STAHL JÁNOS

Lineáris vektormaximum problémák efficiens pontjainak létezéséről

Gyakran előfordul, hogy egy lineáris programozási modell megfogalmazásakor a vizsgált problémában több olyan szempont is van, amelyek bármelyikének megfelelő kifejezés lehetne a modell célfüggvénye. Ilyenkor, gyakran alkalmazott eljárás, hogy az

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$(1) \qquad \left\{\begin{matrix} c_1 x \\ c_2 x \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_k x \end{matrix}\right\} \to \max$$

ún. (lineáris) vektormaximum problémát összemérhető szempontok esetén az

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$(\sum_i \lambda_i c_i)\, x \to \max$$

lineáris programozási feladatra vezetik vissza, ahol a λ_i-k az egyes szempontoknak a modell készítői által meghatározott relatív súlyai. Egy másik, mondhatni ugyancsak szokásos eljárás, hogy egy kivételével valamennyi szempontra a modellezők valamilyen akceptálható szintet kifejező alsó korlátot állapítanak meg és így a vektormaximum problémát pl. a

$$c_2 x \geq \gamma_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$c_k x \geq \gamma_k$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$c_1 x \to \max$$

lineáris programozási feladatra vezetik vissza. „Jobb esetben" mindezt a λ-k illetve a γ-k változtatása és a megfelelő lineáris programozási feladat újra, futtatása is követi.

A vektormaximum vagy a többszempontú optimalizálási feladat ilyen megkerülésével kapcsolatban legalább két megjegyzés kívánkozik. Az első az, hogy egy ilyen eljárás valójában annak a problémának elemzését kerüli meg, hogy mit értsünk egy vektormaximum problémában maximumon. Mindenesetre, végül is efficiens megoldáshoz kell eljutni. A lehetséges programok

$$X = \{x\colon Ax \leq b,\ x \geq 0\}$$

halmazának egy x^* eleme efficiens (pont, program vagy megoldás), ha nincs olyan $x^{**} \in X$, amely x^*-t dominálja, azaz

$$\begin{array}{c} c_1 x^* \leq c_1 x^{**} \\ c_2 x^* \leq c_2 x^{**} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_k x^* \leq c_k x^{**} \end{array}$$

oly módon, hogy legalább egy helyen szigorú egyenlőtlenség teljesül. Azaz nincs olyan x^{**} lehetséges program, mely minden szempontból legalább olyan jó, mint x^* és legalább egy szempontból határozottan jobb.

A lineáris programozásra való „visszavezetéssel" kapcsolatos másik megjegyzés az, hogy ezek a lineáris programok általában X efficiens pontját adják eredményül. Azaz, ha nem is tisztázott előre az efficiens pontok közötti választás, az adódó lineáris program legalább efficiens pontot eredményez. (Ezért is neveztük „jobb esetnek" azt, ha megtörténik a λ-k, illetve a γ-k változtatásával adódó esetleg különböző efficiens programok összehasonlítása.)

A dolgozatban éppen azt pontosítjuk, hogy az ilyen visszavezetések mikor eredményeznek efficiens megoldást.

Elsőként egy szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy X-ben legyen efficiens program. Ezzel kapcsolatban felhasználjuk, hogy ha X nem üres és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ pozitív számok, akkor az

$$\begin{array}{c} Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ (\sum_i \lambda_i c_i)\, x \to \max \end{array}$$

lineáris programozási feladat megoldása efficiens. Az állítás megfordítása, amit mi egyébként nem fogunk használni, már nem triviális, nevezetesen, hogy egy efficiens x^*-hoz találhatók szigorúan pozitív λ-k oly módon, hogy x^* optimális megoldása az előbbi lineáris programozási feladatnak.

Lemma. Legyen $X \neq \emptyset$. X-ben akkor és csak akkor van efficiens pont, ha nincs olyan X-beli irány, azaz olyan x, amelyre

$$\begin{array}{c} Ax \leq 0 \\ x \geq 0 \end{array}$$

fennáll, hogy teljesülnek a

$$c_1 x \geq 0$$
$$c_2 x \geq 0$$
$$\dots\dots$$
$$c_k x \geq 0 \tag{2}$$

egyenlőtlenségek oly módon, hogy közülük legalább egy szigorú egyenlőtlenség.

Bizonyítás: Az állítás egyik fele nyilvánvaló. Ha ugyanis lenne fenti tulajdonságú $\tilde{x}$, akkor tetszőleges $\bar{x} \in X$-t $\bar{x} + \tilde{x} \in X$ dominálna.

Másrészt, ha nem létezik fenti tulajdonságú x, akkor az

$$Ax \leq 0$$
$$c_2 x \geq 0$$
$$\dots\dots$$
$$c_k x \geq 0$$
$$x \geq 0$$

egyenlőtlenségeknek következménye a

$$c_1 x \leq 0$$

egyenlőtlenség. Ekkor a Farkas-tétel alapján létezik olyan $p^{(1)} \geq 0$, $\lambda_2^{(1)}, \dots$ $\dots, \lambda_k^{(1)} \geq 0$ és $q^{(1)} \geq 0$, hogy

$$c_1 = p^{(1)} A - \lambda_1^{(1)} c_1 - \lambda_2^{(1)} c_2 - \dots - \lambda_k^{(1)} c_k - q^{(1)}$$

$(\lambda_1^{(1)} = 0)$.

Hasonlóan, $i = 2, \dots, k$-ra is létezik olyan $p^{(i)} \geq 0$, $\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, \lambda_k^{(i)} \geq 0$ és $q^{(i)} \geq 0$, hogy

$$c_i = p^{(i)} A - \lambda_1^{(i)} c_1 - \lambda_1^{(i)} c_2 - \dots \lambda_k^{(i)} c_k - q^{(i)}$$

teljesül.

Az egyenlőségeket összegezve adódik egy

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_k c_k = pA - q$$

egyenlőség, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k > 0$, $p \geq 0$ és $q \geq 0$.

Tekintsük most az

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$
$$(\sum_i \lambda_i c_i)\, x \to \max$$

lineáris programot. Ez nem lehet korlátos, mivel ekkor az

$$Ax \leq 0$$
$$x \geq 0$$
$$(\sum_i \lambda_i c_i)\, x > 0$$

egyenlőtlenségekből egyrészt a $pAx \leq 0$, másrészt pedig a $pAx = (\sum_i \lambda_i c_i)x + qx > 0$ egyenlőtlenség adódna, ami ellentmondás. Tehát a felírt feladatnak van optimális megoldása, ami a λ-k pozitivitása miatt efficiens.

A lemmából következik, hogy amennyiben pl. valamennyi célfüggvény, korlátos X-en, akkor van efficiens megoldás, de ugyanakkor az is látszik hogy efficiens megoldás úgy is létezhet, ha egyetlen célfüggvény sem korlátos felülről.

Legyen

$$X = \{x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)\colon 0 \leq \xi_1 \leq 1,\ \xi_2, \xi_3 \geq 0\}$$

és

$$c_1 x = \xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3$$

$$c_2 x = \xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3.$$

Sem c_1x, sem pedig c_2x nem korlátos X-en, ugyanakkor a $\{\xi_1 = 1,\ \xi_2 \geq 0,\ \xi_3 = 0\}$ és a $\{\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0,\ \xi_3 \geq 0\}$ félegyenesek X-nek az efficiens pontjaiból állnak.

Látszólag más úton is igazolható a lemma állítása. Azért nevezzük csak látszólag más útnak, mert a bizonyításban használt apparátus lényegében ugyanaz, mint az előzőnél. Mivel a bizonyításban vizsgált lineáris programozási feladat a későbbiekben is szerepel, ezt az utat is bejárjuk. Ugyanakkor a dolgozat korábbi változata lektorának egy megjegyzése alapján Krekó B. „Optimumszámítás" c. könyvének 398. oldalán találtam egy olyan állítást, amely a lemmánkéval nagyjából ekvivalens. Az ottani állítás bizonyítása is meglehetősen közel van ehhez a második bizonyításhoz. Ezúton szeretném megköszönni a lektor további javaslatait és megjegyzéseit is.

Legyen $\bar{x} \in X$ tetszőleges és tekintsük az

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ c_1 x - \xi_1 &= c_1 \bar{x} \\ c_2 x - \xi_2 &= c_2 \bar{x} \\ &\cdots\cdots \\ c_k x - \xi_k &= c_k \bar{x} \\ x \geq 0,\ \xi_1, \xi_2 &\ldots \xi_k \geq 0 \\ (\sum_i \xi_i) &\to \max \end{aligned} \tag{3}$$

lineáris programozási feladatot.

Ez a feladat akkor és csak akkor nem korlátos, ha van olyan $\tilde{x} \geq 0$, $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \ldots, \tilde{\xi}_k \geq 0$, amelyekre

$$\begin{aligned} A\tilde{x} &\leq 0 \\ c_1 \tilde{x} - \tilde{\xi}_1 &= 0 \\ c_2 \tilde{x} - \tilde{\xi}_2 &= 0 \\ &\cdots\cdots \\ c_k \tilde{x} - \tilde{\xi}_k &= 0 \end{aligned}$$

és

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k > 0,$$

azaz $\bar{x}$ kielégíti a (2) feltételeket oly módon, hogy az utolsó k számú egyenlőtlenség között van szigorú egyenlőtlenség is. Másrészt a (3) feladat akkor és csak akkor nem korlátos, ha (3)-nak nincs optimális megoldása, azaz ha (3)-nak van optimális megoldása, akkor (2)-nek nincs olyan megoldása, amelyre $\sum_i c_i x > 0$, és fordítva.

A (3) egy optimális megoldásának x-része viszont nyilván efficiens program, hiszen ha X egy eleme dominál egy másikat, akkor ahhoz nagyobb (3)-beli célfüggvény érték tartozik.

A (3) program nemcsak azért érdekes, mert megoldásával eldönthető, hogy van-e X-nek efficiens eleme (és ha igen, akkor (3) megoldása efficiens), hanem azért is, mert segítségével az is eldönthető, hogy egy $\bar{x} \in X$ efficiens-e vagy sem. $\bar{x}$ nyilván akkor és csak akkor efficiens, ha a (3) feladat optimumértéke zérus.

A továbbiakban a lemmát felhasználva belátjuk, hogy a többszempontú optimalizálással kapcsolatban vizsgált bizonyos feladatoknak általában van efficiens megoldásuk.

1. *tétel.* Legyen $i = 1, 2 \ldots k$-ra $\lambda_i \geq 0$. Tegyük fel, hogy az

$$\begin{aligned} & Ax \leq b \\ (4) \qquad & x \geq 0 \\ & \Big(\sum_i \lambda_i c_i\Big) x \to \max \end{aligned}$$

lineáris programozási feladatnak van optimális megoldása és X-nek van efficiens pontja. Akkor a most felírt feladat optimális megoldásai között van efficiens pont is.

[Mivel az nyilvánvaló, hogy valamennyi $\lambda_i > 0$ esetén a feladat optimális megoldása efficiens, ebben az esetben nem szükséges az efficiens megoldás létezésének külön feltételezése, illetve nincs is mit bizonyítanunk. Ugyanakkor, az efficiens pont létezésének feltételezése nélkül a tétel állítása általában nem igaz.

Legyen pl. X ugyanaz, mint az előző példában, de most

$$c_1 x = \xi_1 - \xi_2,$$
$$c_2 x = \xi_1 - \xi_2 + \xi_3.$$

$c_1 x$ korlátos X-en, ugyanakkor X-nek nyilván nincs efficiens pontja.]

Bizonyítás: Legyen λ^* a most felírt feladat optimum értéke. Az

$$Ax \leq b$$
$$\Big(\sum_i \lambda_i c_i\Big) x = \lambda^*$$
$$x \geq 0$$

feltételekkel meghatározott nem üres $X(\lambda^*)$ halmaznak a lemma alapján van a $c_1, c_2, \ldots, c_k$ szempontok szerint efficiens pontja.

Ugyanis az

$$
\begin{gathered}
x \geq 0 \\
Ax \leq 0 \\
(\sum_i \lambda_i c_i)\, x = 0 \\
c_1 x \geq 0 \\
c_2 x \geq 0 \\
\cdots \\
c_k x \geq 0
\end{gathered}
$$

feltételrendszernek nincs olyan megoldása, hogy az utolsó k egyenlőtlenség közül legalább egy szigorú egyenlőtlenségként teljesülne, hiszen feltételeink szerint az

$$
\begin{gathered}
x \geq 0 \\
Ax \leq 0 \\
c_1 x \geq 0 \\
c_2 x \geq 0 \\
\cdots\cdots \\
c_k x \geq 0
\end{gathered}
$$

feltételrendszernek sincs ilyen megoldása. Ugyanakkor $X(\lambda^*)$ egy efficiens x^* pontja efficiens pontja X-nek is. Ugyanis, ha létezne olyan $x^{**} \in X$, amely x^*-ot dominálná, erre a $(\sum_i \lambda_i c_i)\, x^* \leq (\sum_i \lambda_i c_i)\, x^{**}$ egyenlőtlenségből $(\sum_i \lambda_i c_i)\, x^{**} = \lambda^*$, azaz $x^{**} \in X(\lambda^*)$ adódna, ami ellentmondás.

Megjegyezzük, hogy a bizonyításban nem hivatkozhattunk volna $X(\lambda^*)$-nak a zérus λ_i-knek megfelelő c_i-k szerinti efficiens pontjaira.

Legyen X most is ugyanaz, mint a korábbi példákban, $c_1 x$ és $c_2 x$ ugyanaz, mint az első példában, legyen továbbá

$$c_3 x = -3\xi_2 + 2\xi_3.$$

Akár a lemma alapján is látható, hogy X-nek van efficiens pontja, továbbá $(c_1 + c_3)\, x = \xi_1 - 2\xi_2$ korlátos X-en, maximális értéke 1. Ugyanakkor a $0 \leq \xi_1 \leq 1$, $\xi_2, \xi_3 \geq 0$ és $\xi_1 - 2\xi_2 = 1$ feltételekkel meghatározott X (1) halmaznak nyilván nincs c_2 szerint efficiens (azaz az adott esetben maximális) pontja.

Az előzőek alapján X-nek egy olyan efficiens pontja, mely a (3) feladatnak optimális megoldása, az

$$
\begin{gathered}
Ax \leq b \\
(\sum \lambda_i c_i)\, x = \lambda^*
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
c_1 x - \xi_1 &= c_1 \overline{x} \\
c_2 x - \xi_2 &= c_2 \overline{x} \\
&\dots\dots\dots \\
c_k x - \xi_k &= c_k \overline{x} \\
x \geq 0,\ \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k &\geq 0 \\
(\sum_i \xi_i) &\to \max
\end{aligned}
$$

lineáris programozási feladat megoldásával határozható meg, ahol $\overline{x}$ a (4)-nek egy optimális megoldása. (A fenti feladatból elhagyhatók mindazon ξ_i változók, melyeknek megfelelő $\lambda_i > 0$.)

2. *tétel.* Tegyük fel, hogy az

$$
\begin{aligned}
Ax &\leq b \\
c_2 x &\geq \gamma_2 \\
&\dots\dots \\
c_k x &\geq \gamma_k \\
x &\geq 0 \\
c_1 x &\to \max
\end{aligned}
\tag{5}
$$

feladatnak van lehetséges megoldása és X-nek van efficiens pontja. Akkor a most felírt feladat optimális megoldásai között van efficiens pont is.

Bizonyítás: Az előző tétel bizonyításakor követett úton haladunk. Minthogy X-nek van efficiens pontja, nincs olyan x, melyre

$$
\begin{aligned}
x &\geq 0 \\
Ax &\leq 0 \\
c_2 x &\geq 0 \\
&\dots\dots \\
c_k x &\geq 0 \\
c_1 x &> 0,
\end{aligned}
$$

így az (5) feladat nem lehet nem korlátos.

Legyen γ_1^* a feladat optimumértéke. Az

$$
\begin{aligned}
Ax &\leq b \\
c_2 x &\geq \gamma_2 \\
&\dots\dots \\
c_k x &\geq \gamma_k \\
c_1 x &= \gamma_1^* \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

feltételekkel meghatározott $X(\gamma_1^*)$ halmaz tehát nem üres. A lemma alapján van a $c_1, c_2 \ldots c_k$ szempontok szerint efficiens pontja. Ugyanis az

$$\begin{gathered} x \geq 0 \\ Ax \leq 0 \\ c_2 x \geq 0 \\ \cdots\cdots \\ c_k x \geq 0 \\ c_1 x = 0 \\ c_1 x \geq 0 \\ c_2 x \geq 0 \\ \cdots\cdots \\ c_k x \geq 0 \end{gathered}$$

feltételrendszernek nincs olyan megoldása, hogy az utolsó k-egyenlőtlenség közül legalább egyik szigorú egyenlőtlenségként teljesül, hiszen feltételeink szerint már az

$$\begin{gathered} x \geq 0 \\ Ax \leq 0 \\ c_1 x \geq 0 \\ c_2 x \geq 0 \\ \cdots\cdots \\ c_k x \geq 0 \end{gathered}$$

feltételrendszernek sincs ilyen megoldása. Ugyanakkor $X(\gamma_1^*)$ egy x^* efficiens pontja efficiens pontja X-nek is. Ugyanis, ha létezne olyan $x^{**} \in X$, mely x^*-ot dominálná, akkor $c_i x^* \leq c_i x^{**}$ miatt $x^{**} \in X(\gamma^*)$, ami ellentmondás.

Az előzőek alapján az (5) feladat egy efficiens megoldása az

$$\begin{gathered} Ax \leq b \\ c_1 x = \gamma_1^* \\ c_2 x - \xi_2 = \gamma_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_k x - \xi_k = \gamma_k \\ x \geq 0,\ \xi_2, \ldots, \xi_k \geq 0 \\ (\sum_{i \geq 2} \xi_i) \to \max \end{gathered}$$

lineáris programozási feladat megoldásával határozható meg.

Következőnek az ún. cél programozásban (goal-programming) vizsgált

$$
\begin{aligned}
&Ax \leq b \\
&c_1x + \zeta_1 - \xi_1 = \gamma_1 \\
&c_2x + \zeta_2 - \xi_2 = \gamma_2 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&c_kx + \zeta_k - \xi_k = \gamma_k \\
&x \geq 0, \zeta_1, \dots, \zeta_k, \xi_1, \dots, \xi_k \\
&(-\sum_i \zeta_i) \to \max
\end{aligned}
\tag{6}
$$

alakú lineáris programozási feladatra vonatkozóan bizonyítunk be egy, az eddigiekhez hasonló tételt.

Valójában a célprogramozási feladatokban a ζ_i-k és a ξ_i-k — egy esetleg súlyozott — összegét szokták minimalizálni. A maximalizáló többszempontú optimalizálási feladatnak azonban az felel meg, hogy a kitűzött γ_i célok túlteljesítését kifejező ξ_i-ket ne büntessük.

3. *tétel.* Ha az X-ben van efficiens program, akkor a (6) lineáris programozási feladat optimális megoldásai között is van ilyen.

Bizonyítás: Legyen (6) optimumértéke $(-\zeta^*)$ és tekintsük az

$$
\begin{aligned}
&Ax \leq b \\
&c_1x + \zeta_1 - \xi_1 = \gamma_1 \\
&c_2x + \zeta_2 - \xi_2 = \gamma_2 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&c_kx + \zeta_k - \xi_k = \gamma_k \\
&\sum_i \zeta_i = \zeta^* \\
&x, \zeta_1, \dots, \zeta_k, \xi_1, \dots, \xi_k \geq 0 \\
&(\sum_i \xi_i) \to \max
\end{aligned}
\tag{7}
$$

lineáris programozási feladatot. Ez nem lehet nem korlátos, mivel akkor létezne olyan $\tilde{x}, \zeta_1, \dots, \zeta_k, \xi_1, \dots, \xi_k \geq 0$, melyekre

$$
\begin{aligned}
&A\tilde{x} \leq 0 \\
&c_1\tilde{x} + \tilde{\zeta}_1 - \tilde{\xi}_1 = 0 \\
&c_2\tilde{x} + \tilde{\zeta}_2 - \tilde{\xi}_2 = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&c_k\tilde{x} + \tilde{\zeta}_k - \tilde{\xi}_k = 0 \\
&\sum_i \tilde{\zeta}_i = 0 \\
&\sum_i \tilde{\xi}_i > 0,
\end{aligned}
$$

azaz

$$
\begin{aligned}
A\tilde{x} &\leq 0 \\
c_1\tilde{x}\ (= \tilde{\xi}_1) &\geq 0 \\
c_2 x\ (= \tilde{\xi}_2) &\geq 0 \\
\ldots\ldots & \\
c_k\tilde{x}\ (= \tilde{\xi}_k) &\geq 0
\end{aligned}
$$

teljesül oly módon, hogy az utolsó k egyenlőtlenség közül legalább egy szigorú egyenlőtlenségként áll fenn. Ez viszont a lemma szerint ellentmond annak, hogy X-ben efficiens pont.

(7) egy optimális megoldásának x^*-része viszont efficiens pontja X-nek. Tegyük fel ugyanis, hogy van olyan $x^{**} \in X$, mely dominálja x^*-ot. $c_i x^{**} > \gamma_i$ esetén legyen $\xi_i^{**} = c_i x^{**} - \gamma_i$, $\zeta_i^{**} = 0$, $c_i x^{**} < \gamma_i$ esetén pedig legyen $\xi_i^{**} = 0$, $\zeta_i^* = \gamma_i - c_i x^{**}$. A $c_i x^* \leq c_i x^{**}$ egyenlőségből adódik, hogy $\zeta_i^{**} \leq \zeta_i^*$ és $\xi_i^{**} \geq \xi_i^*$. Ezekből először minden i-re a $\zeta_i^{**} = \zeta_i^*$ és a $\sum\limits_i \zeta_i^{**} = \zeta^*$ majd a $\xi_i^{**} = \xi_i^*$ egyenlőségek következnek, azaz $c_i x^* = c_i x^{**}$, ami ellentmondás.

4. *tétel.* Legyen $i = 1, 2 \ldots k$-ra $\lambda_i \geq 0$ és $\sum\limits_i \lambda_i = 1$. Tegyük fel, hogy az

$$
(8)\qquad
\begin{array}{l}
Ax_1 + Ax_2 + \ldots + Ax_k \qquad\quad \leq b \\
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad - \lambda_1 x = 0 \\
\qquad\quad x_2 \qquad\qquad\quad - \lambda_2 x = 0 \\
\qquad\qquad\qquad \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x_k - \lambda_k x = 0 \\
\qquad\quad x_1, x_2, \ldots, x_k, x \geq 0 \\
\qquad\quad (\sum\limits_i c_i x_i) \to \max
\end{array}
$$

lineáris programozási feladatnak van optimális megoldása és X-nek van efficiens pontja. Akkor (8)-nak az optimális megoldásai között van olyan, melynek x-része efficiens pontja X-nek.

Bizonyítás: A (8) feladat egy $(x_1^*, x_2^*, \ldots x_k^*, x^*)$ megoldásában szereplő x^* lehetséges megoldása (4)-nek. Másrészt, (4) egy x^* megoldásából kiindulva legyen $x_i^* = \lambda_i x^*$, $(i = 1, 2 \ldots k)$. Akkor az így kapott $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*, x^*)$ lehetséges megoldása (8)-nak és a hozzátartozó célfüggvényértékre $\sum\limits_i c_i x_i^* = (\sum\limits_i \lambda_i c_i)\, x^*$, amiből az állítás már következik.

Valójában (8) duálisa, a

$$\begin{gathered} pA + y_1 \geq c_1 \\ pA + y_2 \geq c_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ pA + y_k \geq c_k \\ -\lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2 - \ldots - \lambda_k y_k \geq 0 \\ p \geq 0 \\ pb \to \min \end{gathered}$$

lineáris programozási feladat az érdekes. Az egyetlen cx célfüggvény esetével szemben most nem várható el, hogy legyen olyan $p \geq 0$, melyre $pA \geq c_i$, minden i-re. Ellenben ,,jónak'' tekinthetők az erőforrások olyan értékelései, melyekre valamilyen y_i járulékkal kiegészített c_i-re az egyenlőtlenség már teljesül minden i-re, és ahol a járulékoknak a szempontok fontosságának megfelelő λ_i-kel súlyozott összege nem negatív. Ezzel a feladattal még nem találkoztunk a többszempontú optimalizálással kapcsolatban. A feladat ilyen irányú közgazdasági vonatkozásaira később még vissza kívánunk térni.

(Beérkezett: 1981. július 10-én.)

ON THE EXISTENCE OF EFFICIENT POINTS IN THE LINEAR VECTOR MAXIMUM PROBLEM

The paper gives a necessary and sufficient condition on the existence of an efficient point in the linear vector maximum problem. Applying this result we prove that among the optimal solutions of the linear programs (4), (5), (6) and (8) there is an efficient point of the corresponding linear vector maximum problem (1).

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЭФФЕКТИВНЫХ ТОЧЕК ПРОБЛЕМ ЛИНЕЙНОГО ВЕКТОРНОГО МАКСИМУМА

В статье рассматривается несколько задач линейного программирования при анализе задачи линейного векторного максимума (1) с точки зрения того, при каких условиях решение их будет эффективным решением (1).

Анализировавшиеся задачи — линейные программы (4), (5), (6) и (8). Доказательство соответствующих теорем основано само по себе на интересной лемме, которая является необходимым и достаточным условием существования эффективной точки.