FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

NAGY CSABA

Bevezetés a fuzzy halmazok elméletébe

Bevezetés

A fuzzy halmazok elmélete alig több mint tíz éves múltra tekint vissza, de gyors fejlődése, elterjedésének széles köre, hatásának mélysége egyedülálló. Mit jelent ez a kifejezés — fuzzy halmaz —, le tudnánk-e fordítani? Nevezhetnénk talán homályos vagy elmosódott vagy bizonytalan halmazoknak, de ezek a kísérletek nem csak eleve kudarcra ítéltek, de feleslegesek is. Egy új fogalom született, és egyre inkább követeli a helyét a legkülönbözőbb tudományokban.*

A tudományos vizsgálatok során minél teljesebb, szélesebb körű feladatokkal foglalkozunk, annál több bizonytalansági tényezővel találjuk magunkat szemben. Amikor ezeket a feladatokat exakt módszerekkel tárgyaljuk, az ilyen tényezőknek leírása nagy nehézségeket okoz, sok esetben nem is valósítható meg.

A valószínűségszámítás igen jó eszköz a bizonytalanságok egy részének leírására. Jól kell azonban látni a valószínűség, és a fuzzy tulajdonság közötti különbséget. A valószínűség jól definiált, konkrétan meghatározott események előfordulásának valószínűségére ad mértéket, a fuzzy tulajdonság meg azt fejezi ki, hogy maguk az események, elemek, fogalmak bizonytalanok, rosszul definiáltak, nem tudjuk pontosan hol kezdődnek, hol végződnek, milyen mértékben tartoznak bele bizonyos összetevők.

A fuzzy halmazok elméletének alapja, hogy sok esetben nem lehet, vagy nincs értelme eldönteni, hogy egy elem egy halmazhoz tartozik-e, vagy nem. Lehet, hogy bizonyos mértékig hozzá tartozik, bizonyos mértékig nem. Ezt a tulajdonságot a fuzzy halmazok elméletében az ún. tartalmazási függvény segítségével fejezhetjük ki. A tartalmazási függvény az alaphalmazból a [0,1] intervallumba ható függvény, és azt fejezi ki, hogy egy elem milyen mértékben tartozik az alaphalmaz egy fuzzy halmazához.

A cikk első részében a fuzzy halmazok elméletének alapfogalmait ismertetjük. A fuzzy halmaz definiálása után áttekintjük, hogy milyen műveleteket lehet értelmezni a fuzzy halmazok körében, és ezeknek a műveleteknek a legfontosabb tulajdonságait. Megvizsgáljuk a közönséges halmazoknak a kiterjesztését fuzzy halmazokra, megismerkedünk a fuzzy reláció, egyszerű fuzzy reláció, és a konvex fuzzy halmaz fogalmával.

A következő fejezetben a fuzzy mértékekkel és a fuzzy integrálokkal foglalkozunk, megvizsgáljuk, hogy hogyan lehet fuzzy mértékeket konstruálni,

* A szerkesztőség véleménye szerint minél fontosabb egy új fogalom, minél valószínűbb széles körű alkalmazása, annál indokoltabb, hogy magyar nevet találjunk rá. Mi a „kócos halmaz" kifejezést javasoltuk; a szerző nem engedett a „fuzzy"-ból. *(Szerk.)*

és végül megnézzük, hogy a fuzzy mértékek és fuzzy integrálok elméletét hogyan lehet alkalmazni szubjektív értékelési folyamatokban.

Az utolsó fejezetben először a fuzzy programozási feladatot fogalmazzuk meg, megadjuk a fuzzy célfüggvény, fuzzy korlátozás, fuzzy döntés fogalmát, és végül a lineáris programozási feladat fuzzysításának lehetőségét| mutatjuk be.

1. Hálóelméleti és mértékelméleti alapfogalmak

Ebben a részben azokat a háló- és mértékelméleti fogalmakat soroljuk fel, amelyekre a fuzzy halmazokkal kapcsolatban szükségünk lesz. A következő fejezet, ami a fuzzy halmazok elméletének alapjait tárgyalja, az alábbi hálóelméleti definíciókat használja fel:

1.1. Egy X halmazt részben rendezett halmaznak nevezünk, ha bizonyos elempárjain értelmezve van egy $\leq$ reláció, amelyekre a következők teljesülnek:

1. reflexív — azaz $x \leq x \ \forall x \in X$,

2. antiszimmetrikus azaz $x \leq y \Rightarrow y \nleq x$, ha $x \neq y$,

3. tranzitív — azaz $x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

1.2. Legyen X részben rendezett halmaz, akkor x és y X-beli elemeknek v a legnagyobb alsó korlátja, ha $v \leq x$ és $v \leq y$ valamint nem létezik olyan $\tilde{v}$ amire $\tilde{v} \geq v$, $\tilde{v} \leq x$, $\tilde{v} \leq y$ fennállnak. Hasonló módon értelmezve, u az x és y elemeknek a legkisebb felső korlátja, ha $u \geq x$ és $u \geq y$ és nem létezik olyan $\tilde{u}$ elem, amire igaz lenne, hogy $\tilde{u} \leq u$ és $\tilde{u} \geq x$, $\tilde{u} \geq y$ és ezt jelöljük a következőképpen:

$$v = x \vee y, \quad u = x \wedge y.$$

Egy részben rendezett halmazt akkor nevezhetünk hálónak, ha minden elemének létezik legnagyobb alsó és legkisebb felső korlátja.

1.3. Ha egy X hálóra az $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,

vagy az $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge y)$

disztributivitási tulajdonságok igazak, minden $x, y, z \in X$ esetén, akkor az X hálót disztributív hálónak nevezzük.

A következő definíciókat a fuzzy mértékekről és a fuzzy integrálokról szóló részben használjuk fel.

1.4. Legyen X tetszőleges halmaz, jelöljük $\mathcal{P}(X)$-szel az X részhalmazain halmazát. Nevezzük az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazt az X halmaz egy osztályának, tehát $\mathcal{A}$ elemei X bizonyos részhalmazai.

Egy X halmaz $\mathcal{A}$ osztályát halmazalgebrának nevezzük, ha

1. $A,\ B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$,

2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$,

egy halmazalgebrát σ-algebrának nevezünk, ha bármely $\{A_k \in \mathcal{A},\ k = 1,2 \ldots\}$ halmazsorozatra $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Az $\mathcal{A}$-ba tartozó halmazokat $\mathcal{A}$-mérhetőknek nevezzük.

Állítás

Egy X halmaz bármely $\mathcal{A}$ osztályára létezik az őt tartalmazó legszűkebb σ-algebra. (L. *Gihman–Szkorohod* [13].)

1.5. Egy metrikus tér nyílt halmazainak osztálya által generált σ-alegbra, az őt tartalmazó legszűkebb σ-algebra; elemeit Borel halmazoknak nevezzük. (Az n-dimenziós euklideszi térben pl. a félig nyílt paralelepipedon által kifeszített, vagy generált σ-algebra adja meg a Borel halmazokat.)

1.6. Egy $\nu: \mathcal{A} \to X$ halmazfüggvényt akkor nevezünk σ-additívnak, ha $\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$, ha $\forall\, i \neq j$-re, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

1.7. Valamely $\mathcal{A}$ σ-algebrán megadott, nem negatív, σ-additív, halmazfüggvényt akkor nevezünk mértéknek, ha $\nu(\emptyset) = 0$.

1.8. Legyen $\mathcal{A}$ az X tér σ-algebrája. Egy $\mathcal{A}$-mérhető halmazon értelmezett, valós és a $\pm\infty$ értékeket felvevő $f(x)$ függvényt $\mathcal{A}$-mérhetőnek nevezzük, ha az $\{x \mid f(x) \leq r\}$ halmaz minden való r értékre $\mathcal{A}$-mérhető.

2. A fuzzy halmazok elméletének alapjai

Fuzzy halmazok. A fuzzy halmazok elméletének alapja a halmazelmélet karakterisztikus függvény fogalmának kiterjesztése. Legyen X egy tetszőleges alaphalmaz, és $A \subset X$ X egy részhalmaza, és jelöljük μ_A-val az A részhalmaz karakterisztikus függvényét:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin A \\ 1, & \text{ha } x \in A. \end{cases}$$

A μ_A karakterisztikus függvény az X alaphalmazról a $\{0,1\}$ kételemű halmazba hat, jelöljük ezt így: $\mu_A: X \to \{0,1\}$. Tehát egy $x \in X$ elemről pontosan tudjuk, hogy egy A halmaznak eleme, vagy nem eleme. Ha azonban valamilyen sok bizonytalanságot hordozó fogalomrendszert akarunk halmazelméleti módon közelíteni, ezt ilyen egyértelműen már általában nem tudjuk megmondani. Csak ilyeneket állíthatunk, hogy az $x \in X$ elem „egy kicsit eleme", vagy „jobban eleme", vagy „már majdnem eleme" az A halmaznak. Az itt leírtak megfogalmazásához a fuzzy halmazok elméletében a karakterisztikus függvény fogalmának általánosításával juthatunk el. Ugyanis, ha a μ_A értékkészletét a $\{0,1\}$ kételemű halmazról kibővítjük a $[0,1]$ intervallumra $\mu_A: X \to [0,1]$ akkor $\tilde{\mu}_A$-t X egy fuzzy részhalmazának tekinthetjük, pontosabban: X-nek egy fuzzy részhalmazát reprezentálja.

Definíció. Legyen X tetszőleges alaphalmaz, legyen $\mu: X \to [0,1]$, akkor az $\{x, \mu(x)\}$ párok halmazát az X halmaz fuzzy részhalmazának nevezzük (röviden: fuzzy halmaz), a μ függvényt pedig tartalmazási függvénynek nevezzük.

Jelöljük $\mathcal{F}(X)$-szel az X halmaz tartalmazási függvényeinek halmazát, azaz $\mathcal{F}(X) = \{\mu \mid \mu: X \to [0,1]$, ekkor általában elegendő magát az $\mathcal{F}(X)$ halmazt X fuzzy halmazainak tekinteni.

Példák:

1. Legyen $X = \{1,2,\ldots,100\}$ egész számok halmaza, ahol az $x \in X$ elem egy ember életkorát jelenti, ekkor a „fiatal" fogalmat a következő fuzzy

halmazzal írhatjuk le:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 30 < x < 45, \\ \dfrac{45 - x}{15}, & \text{ha} \quad 0 \leq x \leq 30. \\ 0, & \text{ha} \quad 45 \leq x \leq 100. \end{cases}$$

A „fiatal" fogalomnak a felső határa bizonytalan, elmosódott. Nincs értelme annak, hogy azt mondjuk, hogy egy 34 éves ember fiatal, egy 35 éves már nem. A fuzzy halmazok segítségével itt definiált fiatal fogalmat szavakkal körülbelül így lehetne körülírni; egy 33 éves ember még majdnem teljesen fiatalnak számít, $\mu(x) = 0{,}8$, de egy 42 éves már nem éppen fiatal, $\mu(x) = 0{,}2$.

Természetesen nagyon sokféleképpen meg lehetne adni a fiatalság fogalmának fuzzy értelmezését, de ez éppen e fogalom bizonytalanságából, rosszul definiáltságából, szubjektivitásából fakad. A fuzzy halmazok segítségével éppen ezeket a tulajdonságokat szeretnénk leírni azzal, hogy legalább a fogalom jellegét megpróbáljuk megfogalmazni.

2. Most nézzük meg, hogy az „életszínvonal" kifejezésben rejlő bizonytalanságokat hogyan tudnánk fuzzysítani. Első lépésként próbáljuk meg az életszínvonal fogalmat olyan összetevőkre bontani, amelyek jobban definiáltak, vagy csak egyszerűen szűkebb értelműek. Ilyen összetevők lehetnek például a következők:

— 1 főre jutó nemzeti jövedelem,
— átlagos reáljövedelem,
— lakásviszonyok,
— infrastruktúra,
— közlekedés,
— környezet,
— társadalmi légkör,
— szellemi színvonal,
— szabadidő mennyisége,
— a szabadidő kihasználásának lehetősége, színvonala,
— közbiztonság,
— stb.

Most tehát az alaphalmaz egy diszkrét halmaz, amelynek elemei az életszínvonal összetevői, egy tartalmazási függvényt pedig akkor kapunk, ha minden elemhez hozzárendelünk egy $x \in [0,1]$ számot. Ez a felosztás közelítőleg sem teljes, és sok átfedést tartalmaz, de most nem is az a cél, hogy jól identifikáljuk az életszínvonal fogalmat, hanem hogy az életszínvonal, és a hozzá „hasonló" sok bizonytalanságot hordozó, rosszul definiált fogalmak fuzzysításának lehetőségeit és problémáit megvilágítsuk.

Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll az életszínvonal egy „közelítőleg" jó felosztása. Ezen azt értem, hogy tartalmazzon „majdnem minden" szóbajöhető elemet, amelyek beletartozhatnak — akár szubjektíven — az életszínvonal fogalmába; az összetevők nem tartalmaznak átfedéseket, jól definiáltak, illetve jól körülhatároltak legyenek. A feladat bonyolultságára jellemző, hogy maguk az idézőjelbe tett kifejezések is bizonytalanok. Ha ezt a listát, az életszínvonal összetevőiről odaadnánk valakinek, és megkérnénk arra, hogy mondja meg minden összetevőről, hogy milyen mértékben tartozik bele az ő életszínvonal fogalmába, tehát minden összetevőhöz rendeljen egy 0 és 1 közé eső számot, akkor az életszínvonal egy szubjektív fuzzy reprezentációját kapnánk.

Ezután, ha különböző célú általános felméréseket végeznénk, ezek elemzésével, statisztikai vizsgálatával már globálisabb életszínvonal képeket kaphatnánk. Megvizsgálhatnánk, hogy például a különböző társadalmi rétegeknek milyen az életszínvonalról alkotott képük, és ezek miben térnek el egymástól. Nagyon fontos információt kaphatnánk a lakóhely szerinti csoportosításból, hogy például a fővárosban, nagyvárosokban, kisvárosokban, falun, tanyán élő embereknek mennyiben különbözik az életszínvonalról alkotott képük, elvárásaik.

Műveletek a fuzzy halmazok körében. A fuzzy halmazok körében a következő műveleteket lehet értelmezni.

Definíció. Legyen X tetszőleges alaphalmaz $\mu_1 \colon X \to [0,]$, $\mu_2 \colon X \to [0,1]$ fuzzy halmazai, akkor a fuzzy halmazok körében az unió, metszet, komplementer képzést a következő módon értelmezzük:

$$(\mu_1 \wedge \mu_2)(x) = \min\,[\mu_1(x), \mu_2(x)],$$

$$(\mu_1 \vee \mu_2)(x) = \max\,[\mu_1(x), \mu_2(x)],$$

$$\bar{\mu}_1(x) = 1 - \mu_1(x).$$

A fuzzy halmazok körében a következő rendezést definiálhatjuk.

Definíció. Legyenek $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{F}(X)$ fuzzy halmazok, μ_1 akkor és csak akkor kisebb μ_2-nél, $\mu_1 \leq \mu_2$, ha $\mu_1(x) \leq \mu_2(x)\ \forall\, x \in X$.

Ezzel a rendezéssel egy X halmaz fuzzy halmazainak csak egy részét lehet összemérni, így a fuzzy halmazok részben rendezett halmazt alkotnak. (1.1) Könnyen belátható, hogy a fuzzy halmazok a fenti rendezésre és műveletekre hálót alkotnak. (1.2) Ezenkívül fennállnak a disztributivitási szabályok, így a háló disztributív (1.3) [1].

Sokszor szükségesnek látszik egyéb műveletek bevezetése is a fuzzy halmazok körében. Két fuzzy halmaz szorzata fuzzy halmaz, ha szorzaton a két fuzzy halmaz tartalmazási függvényeinek pontonkénti szorzatát értjük. Az összeadás már kivezet a [0,1] intervallumból, így például a következőképpen értelmezhetjük.

Definíció. Legyenek $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{F}(X)$ fuzzy halmazok, akkor

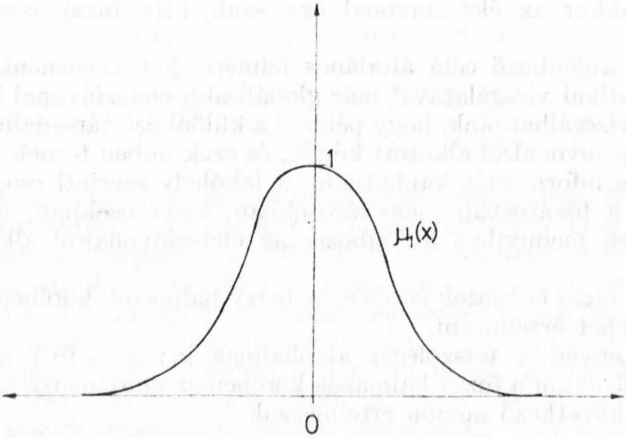
$$(\mu_1 \cdot \mu_2)(x) = \mu_1(x) \cdot \mu_2(x),$$

$$(\mu_1 + \mu_2)(x) = \mu_1(x) + \mu_2(x) - \mu_1(x) \cdot \mu_2(x).$$

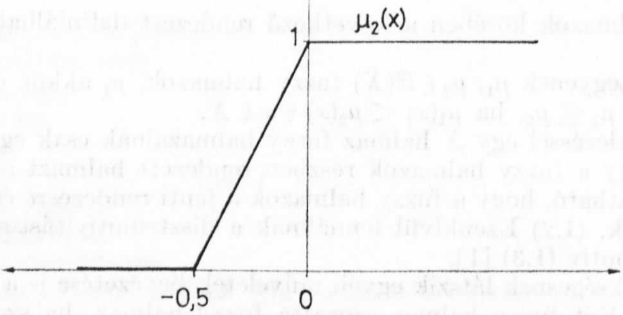
Példa: Tekintsük a következő fuzzy halmazokat (l. 1.a és 1.b ábrát):

„x közel van 0-hoz", „x lehetőleg legyen nagyobb 0-nál"

$$\mu_1(x) = e^{-k|x|} \qquad \mu_2(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0{,}5, \\ 2x - 0{,}5 & -0{,}5 < x < 0, \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

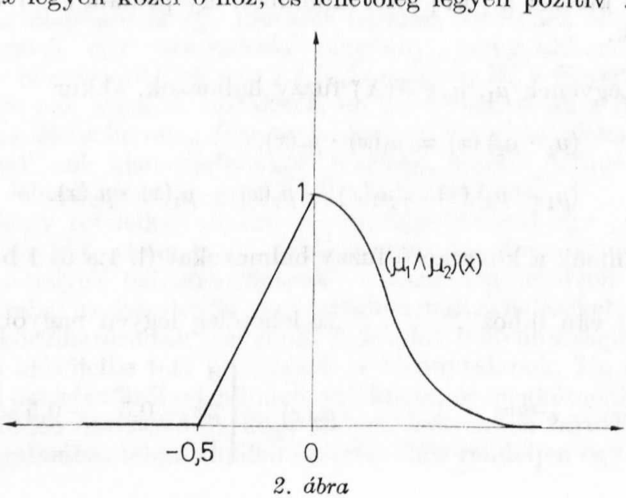


1a. ábra



1b. ábra

Metszetük: „x legyen közel 0-hoz, és lehetőleg legyen pozitív”.



2. ábra

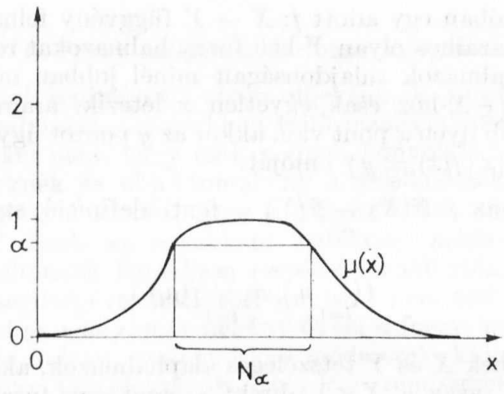
A fuzzy halmazok elmélete és a különböző matematikai módszerek közötti kapcsolatot a fuzzy halmazok α-metszetének segítségével teremthetjük meg.

Definíció. Legyen $\mu \in \mathcal{F}(X)$ fuzzy halmaz, akkor a μ α-metszete

$$N_\alpha = \{x \in X \mid \mu(x) \geq \alpha\},$$

tehát X azon közönséges részhalmaza, amelynek minden elemére $\mu \geq \alpha$

Példa:



3. ábra

Definíció. Értelmezzük egy $\mu \in \mathcal{F}(X)$ fuzzy halmaz és egy szám szorzatát: $\cdot\, \mu)\,(x) = \alpha \cdot \mu(x)$

Negoita az α-metszet segítségével a következőképpen fogalmazza meg az ún. ebontási tételt.

Tétel. Legyen X tetszőleges halmaz, $\mu \in \mathcal{F}(X)$ fuzzy halmaz, akkor $\mu = \bigvee\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot \mu_{N_\alpha}$, ahol μ_{N_α} N_α karakterisztikus függvénye.

Most vizsgáljuk meg, hogy milyen függvényfogalmakat, és függvénykapcsolatokat értelmezhetünk a fuzzy halmazok körében. A matematika különböző ágaiban gyakran találkozunk olyan esetekkel, amikor egy függvény értelmezési tartományának és értékkészletének elemei maguk is függvények. A fuzzy halmazokról fuzzy halmazokra ható függvények is ilyenek lesznek, mivel a fuzzy halmazokat a tartalmazási függvényeikkel azonosíthatjuk. Mégsem szakadhatunk teljesen el a fuzzy halmazok halmaz tulajdonságainak figyelembevételétől, így a fuzzy halmazokról fuzzy halmazokra ható függvények értelmezését az alaphalmazok elemeihez kell kapcsolni.

Tehát vizsgáljuk meg, hogy hogyan lehet egy $f\colon X \to Y$ leképezést kiterjeszteni $f\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$-ra, és ha f^{-1} létezik $f^{-1}\colon \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$-re.

Definíció. Legyen $f\colon X \to Y$, akkor az $f\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ leképezésen a következőt értjük:

$$f(\mu) = \nu; \qquad \nu(y) = \begin{cases} \sup\{\mu(x) \mid y = f(x)\}, & \text{ha} \quad y \in f(x) \\ 0, & \text{ha} \quad y \notin f(x). \end{cases}$$

Továbbá, ha f^{-1} létezik $f^{-1}: \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$, akkor

$$f^{-1}(\nu) = \nu \circ f$$

ahol

$$(\nu \circ f)(x) = \nu(f(x)).$$

A fentiekben $f(X)$ az f függvény képtere; azaz

$$f(X) = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X, f(x) = y\}.$$

Ebben a definícióban egy adott $f: X \to Y$ függvény felhasználásával az X halmaz fuzzy halmazaihoz olyan Y-beli fuzzy halmazokat rendelünk, amelyek az eredeti fuzzy halmazok tulajdonságait minél jobban megtartják.

Ha tehát egy $y \in Y$-hoz csak egyetlen x létezik, amire $f(x) = y$ akkor $\nu(y) = \mu(x)$. Ha több ilyen x pont van, akkor az y pontot úgy lehetne tekinteni, mint az őssképek, $\{x \mid f(x) = y\}$ unióját.

Állítás. Legyen az $f: \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ a fenti definíció szerint kiterjesztett függvény, akkor

$$f\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} \mu_i\right) = \bigvee_{i=1}^{\infty} f(\mu_i).$$

Definíció. Legyenek X és Y tetszőleges alaphalmazok, akkor az $f: X \times U \to [0,1]$ függvényt, azaz a $X \times Y$ direkt szorzat egy fuzzy halmazát fuzzy relációnak nevezzük.

Példa. Legyen $f: R \times R \to [0,1]$ fuzzy reláció a következő:

$$f(x, y) = e^{-|x-y|}$$

ami az „x közelítőleg egyenlő y-nal" fogalmat fuzzysítja.

Negoita [1] könyvében a fuzzy relációk kompozíciójának következő egyszerű tulajdonságait mutatja meg; legyenek $f \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $g, g' \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ fuzzy relációk, akkor:

1. $f \circ (g \vee g') = (f \circ g) \vee (f \circ g')$,
2. $f \circ (g \wedge g') = (f \circ g) \wedge (f \circ g')$,
3. $g \leq g' \Rightarrow f \circ g \leq f \circ g'$,

ahol a $\circ$ jel a megfelelő függvények kompozícióját jelöli.

A relációk körében fontos szerepet játszanak az egyszerű relációk.

Definíció. Az $f: X \times X \to [0,1]$ fuzzy relációt egyszerű relációnak nevezzük, ha az

1. $f(x, x) = 1 \qquad \forall\, x \in X,$

$$\left.\begin{array}{ll} 2. & f(x, y) = f(y, x) \\ 3. & f(x, y) = \bigvee_{z \in Z} [f(x, y) \wedge f(z, y)] \end{array}\right\} \quad \forall\, x, y \in X$$

összefüggések fennállnak.

A fuzzy halmazok konvexitását a következőképpen értelmezzük.

Definíció. Legyen $\mu \in \mathcal{F}(R^n)$ fuzzy halmaz, $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, akkor a μ fuzzy halmaz konvex, ha

$$\mu(\alpha x_1 + \beta x_2) \geq \mu(x_1) \wedge \mu(x_2)$$

Állítás. Egy $\mu \in \mathcal{F}(R^n)$ fuzzy halmaz akkor és csak akkor konvex, ha az α-metszetei is konvexek.

3. Fuzzy mértékek és fuzzy integrálok

A fuzzy halmazok segítségével olyan objektumok, fogalmak tulajdonságait próbáljuk megfogalmazni, amelyekben rejlő bizonytalanságokat egyéb matematikai eszközökkel nem, vagy csak nagyon bonyolult módon lehetne megadni. Amikor ezeknek az objektumoknak a viselkedését, mozgását akarjuk vizsgálni, felmerül az a kérdés, hogy a hagyományos matematikai eszközök alkalmazhatók-e? Ezek az egyébként hatékony módszerek, sokszor csak nagyon szigorú feltételek fennállása esetén használhatók fel, amelyeket egy fuzzy halmazok segítségével felállított rendszer nem tud teljesíteni.

Ezért merült fel az igény, már néhány évvel a fuzzy halmazok elméletének megszületése után, olyan matematikai módszerek kidolgozására, amelyek segítségével a fuzzy tulajdonságokat hordozó rendszerek is jól kezelhetők. Így született meg többek között a fuzzy mértékek és fuzzy integrálok elmélete. A fuzzy mértékek segítségével a fuzzy tulajdonságokkal rendelkező objektumok szubjektív értékelésére nyílik lehetőség.

A fuzzy mértékektől, ellentétben a mértékelmélet additivitást megkövetelő mérték fogalmával (1.7), csak a monotonitás fennállását követeljük meg. A mérték feltételeinek gyengítésével fuzzy mértékek nagyon széles skáláját hozhatjuk létre, nagyon sokféle fuzzy mértéket konstruálhatunk meg. Tehát a fuzzy mértéket a közönséges mérték additív tulajdonságának elhagyásával kapjuk, így magát a közönséges mértéket is tekinthetjük fuzzy mértéknek.

Definíció. Legyen $\mathcal{B}$ egy X vektortér Borel (1.5.) halmazainak rendszere. A $g\colon \mathcal{B} \to [0,1]$ halmazfüggvény fuzzy mérték, ha a

1. $g(\emptyset) = 0$, $g(X) = 1$,
2. $A, B, \in \mathcal{B}$ $A \subset B \Rightarrow g(A) \leq g(B)$
3. Ha az $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{B}$ monoton halmazsorozat, akkor

$$\lim_{n \to \infty} g(F_n) = g(\lim_{n \to \infty} F_n)$$

feltételek fennállnak.

Az $(X, \mathcal{B}, g)$ hármast fuzzy mértéktérnek nevezzük.

Példa. Legyen $X = [0,1]$, $g([a, h]) = \dfrac{b - a}{1 + a}$, a, $b \in [0, 1]$, $a \leq b$.

Könnyen belátható, hogy a g halmazfüggvényre igazak a fuzzy mérték feltételei, de mivel a g halmazfüggvény nem additív, nem mérték.

A fuzzy integrálok a várható értékhez hasonló rendeltetésű funkcionálok, de amíg a várható érték lineáris, a fuzzy integrálok csak monotonok.

Definíció. Legyen $h: X \to [0,1]$ Borel mérhető függvény (3.5), $A \in \mathcal{B}$. Akkor a $h(x)$ függvénynek A halmazon vett g fuzzy mérték szerinti fuzzy integrálja:

$$\int_A h(x) \circ g(\cdot) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(A \vee F_\alpha)],$$

ahol $F_\alpha = \{x \mid h(x) \geq \alpha\}$.

Példa. Tekintsük az előbbi g fuzzy mértéket az $X = [0,1]$ intervallumon, legyen $h_1(x) = (x+1)/2$, $h_2(x) = 1 - x/2$.

Természetesen a két függvény Lebesgue integrálja megegyezik. Ha azonban a fuzzy integrálokat kiszámítjuk, azt kapjuk, hogy

$$\int_X h_1(x) \circ g(\cdot) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha^1)] = 0{,}72.$$

$$\int_X h_2(x) \circ g(\cdot) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge g(F_\alpha^2)] = 0{,}66.$$

A következő lépés az, hogy a fuzzy integrált a Borel halmazokról kiterjesszük a fuzzy halmazokra. Jelöljük $\mathcal{F}_B(X)$-szel a Borel mérhető fuzzy halmazokat, vagyis azokat a fuzzy halmazokat, amelyeknek tartalmazási függvénye Borel mérhető, és legyen $\mu \in \mathcal{F}_B(X)$. Így a $\int_X \mu(x) \circ g$ kifejezést az előbbi definíció szerint értelmezve fuzzy-halmazfüggvénynek tekinthetjük, és μ fuzzy mértékének nevezzük.

Most definiáljuk a fuzzy integrálást fuzzy halmazokon.

Definíció. Legyen X tetszőleges alaphalmaz, $\mu \in \mathcal{F}_B(X)$ Borel mérhető fuzzy halmaz, $h: X \to [0,1]$ Borel mérhető függvény, akkor a

$$\int_X h(x) \circ g = \int_X [\mu(x) \wedge h(x)] \circ g$$

kifejezést a h függvény μ fuzzy halmazon vett g fuzzy mérték szerinti fuzzy integráljának nevezzük.

A fuzzy integrálok jellemző tulajdonsága a monotonitás, amit könnyen beláthatunk az előző definíciókból:

1. ha $A \subset B$, akkor $\int_A h(x) \circ g \leq \int_B h(x) \circ g$
2. ha $h_1 \leq h_2$, akkor $\int_X h_1(x) \circ g \leq \int_X h_2(x) \circ g$
3. ha $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{F}_B(X)$ és $\mu_1 \leq \mu_2$ akkor $\int_{\mu} h(x) \circ g \leq \int_{\mu_2} h(x) \circ g$.

A „fuzzy tulajdonség mértéke" fogalom általánosan elterjedt a fuzzy halmazok elméletében. Ez az általános kifejezés tartalmazhatja a „fontosság mértékét", „hatékonyság mértékét", „szépség mértékét", és például a fuzzy halmazok esetén a „tartalmazás mértékét". A különböző alkalmazások során nagyon sok fuzzy mértéket adtak meg, most nézzünk meg néhány lehetőséget, hogy hogyan tudunk fuzzy mértékeket konstruálni.

Az egyik legfőbb probléma az, hogy ha $E, F \in \mathcal{B}$ és $E \cap F = \emptyset$ mi legyen a $g(E \cup F)$ fuzzy mérték. Azokat a fuzzy mértékeket, amelyek kielégítik a következő feltételt, jelöljük g_λ-val.

Legyen E, $F \in \mathcal{B}$, $E \cap F = \emptyset$, akkor

$$g_\lambda(E \cup F) = g_\lambda(E) + g_\lambda(F) + \lambda \cdot g_\lambda(E) \cdot g_\lambda(F), \quad -1 < \lambda < +\infty$$

és nevezzük ezt a feltételt λ-szabálynak.

Ha egy g_λ fuzzy mértékre igaz a λ-szabály, akkor igazak a következők:

1. $g_\lambda(E \cup F) \geq g_\lambda(E) + g_\lambda(F) \qquad \lambda \geq 0,$
2. $g_\lambda(E \cup F) \leq g_\lambda(E) + g_\lambda(F) \qquad \lambda \leq 0,$

és mivel

$$g_\lambda(X) = 1,$$

3. $g_\lambda(\bar{E}) = \dfrac{1 - g_\lambda(E)}{1 + g_\lambda(E)}.$

Legyen most az alaphalmaz a valós számok halmaza, és legyen $h(x)$ monoton, balról folytonos függvény, amelyre $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 1$, és $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$. Az így kapott $h(x)$ függvény segítségével a következő fuzzy mértéket lehet megadni:

$$g_\lambda((a, b)) = \frac{h(b) - h(a)}{1 + \lambda \cdot h(a)}.$$

Vizsgáljuk most meg, hogy diszkrét esetben milyen lehetőségeink vannak fuzzy mértékek létrehozására? Tekintsünk egy $K = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ véges halmazt. Ha csak a λ-szabálynak eleget tevő fuzzy mértékeket nézzük, akkor teljesülni kell a

$$g_\lambda(\{s_i, s_j\}) = g_\lambda(\{s_i\}) + g_\lambda(\{s_j\}) + \lambda g_\lambda(\{s_i\}) \cdot g_\lambda(\{s_j\}) \quad i \neq j,$$

és általánosan az

$$g_\lambda(E \cup F) = g_\lambda(E) + g_\lambda(F) + \lambda \cdot g_\lambda(E) \cdot g_\lambda(F) \qquad E, F \subset K, E \cap F = \emptyset.$$

feltételeknek.

Ahhoz, hogy ezek, és a $g_\lambda(K) = 1$ feltételek teljesüljenek, *Sugeno* [5] cikkében g_λ-ra és λ-ra a következő feltétel fennállását követeli meg:

$$(1) \qquad \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda \cdot g_\lambda(\{s_i\}) - 1\right] = 1, \qquad -1 < \lambda < +\infty,$$

és ekkor egy $K' \subset K$ halmaz fuzzy mértéke:

$$g_\lambda(K') = \frac{1}{\lambda}\left[\prod_{s_i \in K'} (1 + \lambda \cdot g_\lambda(\{s_i\}) - 1\right].$$

Ahhoz, hogy ezt a feltételt teljesíteni tudjuk, először is el kell dönteni, hogy λ-t pozitívnak, vagy negatívnak válasszuk, ugyanis, ha $\lambda > 0$, akkor a $\sum\limits_{i=1}^{n} g_\lambda(\{s_i\}) < 1$, ha $\lambda > 0$, akkor a $\sum\limits_{i=1}^{n} g_\lambda(\{s_i\}) > 0$ feltételnek kell teljesülni. Alkalmas $g_\lambda(\{s_i\})$-k megadása után az (1) feltétel λ-ra egy n-edfokú polinomot ad. Ezt megoldva, és az alkalmas gyököt meghatározva megkapjuk a fuzzy mértékét. A $(K, 2^K)$-an kapott fuzzy mértékkel egy $h\colon K \to [0,1]$ függvény fuzzy integrálját a következő módon számolhatjuk ki. Feltehetjük, hogy $g_\lambda(\{s_1\}) \leq g_\lambda(\{s_2\}) \leq \ldots \leq g_\lambda(\{s_n\})$ ugyanis az $s_1, s_2 \ldots s_n$ elemek felcserélésével ez a feltétel könnyen teljesíthető. Ekkor a $h\colon K \to [0,1]$ fuzzy integrálja:

$$\int_K h(\{s\}) \circ g = \bigvee_{i=1}^{\infty} [h(s_i) \wedge g(K_i)],$$

ahol

$$K_i = \{s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n\}.$$

Az így kapott fuzzy mértékekkel kapcsolatban a következő kikötéseket lehet tenni. Feltételeztük, hogy bármely két diszjunkt részhalmaz egyesítésének fuzzy mértékét az összeg csökkentésével vagy növelésével nyerjük, mégpedig úgy, hogy egy meghatározott konstanssal szorozzuk az összetevők mértékeinek szorzatát. A valóságban sok esetben azt kellene feltenni, hogy bizonyos elemek „gyengítik", bizonyos elemek „erősítik" egymást, és ennek mértéke nem biztos, hogy mindig egyenesen aránylik az összetevők súlyához. A probléma fő nehézségét az adja, hogy „konstruálni" kell a fuzzy mértéket, mert az, hogy minden részhalmazra külön-külön adjuk meg a fuzzy mértéket, ha az elemszám nem túl kicsi, gyakorlatilag kivihetetlen.

A fuzzy mértékek és fuzzy integrálok egyik alkalmazási lehetősége a szubjektív értékelési folyamat vizsgálata.

Tegyük fel, hogy van egy objektumunk, például egy ház, és ennek bizonyos összetevői. Tehát $K = \{s_1, s_2, \ldots, s_5\}$ maga a ház, és az összetevők:

1. s_1 = a ház alapterülete,
2. s_2 = a ház berendezése,
3. s_3 = a ház környezete,
4. s_4 = a közlekedési lehetőségek,
5. s_5 = a környék ellátottsága.

Legyen $h\colon K \to [0,1]$ ezeknek az elemeknek az értékelése, akár fuzzy halmazok segítségével, például:

$$h(s_1) = \begin{cases} 1 & \text{ha } s_1 \geq 400 \text{ m}^2 \\ \dfrac{s_1}{400} & \text{ha } s_1 < 400 \text{ m}^2. \end{cases}$$

Ezután adjuk meg az elemek „fontosságának" szubjektív mértékeit, feltételezve, hogy $\lambda > 0$ tehát feltéve pl. hogy a g_λ (a ház területe, a ház környezete) $\geq g_\lambda$ (a ház területe) $+ g_\lambda$ (a ház környezete).

Legyen például:

1. $g_\lambda(\{s_1\}) = 0{,}2$
2. $g_\lambda(\{s_2\}) = 0{,}2$
3. $g_\lambda(\{s_2\}) = 0{,}1$
4. $g_\lambda(\{s_4\}) = 0{,}1$
5. $g_\lambda(\{s_5\}) = 0{,}1$.

Ezután az (1) feltételt λ-ra megoldva megkapjuk a fuzzy mértéket.

Ha most kiszámítjuk az $\underset{K}{f} h \circ g = \bigvee_{i=1}^{5} [h(s_i) \wedge g_\lambda(K_i)]$-t a ház ún. együttes értékelését kapjuk.

Nagyon fontos, hogy különbséget tegyünk a fuzzy halmaz és a fuzzy mérték megadása között. A fuzzy halmaz megadásánál azt kellett eldönteni, hogy az elemek milyen fokon tartoznak a fogalomhoz, a fuzzy mértékeknél pedig azt, hogy például milyen „fontosak".

4. Fuzzy programozás, lineáris fuzzy programozás

A fuzzy programozási feladat fuzzy környezetben levő döntési problémákkal foglalkozik. Döntési problémának a következő eljárást tekintjük: különböző alternatív lehetőségek közül, amelyek kielégítenek bizonyos korlátozásokat, válasszuk ki azt, amelyik egy vagy több célfüggvény követelményeinek legjobban megfelel. Sok esetben mind a korlátozások, mind a célfüggvények fuzzy tulajdonságúak, ekkor a problémák fuzzy elméleti megközelítése látszik a legcélszerűbbnek.

A fuzzy programozás elméletében mind a korlátozások, mind a célfüggvények fuzzy halmazok, a feladat tehát az, hogy olyan kiválasztást hozzunk létre, ami a fuzzy korlátozásokat kielégíti, és a célfüggvényre valamilyen extremális megoldást ad.

Jelöljük X-szel a lehetséges alternatívák halmazát.

Definíció. Egy fuzzy programozási feladat fuzzy célfüggvényei, és fuzzy korlátozásai X bizonyos fuzzy halmazai lesznek.

Megjegyzés. Bár a célfüggvények és a korlátozások formailag azonosak, a különböző feladatok pontosabb értelmezhetősége (pl. ok és okozati összefüggések) miatt célszerű megkülönböztetni őket.

Nézzük most meg a determisztikus automata fogalmát.

Definíció. Az $\mathcal{U} = \{U, X, \delta\}$ együttest determisztikus automatának nevezzük, ahol U az inputtér, X az állapot tér, $\delta\colon U \times X \to X$ az állapotfüggvény.

Diszkrét esetben létezik egy $\{0,1, \ldots, T\}$ véges diszkrét időintervallum, ekkor $\delta(u_t, x_t) = x_{t+1}$, $t \in \{0,1, \ldots, T\}$.

Példa. Legyen $\mathcal{U} = \{U, X, \delta\}$ egy diszkrét determinisztikus automata. Legyen $X = R^n$, $U = R^n$, x_T az X állapottér végállapota, és az a célunk, hogy „x_T közel legyen 0-hoz". Ekkor a következő fuzzy célfüggvényt adhatjuk meg:

$$\mu(x) = e^{-k\|x\|}, \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Legyen u_t egy rögzített input a t időpontban, akkor a fuzzy korlátozás legyen a következő $\mu' =$ „u_t legyen közel u_0-hoz", azaz $\mu'(u_t) = e^{-k\|u_t - u_0\|}$.

Definíció. Legyenek $\mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathfrak{F}(X)$ fuzzy célfüggvények, $\mu'_1, \ldots, \mu'_q \in \mathfrak{F}(X)$ fuzzy korlátozások, akkor a következő fuzzy halmazt fuzzy döntésnek nevezzük:

$$\mu = \Phi(\mu_1, \ldots, \mu_p, \mu'_1, \ldots, \mu'_q), \; \mu \in \mathfrak{F}(X).$$

Alap fuzzy döntésnek nevezzük a következő fuzzy halmazt:

$$\mu = \Big(\bigwedge_{i=1}^{p} \mu_i\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{j=1}^{q} \mu_j'\Big).$$

Ha külön nem tagadjuk, akkor ezt tekintjük fuzzy döntésnek.

Definíció. Legyen $\mu \in \mathfrak{F}(X)$ fuzzy döntés, ekkor az

$$M_x = \{x_0 \mid \mu(x_0) = \sup_{x \in X} \mu(x)\}$$

halmazt maximális döntéshalmaznak, véges esetben az $x_0 = \max \mu(x)$ elemeket maximális döntési elemeknek nevezzük.

Most nézzük meg hogyan lehet bizonyos esetekben a maximális döntést meghatározni. Legyen $\mathcal{U} = \{V, X, \delta\}$ véges, determinisztikus, diszkrét automata, tehát V és X véges halmazok, és $\{0,1, \ldots, T\}$ diszkrét időpontok, az állapotfüggvény $\delta(u_t, x_t) = x_{t+1}$. Legyenek $\mu_1, \ldots, \mu_{T-1} \in \mathfrak{F}(U)$ fuzzy korlátozások, ahol μ_i az u_i inputra vonatkozik, és μ_T' az x_T végállapot fuzzy célfüggvénye. Rögzítsünk egy $\{u_0, \ldots, u_{T-1}\}$ inputsorozatot, és tekintsük a

$$\mu(u_0, \ldots, u_{T-1}) = \mu_0(u_0) \wedge \ldots \wedge \mu_{T-1}(u_{T-1}) \wedge \mu_T'(x_T)$$

fuzzy döntést.

A következő eljárással juthatunk el fuzzy döntéshez:

1. Rögzítsünk egy $\{u_0, u_1, \ldots, u_{T-1}\}$ inputsorozatot.

2. Az x_0 kezdeti állapotból a $\delta(u_t, x_t) = x_{t+1}$ alkalmazásaival kiszámítjuk az x_T végállapotot.

3. Meghatározzuk a $\mu(u_0, \ldots, u_{T-1}) = \mu_0(u_0) \wedge \ldots \wedge \mu_{T-1}(u_{T-1}) \wedge \mu_T'(x_T)$ döntést.

A feladat tehát az, hogy határozzuk meg azt az $\{\bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_{T-1}\}$ inputsorozatot, amire a döntés maximális.

Most alkalmazzuk azt az eljárást, amellyel egy végállapotból kiindulva meghatározunk egy $\mu_{T-1}'(x_{T-1})$ célfüggvényt, ez azzal a tulajdonsággal fog rendelkezni, hogy amennyiben létezik hozzá optimális $\{\bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_{T-2}\}$ inputsorozat, akkor $\bar{u}_{T-1}$-et már könnyen meg lehet határozni. Belátható, hogy

$$\mu_{T-1}'(x_{T-1}) = \max_{u_{T-1}} \big(\mu_{T-1}(u_{T-1}) \wedge \mu_T'(\delta(u_{T-1}), x_{T-1})\big).$$

Most a μ_{T-1}' fuzzy halmazt tekinthetjük az x_{T-1} állapotra vonatkozó μ_T' által generált célfüggvénynek. Az iterációt folytatva azt kapjuk, hogy

$$\mu_{T-n}'(x_{T-n}) = \max_{u_{T-n}} (\mu_{T-n}(u_{T-n}) \wedge \mu_{T-n+1}'(x_{T-n+1})),$$

ahol

$$x_{T-n+1} = \delta(x_{T-n}\ u_{T-n}).$$

Így aztán eljuthatunk a μ_1' célfüggvényhez, amihez optimális $\bar{u}_0$ megkeresése után a μ_2' célfüggvényhez kell meghatározni a $\bar{u}_1$ inputot, és ezt folytatva eljuthatunk az optimális $\{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{T-1}\}$ inputsorozathoz.

Lineáris fuzzy programozás. Ebben a részben azt fogjuk tárgyalni, hogy hogyan lehet egy lineáris programozási feladatot fuzzysítani, és hogy a lineáris fuzzy programozási feladat segítségével hogyan lehet több célfüggvényű lineáris programozási feladatokat megoldani.

Tekintsük a lineáris programozási feladat mátrix alapját

$$\text{Min } z = cx,$$

$$Ax \leq b,$$

$$x \geq 0,$$

ahol A $n \times m$-es mátrix, $n \leq m$, $c, x \in R^n$, $b \in R^m$, $z = cx$ a célfüggvény $Ax \leq b$, $x \geq 0$ a feltételek (korlátozások).

Láttuk, hogy egy fuzzy programozási feladatnál mind a célfüggvények, mind a korlátozások fuzzy halmazok, és a feladat megoldása a fuzzy döntés valamilyen szuprémumának a meghatározása.

Jelöljük $(Ax)_i$-vel a korlátozások i. sorának jobb oldalát, ekkor ezeknek a korlátozásoknak a fuzzysítása legyen a következő: Legyen d_i egy olyan megengedett érték, amennyivel a megoldás során még túlléphetjük a b_i értéket, tehát $(Ax)_i$ lehet nagyobb, mint b_i, de kisebbnek kell lennie mint $b_i + d_i$. A korlátozásoknak ezt a „lazítását" a következő tartalmazási függvényekkel írhatjuk le:

$$\mu_i(Ax) = 1, \text{ ha } (Ax)_i \leq b_i,$$

$$0 < \mu_i(Ax) < 1, \text{ ha } b_i < (Ax)_i < b_i + d_i$$

$$\mu_i(Ax) = 0, \text{ ha } (Ax)_i > b_i + d_i.$$

A fuzzy programozási feladatnál a célfüggvények is fuzzy halmazok. Itt a következőt tehetjük. Előzetes számítási eljárások, becslések vagy szubjektív értékelések során határozzunk meg egy olyan z_0 értéket, amit a célfüggvény értékével nem akarunk túllépni, és egy olyan c_0 értéket, amennyivel még túlléphetjük. Ezt, a korlátozásokhoz hasonlóan, a következő fuzzy célfüggvénnyel adhatjuk meg:

$$\mu_c(z) = 1, \text{ ha } z \leq z_0$$

$$0 < \mu_c(z) < 1, \text{ ha } z_0 < z < z_0 + c_0$$

$$\mu_c(z) = 0, \text{ ha } z \geq z_0 + c_0.$$

Ezzel tehát fuzzysítottuk a lineáris programozási feladatot. (Az $x \geq 0$ feltételt az egyszerűség kedvéért most hagyjuk meg.)

A fuzzy programozási feladatnál a fuzzy célfüggvények és a fuzzy korlátozások szimmetrikusak, a feladat megoldásának szempontjából azonos jellegűek. Ezért, hogy egyszerűbben kezelhessük őket, végezzük el a következő összevonásokat. Legyen a B mátrix az A együttható mátrix kiegészítése a célfüggvény együtthatóival $c = \{c_1, \ldots c_n\}$-nel, és a b' vektor a b vektor kiegészítése a z_0 elemmel. Így a B egy $nx(m+1)$-es mátrix, b' egy $m+1$ elemű vektor lesz. A most bevezetett összevonásokat figyelembe véve, a fuzzy korlátozások és a fuzzy célfüggvény tartalmazási függvényét specifikálva, a következő tartalmazási függvények adják meg a lineáris fuzzy programozási feladatot:

$$\mu_i(Bx) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad (Bx)_i \leq b'_i \\ 1 - \dfrac{(Bx)_i - b'_i}{d_i}, & \text{ha} \quad b'_i < (Bx)_i \leq b'_i + d_i \\ 0, & \text{ha} \quad (Bx)_i > b'_i + d_i. \end{cases}$$

A tartalmazási függvények ezért lineárisak a $[b'_i, b'_i + d_i]$ intervallumon, hogy a feladatot lineáris programozási feladattá alakíthassuk át.

A fuzzy döntést a korlátozások, és a célfüggvény metszeteiként a $\operatorname*{Min}_i \mu_i(Bx)$ meghatározásával kapjuk meg. A lineáris fuzzy programozási feladat tehát a $\operatorname*{Max}_x \operatorname*{Min}_i \mu_i(Bx)$ kiszámítása.

Vezessük be a $B'_i = \dfrac{B_i}{d_i}$, $b''_i = \dfrac{b'_i}{d_i}$ jelöléseket. Ekkor az előbbi maximumkeresés, a tartalmazási függvényeket figyelembe véve, ilyen alakú lesz:

$$\operatorname*{Max}_x \operatorname*{Min}_i (b''_i - (B'x)_i)$$

Ez a feladat már ekvivalens a következő lineáris programozási feladattal: Határozzuk meg λ maximumát az alábbi feltételek mellett:

$$\lambda \leq b''_i - (B'x)_i, \qquad i = 1, \dots m, m + 1$$

$$x \geq 0.$$

Most nézzük meg, hogy az itt kapott eredményeket hogyan lehet alkalmazni több célfüggvényű lineáris programozási feladatokra. Legyenek $z_1 = c_1 x$, $z_2 = c_2 x, \dots, z_k = c_k x$ a célfüggvények, a feladat ezeknek az együttes minimalizálása az $Ax \leq b$, $x \geq 0$ korlátozások mellett.

Először minden célfüggvényre oldjuk meg az adott LP feladatot, így megkapjuk az $x^1, \dots, x^k$ megoldásokat, amelyekre minden célfüggvény különkülön optimális értéket vesz fel. Ezután határozzuk meg a

$$c_{i0} = \max_{j,\, j \neq i} c_i x^j \qquad i = 1, \dots, k$$

értékeket, és az előző gondolatmenetet követve tegyük fel, hogy ennyivel még túlléphetjük az optimális $z^i = c_i x^i$ értékeket. Ekkor a célfüggvények fuzzysítására adjuk meg a következő tartalmazási függvényeket:

$$\mu_{ci}(z_i) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad z_i \leq z^i \\ 1 - \dfrac{c_i x - z^i}{c_{i0} - z^i}, & \text{ha} \quad z^i < z_i < z^i + c_{i0} \\ 0, & \text{ha} \quad z_i > z^i + c_{i0}. \end{cases}$$

Az így kapott fuzzy célfüggvényekre és az eredeti korlátozásokra alkalmazva az előző koncepciót, megoldhatjuk a feladatot.

H. J. Zimmerman [12] cikkében az előbb leírtak szemléltetésére a következő példát adta: Egy gyár két terméket állít elő. Az első termék hazai eladásából két dollár nyereséghez jut, a második termék eladásából csak egyhez. Az első termék előállításához egy dollár értékű import anyagra van szüksége, a második terméket két dollárért adhatjuk el külföldön. A gyárnak két célja van, egyrészt, hogy maximális nyereséget érjen el, másrészt, hogy maximális legyen a külkereskedelmi mérlege.

Tehát a két célfüggvény:

$$z_1(x) = 2x_1 + x_2,$$

$$z_2(x) = -x_1 + 2x_2$$

— a következő kapacitás korlátok feltételezésével:

$$-x_1 + 3x_2 \leqq 21,$$

$$4x_1 + 3x_2 \leqq 45,$$

$$x_1 + 3x_2 \leqq 27,$$

$$3x_1 + x_2 \leqq 30,$$

$$x_{11}x_2 \geqq 0$$

két célfüggvényes *LP* feladatot kapunk.

Ha megoldjuk a feladatot a z_1 célfüggvényre, tehát ha csak a maximális nyereségre törekednénk, az optimális megoldást a (9,3) pontban kapnánk, és a célfüggvény értéke $z_1(x) = 21$. A másik célfüggvény ebben a pontban -3 lesz, azaz $z_2(x) = -3$. Ezután a z_2 célfüggvényre oldva meg az *LP* feladatot a (0,7) pont lesz az optimális megoldás, és itt

$$z_1(x) = 7, \quad z_2(x) = 14.$$

Így a következő célfüggvényeket adhatjuk meg:

$$\mu_l(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad z_1(x) \geqq 21, \\ \dfrac{z_1(x) - 7}{14}, & \text{ha} \quad 7 < z_1(x) \leqq 21, \\ 0, & \text{ha} \quad z_1(x) \leqq 7, \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad z_2(x) \geqq 14, \\ \dfrac{z_2(x) + 3}{17}, & \text{ha} \quad -3 < z_2(x) < 14, \\ 0, & \text{ha} \quad z_2(x) \leqq -3. \end{cases}$$

Ezeknek a tartalmazási függvényeknek a megfelelő átalakításával és az eredeti korlátokkal meghatározott lineáris fuzzy programozási feladat a következő lineáris programozási feladattal lesz ekvivalens:

Max λ

$$\begin{aligned} \lambda &\leq -0{,}058x_1 + 0{,}117x_2 + 0{,}176 \\ \lambda &\leq 0{,}143x_1 + 0{,}714x_2 - 0{,}5 \\ -x_1 + 3x_2 &\leq 21 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 27 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 45 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 30 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ennek a megoldása a következő eredményeket adta: $\lambda = 0{,}74$; a maximális nyereség = 17,38; a maximális külkereskedelmi mérleg = 4,58.

(Beérkezett: 1979. december 10-én.)

IRODALOM

1. NEOGITA, C. V.—RALESCU, D. A.: Applications of fuzzy sets to system analysis. Basel, 1975. Birkhauser.
2. KAUFMANN, F.: Introduction to fuzzy sets theory. New York, 1976. Academic Press.
3. ZADEH, L. A.: Fuzzy sets. Information and Control, 1965. No. 8, pp. 338—350.
4. GOUGEN, J. A.: L-fuzzy sets. Journ. Math. Anal. and Appl., 1967. No. 18, pp. 145—174.
5. SUGENO, M.: Fuzzy measures and fuzzy integrals — a survey. In: GUPTA, M. M. (ed.): Fuzzy automats and decision processes. New York, 1977. North Holland Publishing Co., pp. 154—176.
6. TERANTO, T.—SUGENO, M.: Conditional fuzzy measures and their application. In: ZADEH, L. A. (ed.): Fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes. New York, 1975. Academic Press, pp. 112—129.
7. SUGENO, M.—TERANTO, T.: Analytical representation of fuzzy systems. In: GUPTA, M. M. (ed.): Fuzzy automats and decision processes. New York, 1977. North Holland Publishing Co., pp. 177—189.
8. ZADEH, L. A.: Probability measures of fuzzy events. Journ. Math. Anal. and Appl., 1968. No. 23, pp. 421—437.
9. BELLMAN, R.—ZADEH, L. A.: Decision making in a fuzzy environment. Management Science, 1970. No. 17, pp. B141—B164.
10. ZADEH, L. A.: Fuzzy sets as a basis for theory of possibility. Fuzzy Sets and Systems, 1978. No. 1, pp. 3—28.
11. NEGOITA, C. V.: On fuzzy environment in optimalization problems. In: Modern trends in cybernetics and systems. Berlin, 1977. Springer-Verlag, pp. 13—24.
12. ZIMMERMANN, H. J.: Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. Fuzzy sets and Systems, 1978. No. 1, pp. 45—56.
13. GIHMAN, I. I.—SZKOROHOD, A. V.: Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe. Budapest, 1975. Műszaki Kiadó.