, de valójában nem a számokról kívánunk felvilágosítást szerezni, hanem a dolgokról.

Az I reláció tartalmi „megmentését" célozza az alternatíva-hármasok *kvázi-tranzitivitása*, amikor csak az (1.a) P-tranzitivitást várjuk el és megengedjük, hogy $x_i I x_j$ és $x_j I x_k$ esetén $x_i P x_k$ is előfordulhasson [4, 5].



1. ábra

Vagyis indifferenciák egymásutánjából preferencia is következhet.

Például A és B, valamint B és C súlyát nem tudjuk megkülönböztetni, de az A és C közötti súlykülönbséget már érzékeljük.

Nevezzük az $\langle X \times X, R \rangle$ struktúrát *Q-tranzitívnak*, ha valamennyi x_i, x_j, $x_k \in X$ esetén teljesül (1.a).

A Q-tranzitivitás látszólag tartalmi és formai szempontból is a következetesség elfogadható értelmezésének tűnik. Valójában nem az, ugyanis sajátos belső ellentmondást hordoz. Ennek bemutatására vegyük azt a négyelemű $X = \{x, y, z, u\}$ alternatíva-halmazt, amelyre a páronkénti összehasonlítások:

$$xIy,\ xPz,\ xIu,\ yIz,\ yPu,\ zIu.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy valamennyi alternatíva-hármas P-tranzitív, tehát az $\langle X \times X, R \rangle$ struktúra Q-tranzitív.

Ha azonban egy P_T preferencia-skálán ábrázoljuk az alternatívákat, akkor az xPz, xIy és yIz relációkból következik, hogy y az x és a z között helyezkedik el. Ehhez hasonlóan az xPz, zIu és xIu relációk következménye u helye x és z között. (Lásd az 1. ábrát.)

Mégis yPx, ami azt jelenti, hogy egy indifferencia-tartományba: (y, z) preferencia-tartomány: (y, u) esett. Hasonló eredményhez jutnánk u és y fordított elhelyezésével.

Ez a furcsa paradoxon pedig nyilván nem kívánatos.

Megjegyzés: Az alternatíváknak preferencia-skálán való elhelyezhetőségét az indokolja, hogy egyparaméteres (a T tulajdonság szerinti) összemérési problémáról van szó. Az más kérdés, hogy abban az esetben, amikor a T tulajdonság esetleg több: $T_1, \ldots, T_k$ elemi tulajdonság együttese, akkor célszerű-e vagy helyes-e mégis az összetett T tulajdonság alapján rangsorolni. Ezzel a problémával a jelen cikkben nem foglalkozunk. Csupán példaként jegyezzük meg, hogy elnökválasztásnál a jelölők egyetlen szempontja a jelöltek „alkalmassága". Nyilván az alkalmasságnak is számtalan kritériuma van, ennek ellenére a szavazási formák – valószínűleg egyszerűségük miatt – egydimenziósak. A fentiek alapján jogtalan lenne tehát az alternatívák síkbeli vagy térbeli elhelyezése (bár feloldaná a bemutatott paradoxont), mert ez azt jelentené, hogy egyetlen tulajdonságnak több iránya létezik.

3. A következetes rangsorolás egy új értelmezése

Ebben a fejezetben a következetes rangsorolás egy olyan értelmezését kívánjuk megadni, amely nem alternatíva-hármasok tranzitivitására épül, hanem egyidejűleg veszi figyelembe valamennyi (x_i, x_j) alternatíva-párra megadott relációt, valamint feloldja a kvázi-tranzitivitás paradoxonát. Szükségünk lesz az alábbi jelölésekre:

$$x_i \in X;\quad E(x_i) = \{x_j\colon x_i P x_j;\ x_j \in X\} \tag{2}$$
$$H(x_i) = \{x_k\colon x_k P x_i;\ x_k \in X\}.$$

Az $E(x_i)$ és $H(x_i)$ halmazokat nevezhetjük az x_i alternatíva *előny-*, ill. *hátrány-halmazainak.*

Ezekután egy $\langle X \times X, R\rangle$ struktúrát *G-tranzitívnak* nevezünk, ha az $\{1, 2, \ldots, n\}$ elemeknek létezik olyan $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ permutációja, amelyre:

$$E(x_{i_1}) \supseteq E(x_{i_2}) \supseteq \ldots \supseteq E(x_{i_n}) \tag{3}$$
$$H(x_{i_1}) \subseteq H(x_{i_2}) \subseteq \ldots \subseteq H(x_{i_n}).$$

Akkor mondjuk, hogy az alternatívák rangsorolása következetes (ezen új értelmezés szerint), *ha az* $\langle X \times X, R\rangle$ *struktúra G-tranzitív* (globálisan tranzitív).

Egyszerű megfontolásokból következik az alábbi két állítás:

(4) Ha $\langle X \times X, R\rangle$ R-tranzitív, akkor G-tranzitív is.

(5) Ha $\langle X \times X, R\rangle$ G-tranzitív, akkor Q-tranzitív is.

Láthatjuk tehát, hogy a G-tranzitivitás erősség szempontjából a szokásos R-tranzitivitás és a Q-tranzitivitás között van.

Az alternatívák rangsorának értelmezéséhez (G-tranzitivitás esetén) bevezetünk két új relációt:

(6) $x_i I^* x_j$ akkor és csak akkor, ha:

a) $x_i I x_j$

és b) $E(x_i) = E(x_j)$ & $H(x_i) = H(x_j)$.

(7) $x_i P^* x_j$ akkor és csak akkor, ha:

a) $x_i I x_j$

és b) $[E(x_i) \supset E(x_j)$ & $H(x_i) \subseteq H(x_j)] \vee [E(x_i) = E(x_j)$ & $H(x_i) \subset H(x_j)]$, Nyilván igaz az alábbi három egyszerű megállapítás:

(8) a) $x_i I^* x_j \rightarrow x_j I^* x_i$

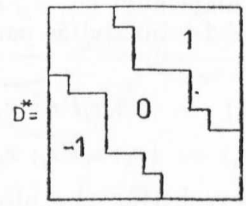
b) $x_i P^* x_j \rightarrow (\sim x_j P^* x_i)$

c) $x_i I x_j \rightarrow (x_i I^* x_j \vee x_i P^* x_j \vee x_j P^* x_i)$,

Ha egy $\langle X \times X, R \rangle$ struktúra G-tranzitív, akkor a most bevezetett relációk alapján az alternatívák rangsora:

(9) $$x_{i_1} G^* x_{i_2} G^* \ldots G^* x_{i_n}, \text{ ahol } G^* \in \{P, P^*, I^*\}.$$

Megjegyzés: Nem állítjuk, hogy $x_i P^* x_j$ esetén x_i „jobb”, mint x_j, hiszen ebben az esetben $x_i I x_j$ a megadott reláció. Az azonban biztos, hogy x_i előnyhalmaza bővebb, vagy hátrányhalmaza szűkebb, mint x_j-é. Az x_i tehát dominálja az x_j-t.



2. ábra

Rendkívül nehézkes lenne a G-tranzitivitás gyakorlati ellenőrzése a (3) definíció alapján, különösen az alternatívák nagy száma esetén. Ezért egy újabb fogalmat vezetünk be.

Az $n \times n$-es $D = (d_{ij})_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{n}$ *döntési mátrixot* a következőképpen értelmezzük:

(10) $$d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ha } x_i P x_j \\ 0, \text{ ha } x_i I x_j \\ -1, \text{ ha } x_j P x_i . \end{cases}$$

Egy D döntési mátrixot nevezzünk G-tranzitívnak, ha az alternatívák felcserélhetők úgy, hogy az így kapott D^* mátrix rendelkezik a következő tulajdonságokkal (lásd a 2. ábrát is):

(11) a) A főátló felett csak 0 vagy 1 szerepel

b) Ha egy sorban valamelyik elem $+1$, akkor az összes utána következő is az

c) A $+1$-esek száma a sorok sorrendjében nem növekvő.

Megjegyzés: D-ben az x_i és x_j alternatíva felcserélése az x_i-nek és az x_j-nek megfelelő sor és oszlop felcserélését jelenti.

Könnyen ellenőrizhető az alábbi állítás igazsága:

(12) Egy $\langle X \times X, R \rangle$ struktúra akkor és csak akkor G-tranzitív, ha a hozzá tartozó D döntési mátrix is az.

Jelölje $x_i \in X$ esetén $e(x_i)$ az $E(x_i)$ halmaz számosságát, $h(x_i)$ pedig a $H(x_i)$-ét. Egyszerű okoskodással belátható, hogy:

(13) Egy D döntési mátrix akkor és csak akkor G-tranzitív, ha D-t az $e(x_i) - h(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ különbségek csökkenő sorrendjében átrendezve D^* alakú mátrixot kapunk.

Ez utóbbi állítás lehetővé teszi a G-tranzitivitás egyszerű és konstruktív ellenőrzését. Lássunk erre egy példát. Az alternatíva-halmaz legyen $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$, a hozzá tartozó döntési mátrix pedig:

$$
D = \begin{array}{c|cccccccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
5 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
9 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
10 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

$$e - h = (7, 3, 7, 1, -1, -6, 6, -8, -2, -7)$$

Ezt a vektort rendezzük csökkenő sorrendbe (13) értelmében és ennek alapján D-t hozzuk a következő alakra:

$$
D^* = \begin{array}{c|cccccccccc|}
 & 1 & 3 & 7 & 2 & 4 & 5 & 9 & 6 & 10 & 8 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
4 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
5 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
9 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
10 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

D^* pedig eleget tesz a (11) követelménynek, tehát a kiindulási D döntési mátrix G-tranzitívnak bizonyult. Ugyanakkor D nem teljesíti a szokásos R-tranzitivitást (pl. $2I4$, $4I5$ és mégis $2P5$).

Az alternatívák rangsora:

$$1I^*\,3P^*\,7P^*\,2P^*\,4P^*\,5P^*\,9P\,6P^*\,10P^*\,8\,.$$

(Beérkezett: 1981. november 10-én.)

IRODALOM

[1] ARROW, K. J.: *Social choice and individual values*. New York, Wieley, 1963., 2. ed.
[2] DAVID, H. A.: *The method of paired comparisons*. London, Griffin, 1976.
[3] KENDALL, M. G.: *Rank correlation methods*. London, Griffin, 1970.
[4] SEN, A. K.: Quasi-transitivity, rational choice and collective decisions. *Review of Economic Studies*, 34 (1969).
[5] SEN, A. K.: Social choice theory: a re-examination. *Econometrica*, 45 (1977).

A NEW INTERPRETATION OF CONSISTENT RANKING

In the present article a new interpretation of consistent ranking is given (G-transitive preference-order) that is weaker than the usual transitivity and stronger than quasi-transitivity.

While quasi-transitive order may not always be plotted on a preference-scale, G-transitive order can always be plotted so.

НОВОЕ ТОЛКОВАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УПОРЯДОЧЕНИЯ

В статье дано такое новое толкование последовательного упорядочения (G-транзитивный порядок), которое слабее *обычной* транзитивности и сильнее *квази*-транзитивности.

В то время как квази-транзитивность не во всех случаях может быть представлена на шкале упорядочений, то G-транзитивная последовательность поддается такому представлению.