IDEGEN TOLLAK

R. E. KALMAN

Identifikálhatóság és a modellválasztás problémái az ökonometriában*

1. Háttér és perspektívák

Az ökonometria az 1920-as években egy nagyszerű álom megvalósulásaként született. Ma, több mint fél évszázad tudásával az álmot pontos, részletes, tudományos elemzés váltja fel.

,,A közgazdaságtudomány egymással összefüggő átfogó jelenségekkel foglalkozik. Lehetetlen fontos változók (mondjuk az adózás és a megtakarítások) között a mennyiségi összefüggéseket anélkül tanulmányozni, hogy ne hivatkoznánk a változók és az összefüggések környezetére. Ugyancsak lehetetlen olyan kísérleteket, vagy közvetlen megfigyeléseket végezni, amelyek az összefüggéseket kiragadják környezetükből vagy csökkentik a zajszintet, amely mellett hatásuk megfigyelhetővé válik. Számtalan idősorral rendelkezünk, amelyeket éppen azok a közgazdasági ,,erők'' hoztak létre, amiket le akarunk leplezni. Idősorokon alapuló modellek felállításától azt remélhetjük, hogy közvetlen módon hozzájuthatunk a kívánt közgazdasági mennyiségi összefüggésekhez, mivel ezek vannak ,,elrejtve'' a modellekben és ezért a modellek szerkezetéből és paramétereiből megismerhetőknek kell lenniük. A közgazdasági igazságok megváltoztathatatlanok legalábbis rövid távon, és éppen ezért nincs elvi oka annak, hogy miért ne lehetne pontos modelleket felállítani a hozzáférhető adatokból, a gazdasági idősort zavaró tényezők, hibák, ésszerűtlenségek, várakozások és egyéb véletlen hatások ellenére.''

Ebből a gondolatmenetből az következik, hogy a közgazdaságtudománynak a *rendszerelméleti* megközelítést kell választania. A közgazdaságtannak olyan módszerekre van szüksége, amelyek hatékonyak az egymással kölcsönhatásban levő jelenségek felkutatásában, magyarázatában. Ily módon az ökonometria álma ma mint rendszerelméleti technikai probléma jelenik meg.

Sajnálatos módon azonban az ökonometria tényleges fejlődése meglehetősen más utat járt be. A rendszerelmélet az 1920-as és 30-as években még a láthatáron sem volt, s az ökonometria korán a statisztikusok uralma alá került. HAAVELMO [9] reménye, miszerint az ökonometriát a valószínűségelmélet következetes alkalmazásával kellene megalapozni, azért nem valósult meg (a szerző véleménye szerint), mivel a valószínűségelmélet nem tud semmit sem mondani a rendszerelméleti problémákról.

* Az Ökonometriai Társaság IV. Világkonferenciáján (Aix-en-Provence, 1980 augusztus) elhangzott előadás alapján. A cikk egyidejüleg angolul is megjelenik a P. R. KRISHNAIAH (szerk.) *Developments in Statistics*, Vol. 4. Academic Press, New York, 1982 kötetben.

Fordította *Halpern László.*

1980-ra a rendszerelmélet eljutott az érettség bizonyos fokára. Képes arra, hogy új tudományos kereteket biztosítson, amelyek között a közgazdaságtan és az ökonometria alapvető gondolatai felülvizsgálhatók és további objektív elemzés, kritika válik lehetővé.

Számos régebbi publikációmban [21], [22], [24], [25] rámutattam arra, hogy a közgazdasági kutatás nem lehet értelmes, ha a modell koncepcionálisan megalapozatlan és matematikailag pongyola. A közgazdasági modellezés eljárásait nem lehet és nem szabad kizárólag közgazdasági gondolkodás alapján igazolni.[1] A modellezésnek megvan a saját logikája függetlenül attól, hogy mit modellez. Túl ezen, a modellező logika által felállított korlátok messze fontosabbak az olyan földhözragadt kérdéseknél, mint az adatok megbízhatósága, az érvényben levő közgazdasági elmélet felhasználása, a statisztikai módszertan és az ehhez hasonlóak. Egy modellnek a valóságos adatokat kell megmagyaráznia, nem szabad a modellező előítéleteinek kezdetleges kifejezőjévé válnia.

Az előbb hivatkozott cikkeim a modellezés általános, sőt filozófiai vonatzásaival foglalkoznak. E cikknek szűkebb a célja: újravizsgálni az identifikálhatóság fogalmát.

Az, amit az ökonometriában identifikálni kell, az általában valamilyen fajta rendszer. A statisztika Fisher-féle paradigmájának hatása alatt az ökonométerek hosszú ideig kétkedés nélkül éltek azzal a feltevéssel, miszerint egy rendszer nem más mint egy csokor paraméter. Éppen ezért úgy gondolják, hogy a rendszer identifikálása azonos a paraméterek becslésével. A rendszerelmélet-kutató ezzel nem ért egyet.

A matematikai gondolkodás úgy kívánja meg, hogy egy rendszert elsősorban absztrakt objektumnak tekintsük. Természetes értelmezés szerint a ,,paraméterek'' (minden előzetes korlátozás nélküli számhalmaz) általában nem adják meg egy matematikai objektum helyes leírását; az esetek többségében a parametrizációnak olyan problémái merülnek fel, amelyek a rendszer elemzésének későbbi szakaszában jelennek meg.

A ,,parametrizációt'' a ,,koordináta-rendszerbe helyezés'' fogalmával szinonim módon használjuk. Ez azt jelenti, hogy az absztrakt objektumok halmazának minden egyes tagját egyértelműen leírja egy számhalmaz explicite megadott korlátozásokkal. Ugyanakkor amíg a paraméterek meghatározása absztrakt matematikai eljárások eredménye, addig az eredményül kapott ,,paraméterek'' ritkán rendelkeznek közvetlen intuitív jelentőséggel, matematikai tulajdonságaik határozzák meg őket és általában nem egyértelműek. Soha nem ,,egy paramétert'' identifikálunk; az identifikáció során számszerű értékeket rendelünk valamely specifikált parametrizáció összes paramétereinek halmazához.

A tudományos irodalomban a ,,paraméter'' szó számos különféle és homályos használata a fogalmi zűrzavar jele. A vétkek kisebbítése érdekében e cikkben bevezetjük a *leíró* és a *lényeges* paraméterek közötti éles megkülönböztetést. Az előbbi körülbelül az ökonometriában (és más alkalmazási területen) általában használt paraméter fogalma; az utóbbi a fent említett matematikai objektum paramétereinek meghatározására utal.

[1] Közgazdászok rengeteg energiát pazaroltak a *Forrester—Meadows* világmodell leleplezésére, az elavult adatokra, a valósághoz és a közgazdasági elmé ethez nem illeszkedő voltára stb. hivatkozva. Voltaképpen a modell a saját súlya alatt, belső logikája miatt omlik össze, amelynek semmi köze a közgazdaságtanhoz. Lásd [24], 7. 1. fejezetét.

A leíró paraméterek nem egyebek, mint eszközök arra, hogy számszerűsítsük a matematikai objektumot. A leíró paraméterek nem utalnak az objektumok belső tulajdonságaira. Végül is a rendszer identifikációjának problémáját a lényeges paraméterek valamely halmazának segítségével kell kifejezni. A megvalósításhoz szükséges fogalmi építmény már létezik a rendszerelméletben, ezt a 3. fejezet ismerteti.

Az identifikáció úgy tekintendő, mint a realizálási elmélet problémája. A realizálási elmélet által nyújtott eszközöket használva a magatartási adatok lefordíthatók a „modell", azaz a megadott adatokkal összeegyeztethető rendszerek halmazának nyelvére. Amikor a modellnek, mint egy absztrakt objektumnak paramétereit meghatározták, akkor egyértelmű megfeleltetés létesül a magatartási paraméterek és a modell paraméterei között. Elvileg ez oldja meg az identifikáció problémáját.

Ha a realizációs probléma megoldása nem egyértelmű, akkor a „modell" nem-ekvivalens rendszerek halmazából fog állni. Ekkor a modellhez tartozó minden rendszert a (lényeges) paraméterek két halmaza írja le. Az egyik — a magatartási paramétereket tartalmazó — meghatározza, hogy a rendszer melyik modell része. A másik paraméterhalmaz az adott rendszer pozícióját írja le, abban a családban, ami maga a modell.

A klasszikus statisztika figyelme olyan kérdésekre irányul, mint a hipotetikusan előállított eloszlás átlagának és szórásának „becslése". Az ökonometria jelentős részében a „paraméter identifikáció" feladatára ezt az álláspontot kritikátlanul fogadták el. Ez súlyos hibát jelenthet, mivel a statisztikai paramétereket rendszerint leíró értelemben kezelik, holott a rendszer paramétereket „lényeges" értelemben kell kezelni. Ezért a „paraméter identifikáció" álláspontját fokozatosan fel kell váltania a „rendszer identifikációnak" és az ezt követő „rendszer parametrizációjának".

A klasszikus statisztikai paradigma az ökonometriában túlzott hangsúlyt helyez a statisztikára és elsiklik a rendszer problémák fölött. Véleményünk szerint a helyzetet az ellenkezőjévé kell változtatni. Jobb túlzott hangsúlyt fektetni a rendszerelméleti vonatkozásokra, mivel más módon nem bizonyosodhatunk meg róla, hogy egy valóságos objektumot identifikáltunk, nem pedig valamilyen mesterséges képződményt, amit szubjektív módszertanunk hozott létre.

A gyakorlati ökonométer számára szőrszálhasogatásnak tűnhet, ha azt mondjuk, hogy egy modell mindig identifikálható, és mégis megengedjük, hogy a modell több nem-ekvivalens rendszert is tartalmazzon, melyek mindegyike egyaránt érvényes reprezentánsa a magatartási adatoknak. Hogyan válasszon hát a különféle olyan rendszerek közül, amelyek mindegyike ugyanannak a modellnek a része? Miért ne mondhatná egyszerűen azt, hogy néhány együttható „nem identifikálható"?

Az egyetlen helyes válasz ezekre a kérdésekre az, hogy az új elméleti megközelítés jobb az előzőeknél, mivel lehetőséget nyújt az identifikáció alapvető problémáiba való mennyiségi (ezáltal mélyebb) betekintésre. Látni fogjuk, hogy ez csak azért van, mert a múltban nem kutatták olyan gondosan az „identifikálhatóságot", mint ahogy kellett volna.

A realizálási elmélet, az identifikáció és a paraméterek meghatározása a 2. és 3. fejezet tárgya. Ezt szemléltetik a 4., 5., 6. fejezetek az általánosság különböző szintjén, az ökonometriából vett példákkal. A 7. fejezet a rendszerelmélet néhány mélyebb alkalmazásával ismerteti meg az olvasót.

E cikk értelme nem abban van — és ezt fontos hangsúlyozni —, hogy új módszert javasoljon az ökonometria számára. Inkább abban, hogy felhívja a figyelmet azokra a kényes és súlyos nehézségekre, amelyek az ökonometria számos klasszikus megközelítésének velejárói.

A rendszerelmélet a megfelelő elméleti keret. Ez az, ami új hatékony eszközöket bocsát rendelkezésre. Ezeket kell alkalmazni. És ekkor *lesznek* új eredmények és lesz előrehaladás.

Köszönetnyilvánítás: Sok barátom és kollégám járult hozzá az itt közölt eredmények tisztázásához, mind az eredeti, mind az átdolgozott változatok megírása során. Külön köszönetet szeretnék mondani *M. Deistler*nek, a bécsi Technische Universität professzorának, *M. Intrilligator*nak, University of California Los Angeles professzorának, *H. Wald*nak, az uppsalai és a genfi egyetem professzorának, *Dr. P. Tinsley*nek és *Dr. P. A. V. B. Swamy*nak, a washingtoni Federal Reserve Board munkatársainak, valamint *Dr. A. Marawall*nak, a Bank of Spain munkatársának. A tanulmányt *M. v. N.*-nek dedikálom, akinek a segítsége nélkül valószínűleg soha nem született volna meg.

2. Realizáció

Az ökonometria modelleknek idősorokból való identifikációja az első lépéstől, a *modell* definiálásától kezdve a rendszerelméletre támaszkodik. Ez kézenfekvőnek tűnhet, ám valójában döntő jelentőségű.

Habár még nem terjedt el mindenütt, képszerűen ábrázoljuk az identifikációs problémát, mint ami az objektumok három osztályából és két összekötő műveletből áll:

$$(2.1)\quad \underset{\text{(A)}}{\left\{\begin{matrix}\text{a determinisztikus}\\ \text{rendszer és szto-}\\ \text{chasztikus kör-}\\ \text{nyezete}\end{matrix}\right\}} \xrightarrow[\text{magatartás}]{} \underset{\text{(B)}}{\left\{\begin{matrix}\text{magatartási}\\ \text{adatok}\end{matrix}\right\}} \xrightarrow[\text{realizáció}]{} \underset{\text{(C)}}{\{\text{modell}\}}.$$

Részletesebben a feladat a következő:

A. Specifikálni kell a (determinisztikus) *rendszerek* egy osztályát és az őket körülvevő sztochasztikus környezetet. (Az egyszerűség kedvéért a rendszert mindig determinisztikusnak, a „környezetet" pedig mindig sztochasztikusnak tekintjük. Más lehetőségek természetesen megengedettek.) Az alapkövetelmény az, hogy az ismeretlen valóságos $\sum$ rendszer (amelyet identifikálni akarunk és amelyről azt gondoljuk, hogy az adatokat előállította) az A osztály tagja legyen.

B. Specifikálni kell egy osztályt, amely tartalmazza mindazokat a megfigyeléseket (méréseket), amelyeknek elvégzése az A osztályba tartozó rendszereken és környezeteken megengedett. Az ilyen feltételeket teljesítő megfigyelések összességét *magatartási adatoknak* nevezzük. Ideális értelemben ez egy valószínűségeloszlás specifikálását jelenti, gyakorlatilag általában a minta átlagát és kovarianciáját, amelyeket a megfigyelések mért értékeiből számítanak ki.

A → B azt mutatja, miképp lehet kiszámítani az A osztályba tartozó mindegyik Σ rendszer S_Σ magatartását. Ebből a felírásból közvetlen feltételek származnak, amelyek lehetővé teszik a B osztályba tartozó bármelyik adat ellenőrzését (Σ ismerete nélkül), vajon S valóban valamely A osztálybeli Σ által keletkezhetett-e vagy sem. Ezeket a feltételeket *magatartási relációk*nak nevezzük.

C. Az A → B műveletet megfordítva határozzuk meg azon rendszerek és környezetek C osztályát, amelyek a B osztálybeli adott S adatra teljesítik a magatartási relációkat. Magától értetődően a C osztály magába foglalja az A osztályt, de lehet nagyobb is nála, ha a feladat eredeti megfogalmazása nem vette figyelembe az összes lehetséges rendszert, amely a megfigyelt adatokat létrehozza. Eképpen a C osztály az A osztály bizonyos ,,lezárásának'' tekinthető.

B → C azt mutatja meg, miképp kell az S magatartási adatok bármely adott (rögzített) részére kiszámítani (a C osztályba tartozó) vele összeegyeztethető Σ_S rendszereket. Adott S-re az összes ilyen rendszerek Σ_S halmaza S-nek a *modellje*. Az A és B közötti nyíl a kérdéses rendszerek *magatartásáról* nyújt a priori információt. A B és C közötti nyíl úgy tekinthető, mint a magatartás inverze (matematikai nyelven: a magatartás adjungált funktora), ezt a fontos műveletet *realizálásnak* nevezi a rendszerelmélet. Nyilvánvaló a ,,magatartás inverziója'' az identifikáció elméletének alapvető problémája.

Bármely identifikációs probléma legfőbb célja a *modell* mennyiségi meghatározása (a fentiekben ismertetett különös értelemben). Vegyük észre, hogy a modell egynél több rendszerből is állhat, az adatokat többféleképpen magyarázhatjuk meg. A modellezésnek ez a többértelműsége az identifikációs probléma elkerülhetetlen tulajdonsága. Ez nem küszöbölendő ki mesterséges feltételezésekkel úgy, ahogy azt a paraméter becslési módszerek esetében teszi néha a statisztika.

Az identifikáció nem fogalmi, hanem matematikai probléma. Csak az objektumok három osztályára és a ,,magatartási'' és ,,realizálási'' műveletekre adott pontos matematikai definíciók után végezhető el. Erre térünk most rá, éspedig a lineáris determinisztikus rendszerek esetére szorítkozva.

Aa. *A rendszer*. A klasszikus idősor-irodalom csak lineáris modellekkel és a valószínűségelmélet idevágó területeivel foglalkozik. Éppen ezért (itt) mi is erre korlátozzuk az elemzést: lineáris rendszerekre és normális eloszlású környezetekre. A *lineáris rendszer* pontos fogalma [28] 1., 2. és 10. fejezetében van axiomatikusan kifejtve. Ez a hivatkozási pont, amire minden további definíciónk és eredményünk támaszkodik.

Egy rendszer definíciója során pontos technikai értelmezést kell adnunk a következő jelzőknek: *lineáris, véges* (-dimenziójú és végesen parametrizálható), *többszörös bemenet/többszörös kimenet, állandó* (= a definiáló tulajdonságaiban időtől független) és *dinamikus*. Ezek a szavak mind szerepelnek az általános definíciók[2] között, amelyek két változatban következnek.

Folytonos idő esetében, azaz olyan időhalmazra, ahol $T = \mathbf{R} =$ valós számok, a (fenti tulajdonságokkal rendelkező) Σ rendszer a következőképpen

[2] A 2.*a*—*b* pontok jelölési módja — amelyet 1960 körül nagyszerű tanárom F. G. H. LINEAR emlékére vezettem be — általánosan elfogadott a rendszerelméletben.

írható le:

$$\text{(2.2a)} \qquad \frac{dx}{dt} = Fx(t) + Gu(t),\ y(t) = Hx(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Diszkrét időre, ahol $T = \mathbf{Z} =$ egész számok, a rendszer a következőképpen adott:

$$\text{(2.2b)} \qquad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t),\ y(t) = Hx(t), \quad t \in \mathbf{Z}.$$

A (2.2a—b) képletekben a valós (vagy komplex) x, u és y vektorokat rendre *állapot*, *bemenet* és *kimenet* névvel illetjük, F, G, H valós (vagy komplex) számokat tartalmazó mátrixok.

Elég világos a definícióból, hogy a „rendszer"-t (amely rövidített írásmódja lesz a (2.2) pontban kifejtett pontos fogalmi együttesnek) valójában az (F, G, H)-ban levő „paraméterek" (elemek) definiálják. Egyszerűen ezt így fogjuk közölni $\Sigma: = (F, G, H)$. A jelölést szándékosan választjuk úgy, hogy ne legyen a folytonos és diszkrét időkezelés között jelölésbeli különbség. A rendszerelméleti kérdések természetüket tekintve tisztán algebraiak, F, G és H tulajdonságain alapulnak, ezért ilyen megkülönböztetés nem szükséges, az eredmények egyszerre igazak mind folytonos, mind diszkrét idő esetén.

[A „rendszer" gondolata a newtoni mechanikára megy vissza, hozzátéve a rendkívül fontos, modern „bemenet" és „kimenet" fogalmakat. Nagyon jó gondolati modell, különösen diszkrét időben, a számítógép. Az alapvető definíciók fogalmilag érvényesek teljes általánosságban, kivéve a linearitás feltételezését. Lásd [21] 1. fejezetét. Azonban a linearitás fontossá válik, ha egyetemleges (azaz rendszerelméleti) matematikai eredményeket akarunk, nemcsak definíciókat. A matematika ereje, ahogy ez jelenleg a rendszerelméletben alkalmazásra kerül, majdnem teljesen a „lineáris" szóból ered.]

(2.2a—b) egyenleteket néha egy rendszer *belső* definíciójának is tekintik. Ez arra a tényre utal, hogy a definíció a belső vagy *állapot*változókkal, az x vektor komponenseivel van kifejezve.

Ab. *A sztochasztikus környezet.* Emlékeztetőül: egész gondolatmenetünkben a rendszer fogalma mindig determinisztikus. Sztochasztikus hatások csak kívülről érik a rendszert és ezt ennek megfelelően kell modellezni.

Ilyeténképpen le kell írnunk az összes sztochasztikus hatást (bemeneti zavarokat), amelyek a rendszerre hatnak, ugyanúgy, mint a megfigyelés során fellépő zavarokat. Ez történik meg az általános gaussi feltevés szerint, amikor a szóbanforgó véletlen változók átlagainak és kovarianciáinak osztályát határozzuk meg. Ilyen adatok akár a sokaságra, akár a mintára is vonatkozhatnak. Lásd a 4., 5. és 6. fejezetekben található példákat.

B. *Magatartás.* Determinisztikus esetben a „megfigyelés" *definíciószerűen* azt jelenti, hogy adott időpontra ismerjük az összes bemenetet *és* kimenetet; az állaptváltozók soha nem megfigyelhetőek.

Sztochasztikus esetben a megfelelő változók valószínűségeloszlásainak specifikálása váltja fel a bemenet és kimenet pontos ismeretét. Például, a rendszer bemenete és kimenete csak az additív zajjal együtt figyelhető meg. Az ilyen zajok természete része e sztochasztikus környezet meghatározásának, ugyanakkor a magatartási adatok meghatározása egyenértékű lenne a (bemenet + zaj), valamint a (kimenet + zaj) együttes valószínűségeloszlásának megadásával. A további taglalást a példák ismertetéséig elhalasztjuk.

Egy lineáris, determinisztikus rendszer kimenete lineárisan (és okozatilag) függ a bemeneteitől. Magától értetődőnek véve a kauzalitást és nem használva mást csak a linearitás matematikai definícióját, egy diszkrét idejű rendszerben a bemenet és a kimenet között az összefüggés formája a következő:

$$(2.3)\qquad y(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} A_{t-\tau}\, u(\tau), \quad x(0) = 0.$$

(2.3)-ból láthatjuk egy rendszer *magatartási (külső)* definíciáját. Így egy, lineáris, diszkrét idejű rendszerben a „magatartás” a (2.3)-ban szereplő mátrixok végtelen sorozata meghatározásával formalizálható és számszerűsíthető:

$$(2.4)\qquad S{:} = (A_1, A_2, \ldots).$$

Folytonos idejű rendszerek esetében S-t megint ugyanígy definiáljuk, (2.4) szerint. [Ilyen rendszerek esetében azonban (2.3)-at konvolúciós integrállal kell helyettesíteni és (2.4) levezetése bonyolult matematikai technikát igényel, itt elhagyjuk.]

Az A → B művelet illusztrálásaképpen meghatározzuk a (2.2)-vel megadott rendszer magatartását. Ez könnyű. (2.2a)-t rekurzívan használva kapjuk:

$$(2.5)\qquad A_t{:} = HF^{t-1}G, \qquad t = 1, 2, \ldots$$

Világos, hogy (2.5) adja a $\Sigma = (F, G, H)$ rendszer explicit *magatartási relációó* az S adatoknak megfelelően. A (2.5) képlet egy leképezést határoz meg: $\Sigma \to S_\Sigma$. Ez a leképezés szükségszerűen szurjektív, abból fakadóan, hogy csak azokat az S magatartásokat vesszük figyelembe, amelyeket az előírt osztályba tartozó Σ rendszer generálhatott. Másrészről pedig a leképezés majdnem soha nem injektív, azaz általában lehet több rendszer, $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots$, amely ugyanolyan magatartást mutat, $S_{\Sigma_0} = S_{\Sigma_1} = \ldots$.

Az X állapottér koordinátáinak változása $T{:}\ x \to \hat{x}$, $\det T \neq 0$ formában definiálható.

A koordináták változása a $\Sigma = (F, G, H)$ és $\hat{\Sigma} = (\hat{F}, \hat{G}, \hat{H})$ rendszerek között a következő összefüggések teljesülését jelenti:

$$(2.6)\qquad \begin{cases} \hat{F}T = TF, \\ \hat{G} \;\;= TG, \\ \hat{H}T = H. \end{cases}$$

Továbbá T a Σ rendszernek olyan más $\hat{\Sigma}$ rendszerbe történő $\Sigma \to \hat{\Sigma}$ transzformációját idézi elő, amelynek ugyanaz a magatartása. [Bizonyításul egyszerűen helyettesítjük (2.6)-ot (2.5)-be.] Más szavakkal, csak a koordináták változásában különböző két rendszer magatartás tekintetében ugyanahhoz az ekvivalencia osztályhoz tartozik. Ezen ekvivalencia osztály jelölése $[\hat{\Sigma}]$. Így, ha $\Sigma \to \hat{\Sigma}$ (2.6) szerint, akkor $[\Sigma] = [\hat{\Sigma}]$ és $S_\Sigma = S_{\hat{\Sigma}}$.

Fontos rendszerelméleti tény, hogy determinisztikus rendszerekre a megfordítás is igaz bizonyos, pontosan meghatározott értelemben, amire még visszatérünk.

C. *A modell.* Tekintsük ismét a (2.5) képletet, próbáljuk meg a magatartás kiszámításának nyilát invertálni. A probléma a következő. Adott lévén (2.5) bal oldala, azaz *adatván egy rögzített* S_0 *magatartás, létezik-e olyan* Σ *rendszer* (vagy több rendszer), *amelynek definiáló mátrixai* F, G, H *teljesítik* (2.5)-öt *minden* t-*re.*

Ez a *realizáció* problémája. Bármely Σ, amely adott S_0-ra teljesíti (2.5)-öt, az S_0 egy *realizációja.* Ezt Σ_{S_0}-lal jelöljük. Adott bal oldallal és ismeretlen jobb oldallal (2.5)-öt *realizálási feltételeknek* nevezzük.

Ha Σ egy realizáció, akkor realizáció minden olyan $\hat{\Sigma}$ is, amely a koordináta változással definiált $[\Sigma]$ ekvivalencia osztályba tartozik. Ezért nem tekintjük az ilyen Σ-t és $\hat{\Sigma}$-t különböző realizációnak. Ennek ellenére előfordulhat, hogy a rögzített S_0 összes realizációjának osztálya $\{\Sigma_{S_0}\}$ tartalmaz lényegesen különböző elemeket, azaz olyan Σ-t és $\hat{\Sigma}$-t, amelyek nem ekvivalensek semmilyen koordináta változás esetén. Ebben az esetben a realizálási probléma megoldása *nem egyértelmű.*

A lineáris rendszerelmélet alapvető eredménye, amelyet [14] ismertet (lásd még [19] és [24]), miszerint *determinisztikus lineáris rendszerekre a realizálási probléma megoldása egyértelmű,* feltéve, hogy a Σ_{S_0} realizációt a lehető legegyszerűbb („kanonikus") részre „redukáljuk" úgy, hogy eltekintünk a (2.2a—b)-ben szereplő szükségtelen állapotváltozóktól, az egyértelműséget pedig úgy értelmezzük, hogy „eltekintünk az állapottérben a koordináták változásától". [Jóllehet ezt az eredményt többnyire csak szűkebb értelemben, azaz véges-dimenziójú, konstans, lineáris rendszerekre használják, az itt használt általánosabb megfogalmazás jogosult analóg tételek alapján a következő esetekre is:

(i) véges-dimenziójú, konstans, nemlineáris (polinomiális) [41],
(ii) végtelen-dimenziójú, konstans, lineáris [46] és
(iii) véges-dimenziójú, nem-konstans lineáris esetre, melynek eredeti bizonyítása a szerző műve, megjelent [28] 10. C függelékében.]

De *sztochasztikus rendszerekre a realizációs problémának általában nem egyértelmű a megoldása,* sőt az is lehetséges, hogy bizonyos esetekben nincs is megoldás.

Ha az identifikációs kérdésben objektív álláspontot akarunk fenntartani, akkor meg kell hagynunk a részleges siker lehetőségét, amikor több különböző rendszert kell elfogadnunk, mivel ezek építik fel az itteni értelemben definiált modellt. Más szavakkal: a sztochasztikus realizációt érintő matematikai tények egyáltalán nem intuíció-ellenesek.

A modell koncepcióját tekintetbe vevő terminológiánk új, de aligha vitatható. Például Koopmans és Reiersol ([30], p. 169) megjegyzik, hogy „[ilyesmi elfogadható], ha ellenállunk annak a kísértésnek, hogy a fontos jellemzők [egyértelmű] identifikálhatósága szempontjából specifikáljuk a modelleket." Az identifikálási probléma, azaz a (2.1) bal oldalán levő rendszerek A osztályának meghatározása alapvetően a modellező választásától függ. Ezért el kell fogadni a következményeket; a sztochasztikus magatartási adatok realizációjaként feltevéseiből szigorú logikával levezetett „modelljéről" kiderülhet, hogy nem-létező, egyértelmű vagy nem-egyértelmű.

3. Parametrizáció

Mielőtt a (2.1) képlet elméleti keretét bármilyen konkrét formába öntenénk, a *parametrizáció* kérdését kell szemügyre vennünk.

Ez a legfőképpen a számok kérdése. Az adatok általában számszerűek és ezért a rendszert vagy a modellt ugyanígy kell specifikálni. Magától értetődőnek tűnhet, a témát mégis számos komoly félreértés kíséri a közgazdasági irodalomban, és nemcsak ott.

Mint ahogy a bevezetőben említettük, a félreértést úgy kerülhetjük el, ha éles különbséget teszünk a *leíró paraméterek* és a *lényeges paraméterek* között.

A leíró paramétereket általában „szabadnak'' tekintik, azaz tetszőleges számoknak. Így, ha a matematikai objektumot n valós számmal írjuk le, akkor absztrakt módon ez az objektum azonos egy ponttal $\mathbf{R}^n$-ben. Azonban az ilyen objektumok halmaza a legritkább esetben az egész $\mathbf{R}^n$. Ez azt jelenti, hogy korlátozni kell a leíró paramétereket ahhoz, hogy helyesen határozzuk meg a halmazt. Például, az $n\times n$-es mátrixok $\{A\}$ halmaza megegyezik $\mathbf{R}^{n^2}$-tel, de az $n\times n$-es nemszinguláris mátrixok halmazát már úgy specifikáljuk, hogy az $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ leíró paramétereket a $\det A \neq 0$ implicit feltételnek is alávetjük.

A Σ lineáris rendszer leíró paraméterei természetesen az F, G, H mátrixok elemei.

Az S lineáris magatartás (elvileg) az $A_1, A_2, \ldots$, (végtelen) mátrixsorozat (végtelenül sok) elemei teljességének megadásával specifikálható, amit ezért együttesen *leíró magatartási paramétereknek* nevezünk. Egy rendszer sztochasztikus környezetének leíró paraméterei rendszerint a kovariancia mátrixok elemeiként jelennek meg.

Példa: A leíró és a lényeges paraméterek közötti különbség megvilágítására klasszikus példa a 2 dimenziós térben való $\mathfrak{R}^*$ elforgatás. A forgatást egy 2×2-es mátrixszal írhatjuk le

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ -c & b \end{bmatrix}, \quad a,\ b,\ c \text{ valós számok,}$$

amely eleget tesz az

$$MM' = I$$

ortogonalitási feltételnek. A leíró paraméterek: a, b, c. A tetszőleges a, b, c értéknek megfelelő M mátrixok $\mathfrak{R}^*$ osztálya jóval tágabb, mint a 2 dimenziós forgatások $\mathfrak{R}$ osztálya. $\mathfrak{R}$-et, mint $\mathfrak{M}$ alosztályát az ortogonalitási feltételek választják ki. Ezek a feltételek 3 olyan algebrai azonosságot írnak elő a paraméterekre, amelyek közül csak 2 független. Így következtethetünk arra, de ezen a szinten csak az intuíció útján, hogy az M forgatási mátrix egy (független) paraméterrel adott. Matematikai eszközökkel bizonyítható, hogy minden ilyen M mátrix felírható a következő alakban:

$$M = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Ez azt mutatja, hogy az (egyetlen) lényeges paraméternek θ tekinthető. De ez a θ még mindig nem tetszőleges, hanem eleget tesz egy ekvivalencia relációnak, hiszen $M(\theta) = M(\hat{\theta})$, ha $\hat{\theta} = \theta \bmod 2\pi$. Most már kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egymásnak az $M =$ forgatás és a $[\theta]$ ekvivalenciaosztály.

Más szavakkal $\mathfrak{R}$, mint absztrakt matematikai objektum, a $[0,2\pi]$ zárt intervallumnak felel meg, az intervallum két végpontja azonosnak tekintendő. A leíró paraméterek az $MM' = I$ implicit korlátozásnak tesznek eleget, míg θ korlátai explicit formában adottak. Ennek az az ára, hogy M most már $[\theta]$ bonyolult függvénye. Ezenkívül $[\theta]$ és (a, b, c) között is bonyolult kapcsolat van

$$[\theta]: = \arccos a = \arcsin b.$$

A példa alapján megállapíthatjuk, hogy egy rendszerosztály *lényeges paramétereit* a következőkkel jellemezhetjük:

(i) Az osztályba tartozó minden egyes rendszernek egy és csakis egy paraméterhalmaz felel meg.
(ii) A paramétereket korlátozó feltételek explicitek.

Ezek a tulajdonságok bármely identifikációs probléma szempontjából fontosak.

Rendszerek parametrizációja. A (2.1) sémára visszatérve nézzük meg, hogyan illusztrálhatjuk a lényeges parametrizációt.

A *rendszerek osztályát* néhány invariáns tulajdonság megadásával kell meghatároznunk, például választhatjuk az n-dimenziós m-bemenetű p-kimenetű rendszereket. Ekkor a leíró paraméterek, mint ahogy már tudjuk a $\Sigma = (F, G, H)$ mátrixok $n(n + m + p)$ számú elemei.

A lényeges parametrizáció azonban a $[\Sigma]$ ekvivalencia osztállyal foglalkozik és *nem az egyes* Σ rendszerekkel. Az ekvivalenciát (2.6) szerint határoztuk meg, ez a Σ feletti általános lineáris csoport megadását jelenti. Így magától értetődő azt feltételezni, hogy a lényeges parametrizáció megfelelő F_*, G_*, H_* kanonikus formák[3] definiálásával oldható meg. Ez valóban igaz, bár a probléma korántsem egyszerű. A kérdés első szigorú taglalása [18]-ban található meg.

A legfőbb eredmény az, hogy a fenti osztályba tartozó objektumok halmaza kvázi-projektív algebrai sokaságot hoz létre. Ebből következően az F_*, G_*, H_* kanonikus alak elemei e sokaság lokális koordinátáinak tekinthetők. Tény, hogy nem léteznek (folytonos) globális koordináták. Ebből fakadóan a *lényeges paramétereket csak lokálisan definiáltnak szabad tekinteni.* (A lokális koordinátarendszerek átfedik egymást. Együttesen lefedik az egész sokaságot, de nincs egyetlen koordinátarendszer, amely lefedné az egészet.) A kanonikus alaknak, mármint a lényeges parametrizáció kanonikus alakjának pontos leírása meglehetősen bonyolult. Lásd [42] és [27].

A magatartási adatok lényeges parametrizációjára áttérve az első követelmény az, hogy meghatározzuk azokat a korlátozó feltételeket, amelyek kifejezik azt az alapfeltevést, hogy az adatok a (2.1) összefüggés szerint definiált rendszerek osztályából származnak. Mivel a rendszereket (gyakorlati szempontokból) véges számú paraméterrel kell jellemeznünk, ugyanaz a követelmény érvényesítendő a magatartási adatokra annak ellenére, hogy első lépésben kényelmes lehet az utóbbiakat [lásd (2.4)] végtelen számú (leíró) paraméterrel jellemezni.

Ennek megvalósítását biztosító matematikai eszközök a realizálási elmélet részét képezik. A lineáris rendszerekre jólismert eredmény (lásd [28] 10. feje-

[3] Nem tévesztendő össze a kanonikus rendszerekkel, ezeket lásd később.

zetét) a „rang-feltétel"

$$\text{rang } B(S_\Sigma) \leq \dim \Sigma = n, \tag{3.1}$$

ahol $B(S_\Sigma)$ a Σ rendszer által generált S magatartási adatokhoz tartozó *magatartási mátrix,* melynek definíciója

$$B(S_\Sigma) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \dots \\ A_2 & A_3 \\ \dots & \dots \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Eképpen S lényeges parametrizációja olyan paraméterek bevezetését kívánja A_1, A_2, . . .-ben, hogy n több (előre megadott) értékére és az (F, G, H) halmaz lényeges paramétereinek minden értékére teljesüljön (3.1).

Ezt a nehéz feladatot a lineáris realizálási elmélet segítségével lehet megoldani. Másszóval, (2.1) második nyilát kell szemügyre venni. A klasszikus elvi eredmények (1962; [28] 10. fejezet, [19] és [42] VI. fejezet) a következőképpen írhatók le.

a) *Ha S-nek van egy véges dimenziójú Σ_S realizációja, akkor van Σ_S^{can} kanonikus realizációja is* (kanonikus = elérhető és megfigyelhető).

(3.3) b) *Minden Σ_S^{can} kanonikus realizáció egyetlen ekvivalencia osztályhoz $[\Sigma_S^{\text{can}}]$-hez tartozik, amelyet* (2.6) *definiál.*

c) *Minden kanonikus realizációra:* $\dim \Sigma_S^{\text{can}} = \text{rang B(S)}$.

Másképp kifejezve, ez a tétel a (2.1)-ben szereplő második nyílról a következő rendkívül fontos állítást fogalmazza meg:

(3.4) *Determinisztikus, lineáris, dinamikus rendszerek magatartási adatai egyértelműen meghatározzák a modellt, (amelyet kanonikus rendszernek is vehetünk).*

Valóban, ha realizációk egyáltalán léteznek (véges dimenziójú értelemben), akkor kanonikusak is lehetnek (3.3a szerint); a modell egyértelmű, mivel $\{\Sigma_S\}$ egyetlen ekvivalencia-osztályt $[\Sigma_S^{\text{can}}]$ tartalmaz, s ezért nincsenek lényegesen különböző realizációk ((3.3b) szerint); a realizáció „mérete", azaz az állapotváltozók száma közvetlenül meghatározható a magatartási adatokból anélkül, hogy fel kellene építeni a realizációt magát ((3.3c)-nek megfelelően).

Ugyanezeket az eredményeket más formában is megfogalmazhatjuk:

(3.5) S *és* $[\Sigma_S^{\text{can}}]$ *között kölcsönösen egyértelmű a megfeleltetés.*

Tényleg, az S adatok egyértelműen meghatározzák az $[\Sigma_S^{\text{can}}]$ modellt, (mivel minden kanonikus realizáció (3.3a) szerint ugyanahhoz az ekvivalencia osztályhoz tartozik); másrészről pedig, bármely realizáció (ennélfogva bármely Σ_S^{can} kanonikus realizáció) meghatározza S-et, éppen a realizáció definíciójának megfelelően.

Így a (2.1) identifikálási feladat *determinisztikus, lineáris, véges dimenziójú* esetének van megoldása és ez a megoldás olyan szép, amilyen csak lehet. A megoldás lehetősége alapvetően a *kanonikus rendszerek* gondolatán alapul, valószínűleg ez a 60-as évek legnagyobb rendszerelméleti felfedezése. (3.3) tétel értelmében $[\Sigma^{\mathrm{can}}_{S_{\Sigma_*}}]$ az elképzelhető legjobb helyettesítője a S_{Σ_*} adatokat létrehozó, ismeretlen, valóságos Σ_* rendszernek és teljesen megérdemli a ,,modell" nevet.

Sietünk hozzátenni, hogy amíg (3.5) teljesülése számára a ,,determinisztikus" fontos, addig a ,,lineáris" és ,,véges dimenziójú" biztosan nem. Lásd a 2. fejezet végén található hivatkozásokat.

A modell és az adatok közötti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés (3.5) azt jelenti, hogy az adatok bármely lényeges parametrizációja meghatározza a modell lényeges parametrizációját és megfordítva.

Egy realizáció tényleges előállítása, amely nem kerülhető meg a lényeges paraméterek kiszámításakor, fokozatosan hajtható végre. Ez az ún. parciális realizációs elmélet, amelyet a 7. fejezet röviden tárgyal.

Az idősorelemzés történeti fejlődésében és a hozzákapcsolódó ökonometriai tanokban állandóan ismétlődő tendencia, hogy a szekér mögé fogják be a lovat. A szokásos ,,megközelítés" az, hogy előbb *egy* adott S_0 számadataiból (leíró paraméterek) határozzák meg *egy* Σ_{S_0} modell (leíró paramétereinek) értékeit, mielőtt S_0 és *a* modell $\{\Sigma^{\mathrm{can}}_{S_0}\}$ (a mi tárgyalásmódunk szerint) közötti viszonyt megértenék. Az ilyen eljárásnak — lásd például [11] és [4] — az a veszélye, hogy az identifikációs probléma tanulmányozásának eredménye inkább a felhasznált parametrizáció, semmint a valóságos, identifikálandó rendszer lényeges tulajdonságaitól függő kezdetleges valami *lehet.* Ezt a kérdést az ún. szimultán egyenletbecslés klasszikus megközelítésével kapcsolatban fogjuk vizsgálni. Lásd még az ARMAX modellek elemzését a 6. fejezetben.

A parametrizáció egy magasabbrendű ügy; ha már csináljuk, nemcsak ,,leíróan", hanem ,,lényegesen" kell tennünk. Ez bonyolult matematikai probléma, túl bonyolult ahhoz, hogy ,,közgazdasági megérzés" alapján jussunk el a megoldáshoz.

Az olvasó számára már ismert rendszerelméleti nyelvre támaszkodva, az identifikációs feladatot a következő lépésekben oldhatjuk meg:

(I) Határozzuk meg a rendszerek és környezetek azon osztályát, amelyben a rendszert megfigyeltük. Ez az osztály természetesen kell, hogy tartalmazza azt a modellt, amelyet a magatartási adatokból identifikálni szeretnénk.

(II) Határozzuk meg a magatartási adatok (= elérhető megfigyelések) osztályát. Az S_{Σ_0} adatok, amelyeket az (I) szerint specifikált Σ_0 rendszer generálhatott, természetesen ehhez az osztályhoz kell hogy tartozzanak.

(III) Oldjuk meg a realizálási feladatot: tetszőlegesen adott, rögzített (II)-ben meghatározott S_0 magatartási adatok alapján megkeressük az (I) alapján meghatározott osztályba tartozó összes Σ_{S_0} rendszert, amely S_0-at generálhatta. Ez az S_0 adatok $\{\Sigma_{S_0}\}$ *modellje.*

(IV) Kiszámítjuk a modellcsalád és a magatartási adatok lényeges parametrizációját.

Az identifikálási feladatot most már elvileg megoldottuk. Éspedig a lehetséges legjobb módon, nevezetesen a rendszer és környezet (előírt) osztályából és a megadott adatokból következtetve.

(3.5) miatt a modell numerikus meghatározása automatikus, ha már az adatokat parametrizáltuk. Ily módon valójában nem létezik a ,,paraméter identifikáció", mihelyt a paramétereket „lényegesnek" is és nemcsak leírónak tekintjük. Ezáltal csak a „paraméter meghatározásának" kérdése marad hátra, azaz megfeleltetni az adatok paramétereit a modell paramétereinek a (3.5) leképezés szerint. A 4. és az 5. fejezet ennek az eljárásnak a részleteit fogja illusztrálni az ökonometriából vett példákon keresztül.

Végülis valamelyest leegyszerűsítve arra a következtetésre jutottunk, hogy

(3.6) *Identifikálás = Realizáció + Parametrizáció.*

A (3.5) megállapításban semmi olyan nincs, amely eleve lehetetlenné tenné a *sztochasztikus identifikálásra* való alkalmazását. Ennek a kérdésnek *sztochasztikus realizálási elmélet* címszó alatt gazdag irodalma van (lásd pl. [15], [39], [5], [1], [35] [36], [6], [37]).

Figyelmeztetjük azonban az olvasót, hogy ez az irodalomban leginkább az *egzakt sztochasztikus realizáció problémáival* foglalkozik. Ilyen problémára példa a Markov-modell felépítése adott autokovariancia függvényből, ami a szokásos elméleti lépés a „Kalman-szűrő" problémának „Wiener-szűrő" problémává egyszerűsítése során. Lásd [15], [20]. Ezeknek az egzakt problémáknak a matematikai kezelése a determinisztikus realizálási elmélet útmutatásait követi, egyszerűen egzakt sztochasztikus adatokkal (olyannal, mint például az egzakt módon megadott kovariancia függvény) helyettesíti az egzakt determinisztikus adatokat (olyant, mint például az S sorozatot).

A valóságban azonban majdnem mindig *zajos sztochasztikus realizációs* problémával állunk szemben, ahol az alapadatok nem egzakt, „zajos" módon állnak rendelkezésre. Ez a helyzet az ökonometria számos klasszikus problémája esetében. A „zaj" akármit jelenthet, amiről nincs egzakt információnk vagy feltételezésünk. Ez lehet mérési hiba, zavaró tényező, a linearitástól vagy a stacionaritástól való eltérés stb. A 2. fejezet fogalmi kerete nyilván alkalmazható a zajos identifikációs probléma felírására. Jelenleg azonban erre nincs kidolgozott elmélet. Így, amikor a 4. és 5. fejezetben az identifikáció példáit vesszük szemügyre, tárgyalásunk szükségszerűen vázlatos és befejezetlen lesz.

Ezzel együtt a zajos identifikációs probléma jelentősége óriási, mivel jövő kutatási feladatot jelez. Ezek konkrét, nyitott rendszer problémák, amelyeknek tanulmányozása valószínűleg elég könnyű, és siker esetén bizonyára jelentősen segítené az ökonometria fejlődését.

4. Sztochasztikus identifikálás: példa[4]

A (2.1) sémának a zajos sztochasztikus realizálásra való alkalmazására egy klasszikus példát mutatunk be. A feladat egy statikus lineáris összefüggés identifikálása, és e tekintetben a (dinamikus) rendszerelmélet szempontjából triviális. A probléma „identifikálhatósági" vonatkozását KOOPMANS[5] és REIERSOL [30] klasszikussá vált cikke tárgyalta.

Tekintsük egy u skalár *bemenet* és egy y skalár *kimenet* között α és β ismeretlen paraméterekkel megadott affin összefüggést:

$$y = \alpha + \beta u. \tag{4.1}$$

[4] Ez a fejezet nem szerepelt a konferencián előadott anyagban.

[5] Köszönettel tartozom *Koopmans* professzornak azért, mert immár 15 évvel ezelőtt felhívta a figyelmemet erre és az ehhez kapcsolódó cikkekre.

Az összefüggésről két zajos megfigyelési forrásból érkeznek adatok, amelyet (a [8]-ban ismertetett ,,Kalman szűrő-elmélet'' klasszikus jelölésének megfelelően) a következő alakba irjuk:

$$
(4.2) \qquad \begin{cases} z_1 = u + v_1, \\ z_2 = y + v_2. \end{cases}
$$

Ezt a problémát formálisan fogalmazzuk át a (2.1) koncepcionális séma nyelvére.

A *determinisztikus rendszert* (4.1), valamint a bemenet, a kimenet és a megfigyelés ezt megelőző leírása adja meg. (Általában, és itt is, a sztochasztikus rendszerek esetében a kimenet nem feltétlenül azonos a megfigyelhetővel.)

A rendszer *sztochasztikus környezetét* a (4.1 — 2)-ben szereplő változók együttes valószínűség-eloszlására vonatkozó feltevések határozzák meg. [30]-cal egyezően feltesszük, hogy az u skalár normális eloszlású valószínűségi változó és független a v zajvektortól. v-t szintén gaussinak feltételezzük és a következőképp specifikáljuk:

$$
(4.3) \qquad \begin{cases} \text{(a)} \quad Ev_1 = Ev_2 = 0. \\ \text{(b)} \quad \operatorname{cov} v_1 v_2 = 0. \end{cases}
$$

Feladatunk *magatartási adatait* a szokásos hipotézis alapján specifikáljuk, miszerint a megfigyelhető z valószínűségi eloszlásának függvénye ismert. Mivel z gaussi, ez azt jelenti, hogy feltételezzük a sokaság paramétereinek ismeretét:

$$
(4.4) \qquad \text{magatartási adatok:} = \{Ez, \operatorname{cov} zz'\}, \text{ ahol } \operatorname{cov} zz' > 0.
$$

Tekinthetjük úgy is (4.4)-et, mintha a mintaátlaggal és mintaszórással lenne kifejezve. A ,,sokaság'' kontra ,,minta'' kérdés a következő elemzés szempontjából érdektelen.

A (4.1 — 3) feltételekkel specifikált rendszer és környezet magatartási adathalmazt generál. Az ilyen adatok mindenképpen (4.4) részhalmazát jelentik valamilyen Ez, cov zz' paraméterekkel, hiszen (4.4) a két gaussi változót magába foglaló legáltalánosabb adathalmaz. Másszóval, *feladatunk az, hogy a z_1, z_2 gaussi véletlen változók között affin összefüggést identifikáljunk abban az esetben, amikor az összefüggést (4.2) szerinti zajmechanizmus ismeretlen nagyságú zajjal homályosítja el.*

(4.5) *Megjegyzés.* Ha megengedtük volna, hogy z várható értéke ismeretlen (de nem nulla) érték legyen, akkor ezek az Ez_1, Ez_2 ismeretlen értékek az α konstans meghatározását befolyásolták volna (4.1)-ben. Ebben az esetben α identifikálásának problémája nem lett volna jól definiált, mivel

$$
\begin{aligned}
Ez_1 &= Ey + Ev_2, \\
&= \alpha + \beta Eu + Ev_2, \\
&= \alpha + \beta Ez_1 - \beta Ev_1 + Ev_2,
\end{aligned}
$$

ebből

$$
\alpha := Ez_2 - \beta Ez_1 - (Ev_2 - \beta Ev_1).
$$

Ez azt jelenti, hogy α-t nem lehetne meghatározni a magatartási adatokból, függene ugyanis a zaj ismeretlen várható értékétől is. *Ekkor α identifikálhatat-*

lan lenne, mivel nem jól definiált. Ez elvileg lehetetlen. Ha megengedjük azt, hogy a (feltevés szerint nem mérhető várható értékű) zaj magyarázzon meg z_1 és z_2 között valamilyen affin összefüggést, akkor (4.1)-et egyáltalán nem identifikálhatnánk. Másszóval, a zaj várható értékét a (4.1)-ben megkövetelt determinisztikus összefüggés részének kell tekintenünk. Eszerint a (4.3a) feltevés elengedhetetlen.

[Az itt tárgyalt eset hasonló ahhoz a fizikai feladathoz, amelyben az R_1 ellenállás ellenállásának „identifikálása" a feladat, és az egyetlen megengedett mérés egy olyan áramkör végpontjain végezhető el, amelyben egy R_2 ismeretlen ellenállású ellenállás van kapcsolva R_1-gyel párhuzamosan. Az ilyen mérés esetében értelmetlen azt képzelni, hogy a ténylegesen mért $R = R_1 \| R_2$ valamilyen ismeretlen módon két kívülről megkülönböztethetetlen részre bontható fel. Az a tény, hogy R_1-et láthatjuk, R_2 pedig rejtett (mondjuk a kapcsolótábla mögött van) érdektelen, amíg az identifikációról van szó.]

(4.3b) feltevés szintén kötelező. Ugyanis, ha cov $v_1 v_2 \neq 0$, akkor v_2-öt $\hat{v}_2$-vel helyettesíthetnénk a következő képlet szerint:

$$v_2 = \ddot{\beta} v_1 + \hat{v}_2, \text{ ahol}$$

$$\hat{\beta} := (\mathrm{var}\ v_1)^{-1} \mathrm{cov}\ v_1 v_2 \text{ és } \mathrm{cov}\ v_1 \hat{v}_2 = 0.$$

Ezáltal, ha $\hat{\beta} \neq 0$, akkor a (4.1)-ben szereplő β nem lenne jól definiált, mivel a z_1 és z_2 között affin összefüggés linearitási együtthatója $\hat{\beta}$-tól és β-tól is függ.

A feladat formális definiálásának teljessé tételéhez bevezetjük a (4.1) determinisztikus rendszer és (4.2), (4.3) környezete leíró paramétereit.

A rendszert a következőképp írjuk le:

$$\begin{cases} \delta_1 := \alpha, \\ \delta_2 := \beta. \end{cases}$$

Nincsenek korlátozások; ezeket a paramétereket lényeges paramétereknek is tekinthetjük.

A környezet leírása

$$\begin{cases} \delta_3 := Eu, \\ \delta_4 := \mathrm{var}\ u > 0, \\ \delta_5 := \mathrm{var}\ v_1 > 0, \\ \delta_6 := \mathrm{var}\ v_2 > 0. \end{cases}$$

A szórásokról a következő elemzés egyszerűsítése végett tettük fel, hogy szigorúan pozitívak; tekintsük ezt a probléma-specifikáció részének. A pozitivitási kikötést szem előtt tartva a δ_3-tól δ_6-ig terjedő paramétereket is lényegesnek tekinthetjük.

Az adatparaméterek a következők:

$$Ez_1,\ Ez_2;\ \mathrm{var}\ z_1,\ \mathrm{cov}\ z_1 z_2,\ \mathrm{var}\ z_2.$$

Ezekből az utolsó három a (4.4)-ben már említett cov $z > 0$ feltételnek eleget tesz.

Most már rendelkezésünkre állnak a magatartási összefüggések leírásához szükséges jelölések. Ezeket megkapjuk, ha kiszámítjuk az x adatszórást a rendszer és a környezet paramétereinek függvényében. Ez meglehetősen egyszerű ebben az esetben; az eredmény

$$(4.6)\qquad \begin{cases} Ez_1 = \delta_3, \\ Ez_2 = Ey = \alpha + \beta\delta_3, \\ \operatorname{var} z_1 = \delta_4 + \delta_5, \\ \operatorname{var} z_2 = \beta^2\delta_4 + \delta_6 \\ \operatorname{cov} z_1 z_2 = \beta\delta_4 \end{cases}$$

Ellenőrizzük még egyszer, vajon a magatartási adatok jól definiálták-e vagy sem. Ehhez meg kell mutatnunk, hogy (4.6) bal oldala megfelel a (4.4) specifikációnak, amikor α, β, $\delta_3, \ldots, \delta_6$ értéke megengedett, de tetszőleges. Ez_1 és Ez_2 várható értékre ez nyilvánvaló, mivel semmilyen feltételt nem kell kielégíteniük. A szórások esetében cov zz' pozitivitása δ_4, δ_5, δ_6 feltételezett pozitivitásából következik. Lásd később.

[30] felteszi (4.3a)-t, de (4.3b)-t nem. Következtetése az, hogy az α, β *már nem identifikálható Ez és* cov zz' *adatok alapján.*

Ez a következtetés elfogadhatatlan rendszerelméleti szempontból és nem csak azért, mert (4.3b) hiányában β rosszul meghatározott.

[30] a következőképpen gondolkodik. Feltéve, hogy cov zz' szigorúan pozitív definit (a 4.4 adatspecifikáció része), β tetszőleges adott értékére nyilvánvaló, hogy a

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \beta^2 \end{bmatrix} \delta_4 < \operatorname{cov} zz'$$

egyenlőtlenség eléggé kicsi pozitív $\delta_4 = \operatorname{var} u$ segítségével teljesül.

Ekkor a

$$\operatorname{cov} zz' = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta & \beta^2 \end{bmatrix} \operatorname{var} u + \operatorname{cov} v$$

egyenlőség kielégíthető megfelelően választott pozitív δ_5 és δ_6 segítségével. Minden választott β-ra az

$$Ez_2 = Ey = \alpha + \beta Eu = \alpha + \beta Ez_1$$

egyenlőségek α egyetlen értékét határozzák meg, mivel Ez_1 és Ez_2 az adatspecifikáció részeként ismert. (Mivel [30] nem határozza meg cov zz'-t, α-t egyszerűen cov $z_1z_2 = \beta\delta_4$-nek *vesszük* ebben az összefüggésben.)

Koopmans és Reiersol idézett gondolatmenete azt mutatja, hogy a „magatartás" leképezése (2.1)-ben két, egymástól különböző objektumnak (= rendszer + környezet) tulajdoníthatja ugyanazt a magatartást. Ezért azt várhatnánk, hogy (értelmezésünkben) a realizálási problémának nem egyértelmű a megoldása. Tulajdonképpen a [30] által megállapított „paraméterek identifikálhatatlanságához" az ott használt gondolatmenetet túl kell haladni és az alkalmazott parametrizációt részletesen kell megvizsgálni.

A probléma következetes rendszerelméleti elemzése a következő.

Meghatározzuk a (4.6) realizálási feltételek és a (4.4) adatfeltételek mindegyik $(\alpha, \beta, \delta_3, \ldots, \delta_6)$ megoldás-halmazát. Az első egyenlet triviális. A második egyenlőség β bármely adott értékére triviálisan oldható meg α-ra. Így csak az utolsó három egyenlőség megoldása érdekes.

A (4.6) első három egyenletét megoldó (β, δ_4) pár, ha létezik egyáltalán, ki kell hogy elégítse a következő feltételeket

$$(4.7)\quad \left|\begin{array}{l} \text{(a)}\ \beta\delta_4 = \operatorname{cov} z_1 z_2, \\ \text{(b)}\ \operatorname{var} z_1 > \delta_4 > 0, \\ \text{(c)}\ \dfrac{\operatorname{var} z_2}{|\operatorname{cov} z_1 z_2|} > |\beta|. \end{array}\right.$$

A (4.7) összes (β, δ_4) megoldáshalmazának előállítása elemi feladat az algebrai geometriában. Kiderül, hogy megoldás mindig létezik a $\operatorname{cov} z > 0$ feltétel miatt. Valójában a (4.7a) hiperbolának az a szelete adja meg az összes megoldások halmazát, amelyeket a (4.7b—c) egyenlőtlenségek határolnak be. *Tehát a realizálási feladat megoldása nem egyértelmű.* (Ez lényegesen erősebb állítás, mint egyszerűen megállapítani az „identifikálhatatlanságot" [30].)

(4.7) megoldása közvetlenül is kifejezhető az alábbi feltétellel:

$$(4.8)\qquad \varrho^2_{z_1 z_2} < \frac{\operatorname{var} u}{\operatorname{var} z_1} < 1,$$

ahol $\varrho_{z_1 z_2}$ a z_1 és z_2 véletlen változók közötti korreláció koefficiense. A (4.8) egyenlőtlenség azt a mennyiségi hatást mutatja, amit a zaj gyakorolt $\operatorname{cov} u$ identifikálásának nem egyértelműségére; kis zaj $\varrho_{z_1 z_2} \sim 1$ és $\operatorname{var} v_1 \sim 0$, tehát ekkor az identifikáció elég pontos.

Ha $\delta_4 = \operatorname{var} u$ értékét úgy rögzítjük, hogy a (4.8) követelményeket kielégíti, akkor a rendszer plusz környezet minden más paramétere egyértelműen meghatározott; például $\beta = (\operatorname{cov} z_1 z_2)/(\operatorname{var} u)$.

Tehát emlékeztetve a *mi* modell definíciónkra, miszerint a magatartási adatok (adott rögzített halmaza) realizálásainak összessége a modell, azt mondhatjuk, hogy *problémánkra a modell absztrakt módon megfelel a* $(\varrho^2_{z_1 z_2}, 1)$ *nyitott intervallumnak, a modellben bármely* (rendszer plusz környezet) *egyértelműen írható le ezen intervallum egy pontjának kiválasztásával és ezúton* $\operatorname{var} u(\operatorname{var} z_1)^{-1}$ *értékének megadásával.* Tehát *a modell* a rendszer és környezet *egyparaméterű családja.*

Elméleti szempontból bizonyára ez a lehetséges legjobb eredmény, hiszen csak a magatartási adatok lényeges paramétereivel írja le a modellt.

Ugyanakkor az előző állítás érthetősége nagymértékben az alkalmazott parametrizáción múlik. Még világosabbá tehető, ha például (4.8)-at helyettesítjük egy, a β (lényeges) paraméterre vonatkozó egyenlőtlenséggel. Az ilyen egyenlőtlenség létezése előző eredményeinkből következik. Egyszerű számítás a következő eredményre vezet

$$(4.9)\qquad \frac{|\operatorname{cov} z_1 z_2|}{\operatorname{var} z_1} < |\beta| < \frac{\operatorname{var} z_2}{|\operatorname{cov} z_1 z_2|}, \quad \operatorname{sgn} \beta = \operatorname{sgn} \operatorname{cov} z_1 z_2,$$

Ez nagyon érdekes összefüggés, hiszen a realizálási probléma megoldását a klasszikus regressziós együtthatók szerepeltetésével adja meg. De itt úgy kerülnek be a sztochasztikus realizálási probléma megoldásának leírásába, hogy a klasszikus statisztikának sem a feltevéseire, sem a technikájára nem kellett hivatkozni.

(4.9) meglepő formája azt sejteti, hogy a sztochasztikus realizálási elmélet, (ami ebben a fejezetben érintett zajos esetre még kidolgozásra vár), bizonyos tekintetben a klasszikus statisztikával szemben alternatívát igér, legalábbis ami a legkisebb négyzetek módszerét, a regressziós elemzést és a maximum likelihood becslést illeti. Az ebből eredő következményeket [26]-ban ismertetem n zajos változó közötti m lineáris összefüggés identifikálásának általános esetére.

Az ökonometriában a (4.1—3) szerkezet általában, mint a „hiba-a-változókban" modell ismeretes (lásd [8]). Én felcserélném ezt a régies és kétértelmű terminológiát a „lineáris összefüggések identifikálása zajos adatokból" kifejezésre, ami [26] címe. A probléma lényege a z_1 és z_2 közötti összefüggés lineáris részének az előállítása; az adatokból (4.1) eltávolítása utáni statisztikai maradék mérési hibának tulajdonítható, de lehet megmagyarázatlan tényezők, egyéb változók, a lineáritás hiányának stb. hatása, ami — a fenti állásfoglalásom szerint — a „zaj" szó jelenlegi tudományos használatában foglalható össze.

A „hiba-a-változókban" modell (hogy ezt a már meggyökeresedett terminológiát használjuk) rossz hírre tett szert az ökonometriában. Ez az „identifikálhatatlansági" aspektusnak köszönhető. Nem értek egyet ezzel az értékeléssel, sem pedig a Koopmans—Reiersol-féle érveléssel.

Az itt vizsgált felvetés megegyezik azzal, amit Frisch használt úttörő munkájában [7]. (Egyébként (4.3) mindkét tagját feltételezi !). Különösen, ha egynél több lineáris összefüggés identifikálásáról van szó, akkor Frisch problémáját soha nem tanulmányozták matematikailag megfelelően. Nehéz elkerülni a következtetést [26], hogy Frisch elgondolásának jelenlegi népszerűtlensége, továbbfejlesztésének elmaradása inkább matematikai, mint koncepcionális nehézségeknek köszönhető.

A következtetések érdekében összefoglaljuk a rendszerelméleti kritikát Koopmans és Reiersol állításáról, miszerint „α és β nem identifikálható".

(i) Egy paraméter identifikálhatósága rosszul definiált fogalom. Egy adott paraméternek nincsen invariáns jelentése, mivel több ekvivalens parametrizáció létezik. Például var u és β ekvivalens módon használható a realizáció nem egyértelműségének bemutatására.

(ii) Ami jól definiált, az a modell (= minden realizáció együtt) absztrakt parametrizálása. Az itteni feladatot illetően kiderült, hogy ez egy nyílt intervallum. Az, hogy a megoldásként kapott intervallum hogyan ábrázolódik, attól függ, hogy milyen parametrizációt fogadtunk el.

(iii) Helytelen az az állítás, amely szerint az (α, β) pár nem identifikálható; ha β (4.8)-nak megfelelő tetszőleges értéket vesz fel, akkor (4.6) második összefüggése rögzíti α-t. Így az $\{\alpha, \beta\} = \mathbf{R}^2$-ben levő egy görbének bizonyos szakasza az, amelyik nem identifikálható és nem egy tetszőleges $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ pont.

Az ökonométereket az a naív (a statisztikai paraméterbecslésből és a maximum likelihood módszerből fakadó) célkitűzés babonázta meg hosszú éveken át, hogy minden „paraméternek" csak egyetlen „becsült" értéke lehet. Nincs ésszerű ok, hogy miért lenne így, ha a rendszer megfigyelésében bizonytalanság van, mint esetünkben, akkor célszerű az értékek egy intervallumát keresni. És ésszerűtlen arra törekedni, hogy egyetlen értéket kapjunk eredményül, mivel ez szükségszerűen személyes előítéletek ráerőszakolását jelenti az adatokra. A realizálási elmélet azt mutatja be, hogy zajos adatoknak valószínűségi modell felel meg.

Az itt elvégzett identifikálhatósági elemzés eredményei erőteljesen kapcsolódnak az identifikálandó rendszert és sztochasztikus környezetét érintő kezdeti feltevésekhez.

Például [33] bemutatta, hogy problémánk esetében (szintén explicit módon a cov $v_1 v_2 = 0$ feltétellel) a sztochasztikus realizáció nem egyértelműsége megszüntethető a következő átalakítással. Tekintsük u-t és v_1-et véletlen sorozatnak és feltesszük, hogy az első autokorrelált, míg a második fehér. Azután var u egyértelműen meghatározható, ez a feltevés bizonyos „előítéleteket" (lásd a 110. old.) jelent, amelyeket a (4.4) becsléséhez felhasznált $\{z_t, = 1, 2, \ldots\}$ idősorra tesztelni kell. Elfogadva [33] előítéletét a probléma láthatóan az egzakt sztochasztikus realizálási elmélethez tartozik.

Zárjuk ezt a fejezetet azzal a reménnyel, hogy a benne elemzett (4.1–2) feladatot egyszer majd a zajos realizáció-elmélet csírájának fogják tekinteni.

5. Szimultán egyenletek becslése

Ebben a fejezetben a szimultán (statikus) összefüggések standard ökonometriai becslésének feladatára alkalmazzuk a sztochasztikus realizálási elméletet. Az elemzés a [9], [29], [31]-ben ismertetett hagyományos keretekre szorítkozik.

Az olvasó érdekében az 1. táblázatban megadjuk a hagyományos és az itt használt fogalmak közötti megfeleltetést. (Sajnálatos, hogy a „struktúra" fogalma, ahogyan azt Koopmans [29]-ben definiálta és később Malinvaud a [32] mű 18. fejezetében, valamint Theil a [43] mű 9. és 10. fejezetében használja, csaknem szöges ellentéte annak, ahogyan ezt a fogalmat az ökonometria berkein kívül értelmezik. A „struktúra" rendszerint az általános feltevéseket vagy egy probléma elemzésének teljes keretét foglalja magába, sohasem valamilyen specifikus paraméterértéket; a struktúra a csont és nem a hús.

E fejezet tanulmányozásának tárgya egy lineáris szimultán egyenletrendszer, amelyben a változók értékét sokszor megfigyeljük:

$$By_t = Cu_t + v_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T_0. \tag{5.1}$$

Itt $y_t \in \mathbf{R}^p$ a *kimeneti* vektor, $u_t \in \mathbf{R}^m$ a *bemeneti* vektor és $v_t \in \mathbf{R}^p$ az úgynevezett „egyenlet-hiba" vagy „zavar" vektor, amely a $\Sigma = (B, C)$ párral definiált determinisztikus rendszer magyarázott területén kívüli összes sztochasztikus hatást képviseli.

Mivel a modellezés célja az, hogy a kimenetnek a bemenettől való függését tanulmányozzuk, nyilvánvalóan fel kell tennünk, hogy az input egyértelműen meghatározza az outputot.

1. táblázat

KOOPMANS fogalmai [22]	E cikk fogalmai
Endogén változók	kimenet
Exogén (vagy predeterminált) változók	bemenet
Modell (= struktúrák csoportja)	rendszerek és környezetek osztálya
Modell (szimultán egyenletbecslésre)	szelektor
Struktúra	rendszer plusz sztochasztikus környezet adott paraméter értékkel
Strukturális paraméterek	leíró paraméterek
Megfigyelten ekvivalens struktúrák	rendszer és környezet azonos magatartással
Identifikált (identifikálható) egyenletek	kanonikus alakok
Éppen identifikált strukturális paraméterek	a kanonikus alak együtthatói; lényeges paraméterek; lokális koordináták
—	modell
—	magatartás

Ezért fel kell tennünk, hogy az osztály összes (5.1) rendszerére teljesül:

$$\det B \neq 0. \tag{5.2}$$

Ez teszi teljessé a (2.1) értelmében a „rendszer" meghatározását. (Ebben az elemi tárgyalásban eltekintünk az (5.1) változói közötti autokorreláció (időkorreláció) lehetőségétől. Így a problémát tisztán statikusan kezeljük; eleve kizárjuk a dinamikus modellezést.

A (2.1)-beli „sztochasztikus környezetet" a hagyományos specifikációk itt következő második adagja adja meg, azaz minden véletlen változó gaussi és

$$Ev = 0,$$

$$\mathrm{cov}\ uv' = 0 \quad (' = \text{transzponált})$$

$$\mathrm{cov}\ v > 0 \ \text{(rögzített, ám ismeretlen)} \tag{5.3}$$

$$Eu = 0,\ \mathrm{cov}\ uu' > 0.$$

[A sokaság átlaga és szórása helyett, mintaátlagként és mintaszórásként is definiálhatjuk az (5.3) adatokat. Ez jelentené a *Fisher*-i paradigma (amely a paramétereket valószínűségeloszlásokkal definiálja) elkerülését és ahelyett, hogy közvetlenül az adatokkal dolgoznánk, véges $\{(y_t, u_t), t = 1, \ldots, T\}$ idősorokkal lesz dolgunk. Ami a jelen tárgyalásmódot illeti, a két álláspont közötti különbség érdektelen.]

A rendszer ,,magatartásának'' meghatározása általában az y, u valószínűségi vektorok együttes eloszlásának megadását jelenti. Normális eloszlást feltételezve, ez ekvivalens a következő specifikációval:

$$E\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = 0, \quad \operatorname{cov}\begin{bmatrix} yy' & yu' \\ uy' & uu' \end{bmatrix} > 0. \tag{5.4}$$

Ismét érdektelen, vajon a ,,cov''-ot alapsokaság vagy minta értelemben használjuk.

Esetünkben a (2.1)-gyel analóg (rendszer $\to$ magatartás) nyíl megértéséhez szükséges elemzés egyszerű. Az első kérdés: milyenek az ekvivalens rendszerek? A $By = Cu$ egyenlőség mindkét oldalát megszorozzuk egy nem szinguláris mátrixszal. (5.2)-t használva az következik, hogy az $(I, B^{-1}C)$ rendszer ekvivalens a (B, C) rendszerrel. Általában a rendszerekvivalencia megkövetelt definíciója ezek után:

$$(B_1, C_1) \sim (B_2, C_2) \text{ akkor és csak akkor, ha } B_1^{-1}C_1 = B_2^{-1}C_2. \tag{5.5}$$

A (B, C) ekvivalencia osztálya nyilvánvalóan tartalmazza az $(I, B^{-1}C)$ elemet. Nincs értelme tehát, hogy ne fogadjuk el a hagyományos terminológiát, amely szerint

$$y = Au + w, \quad A := B^{-1}C, \quad w := B^{-1}v, \tag{5.6}$$

az (5.1) *redkuált formája*. Világos, hogy ekvivalens rendszerek azonos (5.4) magatartási adatokkal rendelkeznek.

A következő kérdés az, vajon az (5.4) specifikáció magába foglalja-e az (5.1–2)-nek megfelelő rendszer és környezet által generálható összes adatot. Ez esetben a válasz elég egyszerű. A feltételes várható érték (vagy regresszió) módszerét használva rögtön azt kapjuk, hogy

$$A := (\operatorname{cov} yu')(\operatorname{cov} uu')^{-1}, \quad w := y - Au, \quad \operatorname{cov} uw' = 0. \tag{5.7}$$

Épp ezért láthatjuk, hogy bármely (5.4) *magatartási adat pozitív definit kovariancia mátrixszal megfelel az* (5.1–4) *feltételeket kielégítő rendszernek és környezetnek*. Továbbá a realizálási probléma megoldása előállításának természetes módja az, hogy meghatározzuk az (5.4) adatokat előállító minden rendszer ekvivalencia osztályának egy specifikus elemét, azaz az (5.7) redukált formát.

A realizálási probléma megoldásának teljessé tételéhez meg kell határoznunk még a hibatag kovarianciamátrixát. Ez könnyű, egyenesen következik w meghatározásából:

$$\operatorname{cov} ww' = \operatorname{cov}(y - Au)(y - Au)' = (I - A)\operatorname{cov}\begin{bmatrix} yy' & yu' \\ uy' & uy' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I \\ -A \end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

A magatartási adatok és A ismeretéből egyértelműen következik $\operatorname{cov} ww'$ ismerete.

Most már rendelkezésünkre áll az ökonometriában jól ismert tétel:

(5.9) *Az* (5.1)-*re vonatkozó realizálási feladatnak egyetlen megoldása van az* (5.2—4) *hagyományos specifikáció esetén az* (5.5) *ekvivalencia relációt kielégítő osztály ok körében.*

Ez újabb példa olyan egzakt sztochasztikus realizálási problémára, amelyik a determinisztikus realizálási problémák alapvető egyértelműségét megőrzi. [Ha az (5.1—3) rendszert sokaság értelemben specifikáljuk, míg az (5.4) adatokat minta értelemben adjuk meg, akkor természetesen bizonytalanság léphet fel A és cov ww' meghatározásában, éspedig a sokaság kovarianciájának a mintából való (5.4) szerinti becslése pontatlanságából fakadóan. Ez a probléma érdektelen a cikkben tárgyalt kérdések szempontjából.]

Helytelen ennek az eredménynek az ökonometriában szokásos értelmezése, miszerint a magatartási adatokból „egyértelműen identifikálható a redukált forma". Az (5.6) redukált forma csak a $[(B, C)]$ ekvivalencia osztály egy eleme és éppen *az ekvivalencia osztály az, amely egyértelműen identifikált,* nem pedig egy eleme.

Az ökonometriában kritika nélkül elfogadják, hogy a cél a (B, C), det $B \neq 0$ „strukturális forma" paramétereinek „identifikálása". Mivel a $(B, C) \to B^{-1}C$ leképezése nem injektív, ebben a naiv értelemben az identifikáció nem lehet egyértelmű. Hogy ezt mégis kikényszerítse, Koopmans elképzelése az volt, hogy egy olyan (B_*, C_*) párt specifikál, amelynek bizonyos elemeit zérusnak tekinti, míg a többi elem szabad paraméter marad. Ezt az motiválta, hogy az identifikáció során olyan „közgazdasági" ismeretet lehet figyelembe venni, amelyektől a magatartási adatok (5.4) specifikációjánál eltekintettünk. Tegyük fel, hogy (B_*, C_*) kiválasztható ilyen módon, azaz szabad paraméterei kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők A paramétereinek, és ezáltal a magatartási adatoknak. Ekkor (B_*, C_*) paraméterei, valamint azok az egyenletek, amelyekben megjelennek, Koopmans szavaival „éppen identifikáltak" vagy „identifikálhatók". [Matematikai értelemben nincs olyan $(B_*, C_*) \neq (I, A)$, amely kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető lenne az összes A-nak, az A mátrixok egy kis halmaza általában ki kell hogy maradjon. Lásd MALINVAUD ([32], p. 718).]

Egy (5.1)-beli tetszőleges (B, C) mátrixpár vizsgálata annyi, mintha leíró paramétereket keresnénk. (B_*, C_*)-ben a zérushelyek megadása oly módon, hogy a megmaradó (szabad) paraméterek majdnem kölcsönösen egyértelműen felelnek meg A-nak, annyit tesz, mintha lényeges paramétereket keresnénk. [Nem foglalkozunk ehelyütt az ún. „túlidentifikált" esettel, ami további korlátozásokat jelent A-ra nézve.]

Az „identifikálni" igének és származékainak előbb kifejtett értelmű használata az ökonometria megrögződésévé vált. Ez felettébb sajnálatos. A tudományos modellépítésben elterjedt jelentése: „a megfigyelésekből a rendszer jellemzőire való következtetés". Ez alapvetően eltér a Koopmans által az „identifikálni" szónak adott technikai értelmezéstől.

Ahhoz, hogy tisztán lássunk, megismételjük, hogy a magatartási adatok csak az $[(I, A)]$ ekvivalencia osztályt „identifikálják" a szó igazi értelmében. Az ekvivalencia osztályok $\{[(I, A)]\}$ családja kölcsönösen egyértelműen felel meg az $\{A\}$ családnak; másképpen, minden egyes ekvivalencia osztály pontosan egy numerikus A mátrixnak felel meg. A Koopmans-i értelemben vett

„identifikálás" (majdnem) minden ekvivalencia osztályból egy (B_*, C_*) típusú reprezentáns kiválasztását követeli meg. Ha ez a feltétel kielégül, akkor (B_*, C_*)-ot az A (majdnem) *kanonikus alak*jának nevezzük. [Ez nemcsak rendszerelméleti terminológia, hiszen megegyezik a régi tiszta matematikai szóhasználattal, ahol a „kanonikus alak" egy ekvivalencia osztály családjának minden tagjából (valamilyen absztrakt vagy konkrét szabály szerint) egyetlen reprezentánst választ ki.]

Koopmans, Rubin és Leipnik [31] megoldották azt a problémát, hogy hogyan specifikáljunk egy *megfelelő* (B_*, C_*)-ot, azaz kanonikus alakot A-ra. Ez a tartalma az ún. „identifikálhatósági rang- és rendfeltételeknek".

Félrevezető egy megfelelő (B_*, C_*) szabad koefficienseiről azt mondani, hogy „identifikálták". Akárcsak A elemei, ezek a koefficiensek is csak az $[(I, A)] = [(B_*, C_*)]$ ekvivalencia osztály „koordinátái". Mindkét paraméterhalmaz megfelelő „koordináták" halmaza. A választás közöttük nem tartozik bele az identifikációs probléma (2.1) értelmű specifikációjába.

Az (I, A) forma arra jó, hogy az (5.4) magatartási adatok értékeit konvertálja az adatok által meghatározott ekvivalencia osztályhoz tartozó rendszerek paramétereivé. Amikor ez kész van, hasznos lehet ezeket a számokat még egy formában felírni, ez (B_*, C_*), amelyet úgy választunk ki, hogy az adatok megfelelő közgazdasági interpretációja lehetővé váljon.

A (B_*, C_*)-ban szereplő közgazdasági feltevések semmilyen szerepet nem játszanak az identifikálás során. Az adatok (B_*, C_*) formába történő átalakítása a világon semmit sem mond az (5.1—4) specifikációban bennerejlő közgazdasági feltevésekről. [Azonban a (B_*, C_*) forma könnyebbé vagy közvetlenebbé teheti az ilyen vizsgálat elvégzését.]

Számos közgazdaságilag indokolható kanonikus alak létezik. Mindegyiket szembesíteni kell a valóságos adatokkal. Ha a modellezőnek tetszenek azok a számok, amiket a realizáció során kedvenc (B_*, C_*)-jához kapott, megnövekedhet bizalma a kanonikus alak választása során beépített különös közgazdasági feltevéseiben. Ezzel szemben valószínűleg nem állíthatja azt, hogy az adatokból „identifikálta" ezeket a feltevéseket; lehet, hogy egy másik kanonikus alak $(B_\#, C_\#)$ még szebb számokat adna.

Elfogadva Koopmans klasszikus identifikációs problémájának (5.3) környezeti specifikálását, még nyitva marad az (5.5) ekvivalencia osztályból a „helyes" kanonikus alak választásának általa nem érintett kérdése.

Feltesszük, hogy két szimultán egyenletre a következő paramétereket kaptuk:

(D_*) mennyiség $= \alpha$ (ár) $+ \beta$ (fogyasztó jövedelme),

(S_*) mennyiség $= \gamma$ (ár) $+ \delta$ (termelési költség),

amely a következő mátrixszerkezetnek felel meg:

$$(5.10) \qquad (B_*, C_*) := \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \cdot \beta & 0 \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ 1 & -\gamma \cdot 0 & \delta \end{bmatrix}.$$

Pusztán az (5.10) alakjából biztosan nem helyes arra következtetni (ahogy ezt az ökonometriai szövegek megteszik), hogy (D_*) keresleti egyenletként „identifikált" (azt állítva, hogy a mennyiség a fogyasztó jövedelmétől függ és nem függ a termelési költségtől), és hogy (S_*) kínálati egyenletként „identifikált" (mivel a mennyiség a termelési költségtől függ és nem függ a fogyasztó jövedelmétől). Bármelyik kereslet-kínálati helyzetet úgy kell felfogni, mint a gazdaság bonyolult tényezőinek egymásra hatását; épp ezért ugyanúgy indokolt (és talán javítja a közgazdasági intuíciót) a következő kanonikus alak definiálása:

$$(5.11) \qquad (B_{\#}, C_{\#}) := \begin{bmatrix} 1 & -a \cdot b & 0{,}01b \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ 1 & -c \cdot 0{,}1d & d \end{bmatrix}.$$

(5.11)-et használva, az (a, b, c, d) paraméterek „identifikálására" valószínűleg eltérő értékeket eredményezne az (5.10) kanonikus alak által nyújtott $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ „identifikált" paraméterektől.

Elkerülhetetlen az a következtetés, miszerint *a hagyományos értelemben lehetetlen a kereslet-kínálat összefüggések identifikálása az* (5.4) *adat-specifikáción kívüli új feltevések nélkül.*

Másképpen, a kereslet és kínálat árrugalmasságainak [az (α, β), illetve (a, b) paramétereknek] maghatározása során nélkülözhetetlen egy további *feltevés,* egy különösen kanonikus alak kiválasztása, amely logikailag független az adatoktól.

Azt javasoljuk, hogy az ilyen modell-feltevéseket nevezzük *előítélet*nek. Így az előítéletet pontosan definiált technikai fogalomként használhatnánk, az adatok specifikációjától független feltevéseket jelölnénk ezzel. A szándékolt intuitív jelentés közel áll a szó hétköznapi jelentéséhez, amely pejoratív. Emlékeztetni kell, hogy a modellezés során az előítélet lehet jó is, és valóban a legértékesebbek az olyanok, amelyek az adatok természetére vonatkozó brilliáns feltevéseket tartalmazzák. (A fotoelektromos effektus einsteini magyarázata szolgálhat például.)

Természetesen a rendszernek és a környezetnek a specifikációja maga is nevezhető magasabb szintű „előítéletnek". Ehhez további megjegyzések szükségesek. A „linearitás" nem bagatellizálható előítéletté, hiszen a vizsgált összefüggések világában nagyszámú esetre ellenőrizték ezt a feltevést. Hasonlóképpen, egy ismeretlen normális eloszlásra vonatkozó Fisher-féle feltevéseket a tapasztalat igazolja. Ugyanakkor a modellezés magasabb szintjén kívánatos lenne megszabadítani a mai elméletet (és gyakorlatot) a „linearitás" és a „normál eloszlás" előítéleteitől.

Haavelmo, Koopmans és a későbbi irodalom szimultán egyenletbecslési modelljének hagyományos specifikációja számos alacsonyszintű előítéletet tartalmaz. Hármat említünk ezek közül:

(i) A változók *ad hoc* szétválasztása „exogén" és „endogén" csoportokra.

(ii) (5.3)-ban $\operatorname{cov} uv' = 0$ megkövetelése, amely lehetővé teszi, hogy (5.1)-ben v egyenlet-hibák a különböző egyenletek között korreláltak legyenek, de korrelálatlanok a magyarázó változókkal.

(iii) A magyarázó változók mérése pontosságának feltevése.

Az előítéletek első fajtáját Haavelmo közismert [9] cikkével lehet szépen bemutatni, amely a fogyasztási hajlandóság γ becslésével foglalkozik. Haavelmo azt állítja, hogy γ meghatározása a c fogyasztásnak az y jövedelemre vonatkozó regressziójával (statisztikai értelemben) torzított, mert a jövedelem nem autonóm, viszont (a keynesi közgazdaságtannak megfelelően) a $z := y - c$ beruházás az. Haavelmo a keynesi előítélet fényében elemzi az adatokat. c-nek y-ra vonatkozó regressziója, mely szerint a jövedelem okozza a fogyasztást, a másik előítélet alkalmazása. (Mivel nehéz jövedelem nélkül fogyasztani, a klasszikus közgazdaságtan utóbbi előítélete indokoltnak tűnik sokak, különösen a nem-közgazdászok szemében.) Az itt bevezetett technikai értelemben *mindkét* eljárás előítéletnek minősül. Haavelmo nem szembesíti az adatokat a keynesi előítélettel egyszerűen kényszeríti az adatokat, hogy γ-ra értéket adjanak. Ha Haavelmo előítéletét olyan adatokra alkalmaznák, ahol a nemzeti jövedelmet babiloniak születésnapjaival, a fogyasztást telefonszámokkal helyettesítenénk, akkor is kapnánk γ-ra egyértelmű értéket. Ez azonban számolás, nem identifikálás.

Mesénk tanulsága világos. *A klasszikus szimultán egyenletbecslési probléma az egzakt sztochasztikus realizálási elmélet triviális esete.* Koopmansnak és követőinek elmélete nem az igazi identifikálási problémával foglalkozik, mivel a rendszerre és környezetre már eleve előítéleteket tartalmazó feltevéseket erőltetnek. Koopmans elmélete csak a megfelelő parametrizáció leszűkített kérdésével foglalkozik; ezt a feladatot oldja meg teljesen.

Két érvényes kanonikus alak (B_*, C_*) és $(B_\#, C_\#)$ közötti választást, amely az identifikálási probléma lényegének látszik, a hagyományos szimultán egyenletbecslés nem vizsgálja. Ez a választás a hagyományos feltevések keretein belül maradva nem végezhető el.

A szimultán egyenletek hagyományos három előítéletének modern kritikája ma is élő kutatási feladat. Bizonyos szempontból való összefoglalást találhat az olvasó Wold [45] művének 1. fejezetében. A matematikai problémák egy részét [26]-ban vizsgáltuk.

6. Az ARMAX modell

Az ARMAX modellek (lásd [2]) széleskörű ökonometriai alkalmazása kifejtésre váró rendszerelméleti kérdéseket vet fel.

Az ökonometria az ilyen típusú modelleket általános formában a következőképpen önti képletbe (lásd pl. [11]):

$$\sum_{r=0}^{n_1} Q_r y_{t-r} = \sum_{s=0}^{n_2} N_s u_{t-s} + v_t. \tag{6.1}$$

Az u_t és y_t vektorváltozók az identifikálandó determinisztikus rendszer *bemenetét* és a *kimenetét* jelölik. A v_t vektor az additív „hibatag", amely az identifikálási feladat sztochasztikus környezetét képviseli.

A következőkben csupán (6.1)-nek a determinisztikus vonatkozásait vizsgáljuk. A megválaszolandó alapkérdés: *milyen értelemben határoz meg* (6.1) *egy lineáris rendszert?*

A választást nyolc megjegyzés formájában adjuk elő:

1) A (6.1) egyenletek a rendszert *külső* értelemben írják le, nincsenek állapotváltozók. Állapotváltozók szerepeltetését [a (6.1)-gyel ekvivalens (2.2b) alakú

rendszer létét] a realizálási elmélet megköveteli. Lényegtelen az, hogy a modellező szeret-e az állapotváltozó fogalmával gondolkodni; az állapotváltozók mindig jelen vannak, amikor a lineáris rendszer koncepcióját elemezzük.

2) Ahhoz, hogy az u_t bemenő sorozat egyértelműen meghatározza az y_t kimenő sorozatot, teljesülnie kell a

$$\det Q(z) \neq 0 \tag{6.2}$$

feltételnek ($\det Q$-ra mint polinomra), ahol a $Q(z)$ mátrixpolinom:

$$Q(z) := \sum_{r=0}^{n_1} Q_r z^{n_1-r}. \tag{6.3}$$

3) Most már értelmezhetjük a $Q^{-1}(z)\, N(z)$ objektumot, ahol $N(z)$ a következő mátrixpolinom:

$$N(z) := \sum_{s=0}^{n_2} N_s z^{n_2-s}. \tag{6.4}$$

$Q^{-1}(z)\, N(z)$ reacionális mátrixfüggvény és ezért $z = \infty$ körül formálisan Laurent sorba fejthető. Ahhoz, hogy a szóban forgó Σ rendszer átmeneti függvényét összefüggésbe hozhassuk ezzel a sorral, az okság miatt szükséges feltenni, hogy

(6.5) $\quad Q^{-1}(z)\, N(z) =$ (szigorúan) valódi tört mátrixfüggvény legyen.

4) A legutóbbi feltevés azt jelenti, hogy

$$Q^{-1}(z)\, N(z) = \sum_{t>0} A_t z^{-t}, \tag{6.6}$$

ahol $=$ a formális hatványsorok értelmében érvényes. Most már abban a helyzetben vagyunk, hogy meg tudjuk adni a rendszer $S = (A_1, A_2, \ldots)$ standard külső leírását a (2.4) alakban. Természetesen S *definíciószerűen* ,,identifikálható'', mivel ezek azok az adatok, amelyekre végül is az identifikálási feladat vonatkozik.

5) A (6.5) identifikálhatóságára vonatkozó ,,feltételeket'' néha közöl az irodalom. Ezek általában u_t-re vonatkoznak (például $u_t \neq 0$). Szeretnénk, ha egy rendszerről beszélve *nem* használnánk ilyen fogalmakat; ,,az identifikálhatóság'' S lényeges tulajdonsága kell hogy legyen, s nem pedig a környezettől függő valami. Érdekes lenne megvizsgálni ,,S identifikálásának'' kérdését ,,azt figyelembe véve, hogy jelzések egy bizonyos környezetébe van beágyazva'', ám ehhez hasonló kérdéseket itt most nem érintünk.

6) Nyilvánvaló, hogy $(Q(z), N(z))$-nek a (6.6) képlet szerinti lényeges identifikálhatósága azokra az összefüggésekre vonatkozik, amelyek egyrészt S-nek az $A_1, A_2, \ldots$, mátrixokkal megadott leíró paraméterei, másrészt a $(Q(z), N(z))$ párnak a (6.3–4)-beli $Q_0, Q_1, \ldots$ és $N_0, N_1 \ldots$ koefficiensmátrixokkal megadott leíró paraméterei között állnak fenn.

Ilyen kérdéseket azonban csak akkor vizsgálhatunk, ha már a rendszer jól definiált. Ez nyilvánvalóan megköveteli egy ekvivalencia reláció bevezetését:

$$(Q(z), N(z)) \sim (\hat{Q}(z), \widehat{N(z)}), \tag{6.7}$$

amelyet a

$$Q^{-1}(z)\,N(z) = \hat{Q}^{-1}(z)\,\hat{N}(z) \tag{6.8}$$

feltétellel határozunk meg. Ez a reláció úgy tekinthető, mint a (6.3—4)-gyel megadott leíró paraméterekre vonatkozó korlátozás.

A (6.7) ekvivalencia műveletre azért van szükség, hogy elkerüljük a rosszul definiáltságot, amit $Q(z)$ és $N(z)$ közös osztói, valamint a különféle normálási konvenciók okozhatnak.

[*Megjegyzés.* A (6.3—4)-ben használt normálás a szokásos rendszerelméleti gyakorlatot követi, sajnos különbözik a [11], [12] művekben használtaktól. A szabványos terminológiát és jelöléseket lásd [2]-ben.]

7) A (6.2), (6.5) összefüggések, valamint (6.7) ekvivalencia reláció nyilvánvalóan szükséges és elégséges ahhoz, hogy a (6.6)-ban megadott

$$(Q(z),\, N(z)) \to S \tag{6.9}$$

absztrakt leképezés injektív legyen.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy (6.1) egy rendszer helyes (külső) definíciója, be kell mutatni, hogy ez a leképezés kölcsönösen egyértelmű. Így már csak azt kell belátni, hogy létezik (6.6)-ot kielégítő

$$S \to Q((z),\, N(z)) \tag{6.10}$$

injektív leképezés. Ez matematikai elemzést igényel.

Feltéve, hogy S-nek van véges dimenziójú (Σ_S) realizációja, a realizálási elmélet szerint van olyan $Z(z)$ valódi irreducibilis tört mátrixfüggvény, amelynek formális hatványsora megegyezik (6.6) jobb oldalával. Bemutatható továbbá, hogy minden valódi tört mátrixfüggvény lehetővé teszi a $Z(z) = Q^{-1}(z)\,N(z)$ faktorizációt. Másképpen kifejezve: megfelelően definiált $(Q_*(z), N_*(z))$ kanonikus alakok előállításával könnyű egy (6.6)-ot kielégítő $\Sigma_S \to (Q_*(z), N_*(z))$ leképezést megadni. Az erre vonatkozó irodalmat és módszereket Antoulas [2] mutatja be.

Ez bizonyítja már egy (6.10) alakú injektív leképezés létezését. Ebből következik, hogy az S és $(Q(z), N(z))$ közötti megfeleltetés kölcsönösen egyértelművé tehető a fent említett feltételek segítségével.

A legfontosabb dolog amire emlékezni kell az az, hogy egy lineáris rendszer (6.1)-gyel való helyes meghatározása a $(Q(z), N(z)) \to Z \to S \to \Sigma$ folyamat tanulmányozását követeli meg. Megfordítva, a standard külső S adatok lefordítása az ARMAX modell nyelvére lényegében egy realizálási probléma és legkönnyebben az $S \to \Sigma \to (Q(z), N(z))$ folyamatként ábrázolható. Így a realizálási elmélet az ARMAX modelleknek elkerülhetetlenül része, még a parametrizáció kérdésének felmerülése előtt.

Az ARMAX modell (lényeges) parametrizációja azért nehéz, mert egy (6.5)-szerű ekvivalencia relációra van hozzá szükség. Ez egyáltalán nem triviális probléma. A legjobban ezt végül is úgy vizsgálhatjuk, ha mindegyik alapdefiníciót összehasonlítjuk a Σ rendszer definíciójával, amelyet az összehasonlítás során hivatkozási pontnak tekintünk. Például Hannan [11] eredményeit nehéz érvényesség, jelentőség vagy újszerűség szempontjából kiértékelni, mivel azokat $(Q(z), N(z))$ egy *ad hoc* parametrizációjával kapta.

8) Hannannál [11 első mondatában] vagy Hannan, Dunsmuir és Deistlernél [12, p. 277, (4) egyenlet és később] az az elképesztő állítás talál-

ható, hogy *egy lineáris rendszer definíciója sztochasztikus jellegű feltételeknek van alávetve.* Egyetlen mondaton belül nézhetünk itt szembe annak a két alapelvnek az összezagyválásával, amelyekre e cikk (és az egész rendszerelmélet) elemzései épülnek.

A *linearitás* koncepciója olyan algebrai definíció, amelyet semmi mással nem szabad összekeverni. Ha megtesszük, akkor a matematika komoly felhasználása lehetetlenné válik.

A *rendszer* fogalma, ahogy ezt a 2. fejezetben kifejtettük, élesen megkülönböztetendő sztochasztikus környezetétől. A mai irodalomban számos zagyvaságért ennek elmulasztása a felelős. Az ún. Kalman-szűrő elmélet sikerének egyik titka éppen az, hogy ezt megfontoltan végzi el.

Ha ezeket a technikai finomságokat szem előtt tartjuk, akkor azt a kérdést, hogy hogyan határozunk meg egy determinisztikus lineáris dinamikus rendszert (külső értelemben) $(Q(z), N(z))$ segítségével, jelenleg teljes mértékben meg tudjuk válaszolni. A fennmaradó problémák a lényeges parametrizáció jobb megértésére vonatkoznak. Megemlítendő, hogy a szükséges matematikai eszközök meglehetősen újak még a rendszerelméletben is, és voltaképpen az utóbbi tíz évben fejlődtek ki ROSENBROCK könyve [40] nyomán.

Ismét oda jutottunk, hogy „a paraméter identifikálhatóság" nem létező probléma a (6.1) formában megadott feladat esetében, kivéve azt az esetet, amikor ezt a terminológiát csak a „parametrizáció" kódjául használják.

Az ARMAX általános lineáris rendszert határoz meg. Kétségkívül ez a reá támaszkodó módszerek sikerének fő oka. Ha elhagyjuk akár az AR-t, akár a MA-t, azaz ha csak mozgó átlagoló vagy csak autoregresszív modelleket vizsgálunk, akkor az általánosság eltűnt és további komoly fogalmi és technikai nehézségek lépnek fel. Ezt vizsgáljuk a következő fejezetben.

7. A realizálási elmélet alkalmazásai

„A paraméter identifikálhatósága" intuitíve is meglehetősen vonzó fogalom. Miért nem működik lineáris rendszerekre? Az ok egyszerűen az, hogy a rendszerelmélet — a tudomány egy speciális területe — most már elérte azt a pontot, ahol a realizálási elmélet (az előbbinek egy alterülete) képes szigorú tudományos vizsgálatnak alávetni „a paraméter identifikálhatósága" intuitív fogalmát. Miután „a paraméter identifikálhatóság" fogalmát a lineáris rendszerek pontos és konkrét esetére megvizsgálták, kiderült, hogy az nem életképes koncepció — mindamellett működnie *kell* lineáris rendszerekre, ha egyáltalán igényt tart elméleti jelentőségre.

A rendszerelméletet hasonlóképpen alkalmazhatjuk, ha a *mozgó átlagolású* (MA) és az *autoregresszív* (AR) modellek előnyeit akarjuk felbecsülni. A 20-as évek végefelé ezeket javasolták és használták az idősorelemzéssel foglalkozó szakemberek, jóval a rendszerelmélet megjelenése előtt. Ezek az eredmények ösztönzést adtak a rendszerelmélet kezdeti fejlődésének.

Jók-e vagy rosszak ezek a modellek? Bármelyik jó rendszerelméleti szakember bátor válasza erre a kérdésre bizonyára ez: „rosszak". Ezt az érzelmi következtetést szigorú módszerekkel levezetni nem is olyan könnyű, csak az ún. „parciális realizálási" elmélet kifejlesztése után vált lehetővé (lásd [16], [23]).

A parciális realizálási feladat akkor áll elő, amikor S csak parciálisan van megadva (2.4)-ben, azaz egy véges $A_1, \ldots, A_t$ mátrixsorozattal. Ekkor a minimális n_t dimenziójú $\Sigma_t^{\min}$ realizációk esetleg nem egyértelműek, de természe tesen n_t egyértelmű a minimalitás követelménye miatt. n_t-nek t függvényeként való elemzése nagyon fontos információkat nyújt a klasszikus realizálási feladatokról (lásd [23]). Mivel n_t az egész számokon értelmezett monoton, nem csökkenő, egész értékű függvény, ezért értéke csak ,,ugrásokban'' változhat. Ezeknek az ugrásoknak a szerkezete erős regularitási feltételeket elégít ki (lásd később).

Az AR és az MA sémák konstruktív egzisztencia bizonyítást szolgáltatnak: *a parciális realizálási feladatnak van (véges) megoldása minden t-re.* Matematikailag ez egy egyszerű ügy. Sajnos, ez az AR és az MA sémákhoz tartozó *egyetlen* rendszerelméleti gondolat.

A (skalár) AR séma akkor és csak akkor alkalmazható, ha n_t egy-ugrású függvény. Ez egyáltalán nem általános eset. Általában elő sem fordul. Mivel a realizálási feladatban az alapvető jelenségek az ,,ugrások'', ezért biztos, hogy található az ugrások különböző fajtáinak jelenlétét megállapító statisztikai módszer.

Ilyen módszert még nem fejlesztettek ki (a szerző tudomása szerint). Következésképp, az AR modellek alkalmazása valóságos adatokra: rendszerelméleti képtelenség. Amikor egy AR sémát alkalmaznak, előítéletből teszik, minden statisztikai bizonyosság nélkül arra, hogy a nagyonis valószínűtlen esettel van ténylegesen dolguk. Nem lehet azzal érvelni, hogy az AR az adatokhoz illeszkedik, mivel az ARMA, általánosabb lévén még jobban illeszkedik (lásd 6. fejezet). Mulatságos, hogy $n = 1$-re triviálisan igaz az, hogy AR $=$ ARMA. Következésképpen nincsen semmi kivetnivaló az elsőrendű autoregresszió alkalmazásában. Tulajdonképpen akkor dől össze az AR elmélet, amikor az $n > 1$ esetre próbálunk áttérni. Olyan általánosítással van dolgunk, amely jóval nehezebb rendszerelméleti problémához vezet, mint amilyennek először tűnik.

Magától értetődően ugyanez igaz az MA sémára is.

A parciális realizálási elmélet másik alkalmazása az $S = (A_1, A_2, \ldots)$ adatok parametrizálását érinti. Vegyük a skalár esetet $S = (a_1, a_2, \ldots)$, ahol az a_i-k valós számok, mivel a [23]-ban adott elmélet erre az esetre szorítkozik. Ilyen skalársorozatot például diszkrét idejű autokovariancia függvénynek tekinthetünk.

A [17]-ben kifejtett elmélet *bármely* ilyen sorozatra alkalmazható (nincsenek feltételek!). Következésképpen bármely $a_1, a_2, \ldots$,,adathoz'' tartozik egy hozzá tartozó lényeges ugrási szerkezet. Ha a t_i időpontban $q_i := n_{t_i} - n_{t_i-}$ nagyságú ugrás jelentkezik, akkor a következő megállapítások tehetők:

(i) $a_{i_i} \neq a^*_{t_i} :=$ [a_{t_i}-nek az $a_1, \ldots, a_{t_{i-1}}$-en alapuló (egyértelmű) parciális realiz záció alapján, (2.5) felhasználásával számított értéke]. Ez az állítás értelmes: mivel a parciális realizálási elmélet fő tétele biztosítja azt, hogy t_i-ben csak akkor jelenik meg ugrás, ha $a_1, \ldots, a_{t_{i-1}}$-nek van egyetlen minimális realizációja. Ezért a_{t_i} nem szabad paraméter, mivel $a_{t_i} = a^*_{t_i}$ megengedésével ellentmondana a lényeges ugrási szerkezetnek.

(ii) q_i nagyságú ugrás után az $a_{t_{i+1}}, \ldots, a_{t_{i+q_i}}$ sorozatnak pontosan q_i számú eleme ,,szabad'', azaz ezen paraméterek bármilyen értéket felvehetnek anélkül, hogy ellentmondanának az ugrási szerkezetnek.

(iii) q_i nagyságú ugrás előtt a sorozatnak pontosan $q_i - 1$ számú eleme rögzített, azaz a sorozat első $2n_{t_{i-1}}$ elemén alapuló minimális parciális realizáció (2.5) segítségével egyértelműen meghatározza a rögzítetteket.

Ez azt mutatja, hogy naiv dolog $S = (a_1, a_2 \ldots)$-ről, mint a (lényeges) paraméterek sorozatáról beszélni, ha a paramétereket abban a szokásos értelmében szemléljük, hogy minden valós értéket felvehetnek. Csak a sorozatnak az i-edik [(ii) típusú] ugrási pontot követő q_i számú eleme szerepelhet paraméterként ebben az értelemben. Az (i) típusú elemeknek teljesíteniük kell egy $\neq$ feltételt. A (iii) típusú elemek (amelyek nem jelennek meg az általános esetben) teljesen rögzítettek. Továbbá, és ez a döntő pont, az elemek különböző típusának helyét az ugrási szerkezet rögzíti. Ez az adatoknak egy lényeges tulajdonsága, amelyet az idősorral foglalkozó irodalomban fel sem vetettek [16] és [23] előtt.

S parametrizációja különösen abban az esetben fontos, amikor a rendszer n dimenziója nincsen előre rögzítve, s ez a normális eset az identifikáció során. Ebben az esetben a parciális realizáció (F, G, H)-ra a parametrizációk egymásba skatulyázott sorozatát adja. Ez abból a tényből fakad, hogy n_t t-vel monoton nő, mint ahogy ezt 10 évvel ezelőtt Rissanen [38] bemutatta. Az ehhez a kérdéshez más módszerrel közelítő próbálkozások nem jártak sikerrel. Például Deistler és Hannan művéhez [4] fordulhat az olvasó, amely részben ezzel a kérdéssel foglalkozott, és maga is eldöntheti vajon megoldották-e vagy sem az egymásba skatulyázott parametrizáció problémáját.

8. Következtetések

A rendszerelmélet egy új paradigma. Kettős értelemben is alkalmazható a közgazdaságtanban: közgazdasági modellek rendszertulajdonságainak vizsgálatára, valamint a modellezés ökonometriai receptjeinek kritikájához. Cikkünkben a második értelemben vizsgálódtunk.

A tudomány fejlődése — bizonyára a közgazdaságtanban is — elérte mára zt a szintet, amikor Newtont már nem tekinti jó példaképnek. Éppen a newtoni megközelítés az — először elkülöníteni a jelenségeket és tekintet nélkül a különböző összefüggésekre megkísérelni a legegyszerűbb megjelenésükben vizsgálni őket —, amely *alkalmazhatatlan* a közgazdaságtan kérdéseire, mivel a gazdasági jelenségek lényegileg rendszer (külső összefüggés) viszonyúak.

Az ökonometria törekvése, azaz az egymással összefüggő adatokból rejtett mennyiségi viszonyok megállapítása, a rendszerelméletnek is központi problémája. Csak a modellezésből eredő magasabbrendű problémák fokozottabb szem előtt tartásával érhet el sikert az ökonometria, illetve az ökonométer; ilyen kérdés például a lényeges paramétereké és viszonyuké a valóságos adatokhoz. Nem elég naiv értelemben gondolni a paraméterekre. Különösen ha visszagondolunk arra, hogy „a paraméter identifikálhatóságának" intuitív fogalma nem lehet értelmes tudományos koncepció. A realizálási elmélet eszközei jelentik az életképes alternatívát.

Befejezésül felidézzük Neumann János [27] 25 évvel ezelőtti egyik legutolsó nyilvános megállapítását. A közgazdaságtanban elérhető tudományos fejlődés kérdését érintő vitaválaszában tagadta azt, hogy a fejlődést megállítaná a „kísérletek lehetetlensége" (az ellenpéldája a klasszikus csillagászat, amely k ísérletek nélkül is sikeres volt) vagy „az adatok hiánya" (számos tudományos eredményt, olyant, mint Einstein fotoelektromossági törvényét, sőt az általános relativitáselméletet is kevés elérhető adatra támaszkodva fogalmazták meg). A legfontosabb dolog, ami szerinte hiányzik a közgazdaságtanban: a „kategóriák definíciója".

Amit ő ezen akkor értett, azt a mai szóhasználatban az „invariáns", „lényeges tulajdonságok", „elemekre bontás" stb. szavakkal fejezzük ki. Ha az idősorelemzésnek van lényeges mondanivalója a közgazdaságtan számára — és *ez* a remény mindannyiunké —, akkor a rendszerelméletnek képesnek kell lennie arra, hogy a valóságos adatokból kiássa Neumann hiányzó kategóriáit, és egyúttal mélyebben megértse a modellek elméletét.

Napjainkban e rendszerelméletben nagyon sok eredmény és kutatás foglalkozik ehhez hasonló problémákkal. Az ökonometriának szintén hozzá kell járulnia a megoldáshoz, különben elhervad, mint a statisztika egy jelentéktelen hajtása.

A valóságos adatokból közgazdasági (vagy egyéb) eredményekhez számos úton lehet eljutni. A tudományos út nem kötelező. Már a csillagjóslással is próbálkoztak. Az optimisták nem vitatkoznának az olyan kijelentésekkel, miszerint „a gazdaságpolitika valóságos világának felfedezése inkább megerősítette, mint lerombolta az abbéli hite(me)t, hogy a közgazdasági elmélet hasznos és fontos" (Whitman [44]). Az ártatlan hit gyakran hegyeket mozdít el. Ne tartsák vissza lélegzetüket! Jobb leülni és elkezdeni a helytelen koncepciók újbóli átgondolását.

IRODALOM

[1] Akaike, H.: „Stochastic theory of minimal realization", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974. AC-19: pp. 667—674.

[2] Antoulas, A.: „On canonical forms for linear constant systems", *International J. Control*, 1981. 33: pp. 95—122.

[3] Box, G. E. P. and Jenkins, G. M.: *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, 1976.

[4] Deistler, M. and Hannan, E. J.: „Some properties of the parameterization of ARMA systems with unknown order", *J. of Multivariate Analysis*, 1981. **11.**

[5] Faurre, P.: „Réalisations markoviennes de processus stationnaires", Research Report No. 13, 1973. IRIA, Rocquencourt, France.

[6] Faurre, P., Clerget, M. and Germain, F.: *Opérateurs Rationnels Positifs: Application a l'Hyperstabilité et aux Processus Aléatoires*, Dunod, 1979.

[7] Frisch, R.: *Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems*, Publication No. 5, University of Oslo Economic Institute. 1934.

[8] Griliches, Z.: „Errors in variables and other unobservables", *Econometrica*, 1974. **42.** pp. 971—998.

[9] Haavelmo, T.: „The probability approach in econometrics", *Econometrica*, 1944. **13,** Supplement.

[10] Haavelmo, T.: „Methods of mesuring the marginal propensity to consume". *J. American Statistical Association*, 1947. **42.** pp. 105—122.

[11] Hannan, E. J.: „The statistical theory of linear systems", in *Developments in Statistics* 1979. Vol. 2, pp. 83—121. Szerkesztette: Krishnaiah, P. R. Academic Press.

[12] Hannan, E. J.—Dunsmuir, W. T. M. and Deistler, N.: „Estimation of vector ARMAX models", *J. Multivariate Analysis*, 1980. **10.** pp. 275—295.

[13] Kalman, R. E.: „A new approach to linear filtering and prediction problems", *J. Basic Engineering* (Trans. ASME), 1960. **82** D, pp. 35—45.

[14] Kalman, R. E.: „Canonical structure of linear dynamical systems", *Proc. National Academy of Sciences* (USA) 1962. **48.** pp. 596—600.

[15] Kalman, R. E.: „Linear stochastic filtering theory — reappraisal and outlook", in

Proc. Symposium on System Theory, 1965. pp. 197—205. Szerkesztette: Fox, J. Polytechnic Institute of Brooklyn.

[16] Kalman, R. E.: „On minimal partial realizations of a linear input/output map", in *Aspects of Network and System Theory* (a collection of papers in honor of Guilemin, E. A.) 1971. pp. 385—408. Szerkesztette Kalman, R. E. és DeClaris, N., Holt, Rinehart, and Winston.

[17] Kalman, R. E.: „Kronecker invariants and feedback", in *Proc.* 1971—*NRL-MR Conference on Ordinary Differential Equations*, 1972. Szerkesztette: Weiss, L. Academic Press.

[18] Kalman, R. E.: „Algebraic-geometric description of the class of linear systems of constant dimension", in *Proc. 8th Annual Princeton Conference on Information Sciences*, 1974. pp. 189—191.

[19] Kalman, R. E.: „Realization theory of linear dynamical systems", in *Control Theory and Functional Analysis*, Vol. II., 1976. pp. 235—256. International Atomic Energy Agency, Vienna.

[20] Kalman, R. E.: „A restrospective after twenty years: from the pure to the applied", in *Applications of Kalman Filter to Hydrology, Hydraulics, and Water Resources*, 1978. pp. 31—54. Szerkesztette Chao-Lin Chiu, Dept. of Civil Engineering, University of Pittsburgh.

[21] Kalman, R. E. „A system-theoretic critique of dynamic economic models", in *Global and Large-Scale System Models*, 1979, 1—24. Szerkesztette B. Lazarevic, Springer.

[22] Kalman, R. E.: „Theory of modeling", in *Proceedings of the IBM System Science Symposium*, 1979, 53—69. Oiso, Japan. Szerkesztette: Y. Nishikawa.

[23] Kalman, R. E.: „On partical realizations, transfer functions, and canonical forms" in *Acta Polytechnica Scandinavica*, Mathematics and Computer Science Series No. 31. 1979.

[24] Kalman, R. E.: „System-theoretic critique of dynamic economic models", *International J. of Policy Analysis and Information Systems*, 1980, **4.** 3—22.

[25] Kalman, R. E.: „Dynamic econometric models: a system-theoretic critique", in *New Quantitative Techniques for Economic Analysis*. Szerkesztette: Cellina, A. and Szegő, G. P. Academic Press, 1980.

[26] Kalman, R. E.: „Identification of linear relations from noisy data", in *Developments in Statistics*, Vol. 4. Szerkesztette: Krishnaiah, P. R. Academic Press, 1982.

[27] Kalman, R. E.: *Realization Theory. I. Deterministic System*, (megjelenés előtt).

[28] Kalman, R. E., Falb, P. L. and Arbib, M. A.: *Topics in Mathematical System Theory*, McGraw Hill. 1969.

[29] Koopmans, T. C.: „Identification problems in economic model construction", *Econometrica*, 1949. **17.** 125—144.

[30] Koopmans, T. C. and Reiersol, O.: „The identification of structural characteristics", *Annals of Mathematical Statistics*, 1950. **21.** 165—181.

[31] Koopmans, T. C., Rubin, H. and Leipnik, R. B.: „Measuring the equation systems of dynamic economics", in *Statistical Inference in Dynamic Economic Models*. 1950. 54—231. Szerkesztette Koopmans, T. C. Cowles Commission Monograph No. 10. Wiley.

[32] Malinvaud, E.: *Méthodes Statistiques de l'Econométrie*. 3. kiadás, Dunod. 1978.

[33] Mehra, R. K.: „Identification and estimation of the error-in -variables model (EVM) in structural form", in *Mathematical Programming Study* (North Holland), 1976. Vol. 5. 191—210.

[34] Neumann, von J.: „The impact of recent developments in science on the economy and on economics", summary of speech before the National Planning Association, Washington, DC; in *Looking Ahead*, **4.** 11, vagy *Collected Works*, Volume VI. 1955. 100—101.

[35] Picci, G.: „Stochastic realization of gaussian processes", *Proceedings of the IEEE*, 1976. **64.** 112—122.

[36] Picci, G.: „Some connections between the theory of sufficient statistics and the identifiability problem", *SIAM J. Applied Mathematics*, 1977. **33.** 383—398.

[37] Putten van C. and Schuppen, van J. H.: „On stochastic dynamical systems", *Proceedings 4th International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems*, Delft, Netherlands, 1979.

[38] Rissanen, J.: „Recursive identification of linear systems", Siam J. *on Control*, 1971. **9.** 420—430.

[39] RISSANEN, J. and KAILATH, T.: „Partial realization of random systems", *Automatica*, 1972. **9.** 389—396.
[40] ROSENBROCK, H. H.: *State-space and Multivariable Theory*, Wiley, 1970.
[41] SONTAG, E. D. and ROUCHALEAU, Y.: „On discrete-time polynomial systems", *J. Nonlinear Analysis*, 1976. **1.** 55—64.
[42] TANNENBAUM, A.: *Invariance and System Theory: Algebraic and Geometric Aspects*, Springer Lecture Notes in Mathematics, No. 845. 1981.
[43] THEIL, H.: *Principles of Econometrics*, John Wiley, 1971.
[44] WHITMAN, M. v. N.: *Reflections of Interdependence: Issues for Economic Theory and US Policy*, University of Pittsburgh Press, 1979.
[45] WOLD, H. (szerkesztő) *The Fix-Point Approach to Interdependent Systems*, North-Holland, 1981.
[46] YAMAMOTO, Y.: „Realization theory of infinite-dimensional linear systems", 1981. (megjelenés előtt).