David Chappell

Optimális növekedés egy munkaerőfelesleggel rendelkező gazdaságban[1*]

I. Bevezetés

Az optimális gazdasági növekedés elméletében számos munka állandó termelés/tőke hányadost tételez fel.[2] Ezt rendszerint a következőképp fejezik ki:

$$Y(t) = \beta K(t), \tag{1}$$

ahol $Y(t)$ az aggregált termelés (azaz a bruttó nemzeti termék) a t időszakban, $K(t)$ az aggregált tőkeállomány ugyanakkor, β pedig a termelés és a tőke (állandó) hányadosa. Világos, hogy ez egyszerűsített változata a Leontief-féle termelési függvénynek, amely:

$$Y(t) = \min\,[\beta K(t), \gamma L(t)], \tag{2}$$

ahol $L(t)$ a munkaerő és γ az állandó termelés/munka arány. Az egyszerűsítés csak akkor engedhető meg, ha feltételezzük a folyamatos munkanélküliséget vagy a munkaerő alulfoglalkoztatottságát. A munkaerőfelesleg feltételét az (1) változat szerzői valóban mindig kinyilvánították.

Tekintsük most azt a helyzetet, amelyben valamely T időszakban minden rendelkezésre álló munkaerőt teljesen kihasználunk. Ekkor $Y(t) = \gamma L(t) = \gamma L_0 e^{nT}$ (feltételezzük, hogy a munkaerő exponenciálisan nő, növekedésének üteme n, és $L(0) = L_0$). Ahhoz, hogy a termelés e szintjét elérjük, mindamellett $\gamma L_0 e^{nT}/\beta$ egységnyi tőke is szükséges. A $\gamma L_0/\beta$ kifejezést K^*-gal jelölve a termelési függvény fentivel ekvivalens formája:

$$Y(t) = \beta \cdot \min\,[K^* e^{nt}, K(t)]. \tag{2'}$$

Mivel (2') elsőfokú homogén, mindkét oldalt eloszthatjuk $L_0 e^{nt}$-vel és (2')-t felírhatjuk az egy főre jutó formában:

$$Y(t) = \beta \cdot \min\,[k^*, k(t)]. \tag{2''}$$

Ily módon, amikor a tőke/munka arány k^* (és feltételezzük, hogy nincs technikai haladás), az egy főre jutó termelés maximális értékét veszi fel: $y^* = \beta k^*$.

[1] A szerző hálával tartozik *Roger Latham* értékes segítségéért a cikk előkészítésében. Hasznos észrevételeket kaptam *David Peel*től is. A szokásos „a hibákért egyedül a szerző felelős", kitétel persze e cikk esetében is áll.

* *Szabó Judit* fordítása.

[2] Lásd például a Chakravarty [3] és [4] valamint a Chakravarty és Manne [6] műveket.

A termelést vagy elfogyasztjuk, vagy hozzáadjuk a tőkeállományhoz. Ennek következtében a megtakarítás egyenlő a beruházással és

$$\dot{k} = \beta \cdot \min [k^*, k] - (n + \lambda) k - c, \tag{3}$$

ahol λ a tőkeállomány (exponenciális) elavulásának üteme. Feltesszük[3]; hogy $\beta > (n + \lambda)$. Mivel a tőke/munka arányt nincs értelme k^* fölé vinni és feltételezzük, hogy a gazdaságra éppen jellemző arány kisebb k^*-nál, felállítjuk a következő korlátot:

$$k - k^* \leq 0. \tag{4}$$

Tehát

$$c^* = (\beta - n - \lambda) k^* \tag{5}$$

az egy főre jutó fogyasztásnak maximális, végtelenségig fenntartható értéke. Ez lényegét tekintve az az „aranykori" fogyasztási szint, amiről *Phelps* beszél.[4]

Tegyük föl mármost, hogy a tervezési időszak kezdetén

$$k(0) = mk^*; \quad m \in (0, 1) \tag{6}$$

a tőke/munka arány. Cikkünk következő részében formába öntünk egy olyan fejlesztési tervet, amely

a) T időszak alatt (ahol T véges szám) k^*-ra emeli a tőke/munka arányt;

b) Ha az egyszer már elérte a k^*-ot, lehetővé teszi, hogy az egy főre jutó fogyasztás mindörökre a c^* aranykori szinten legyen.

c) Az a) által megadott időszakban maximalizálja az egy főre jutó pillanatnyi hasznosságok egy integrálját.

A III. részben egy végtelen távlatú tervet[5] adunk meg, majd a IV. rész összehasonlítja és szembeállítja egymással a két tervet. Az V. rész a befejező megjegyzéseké.

Számos szerző elemezett már a mienkéhez többé-kevésbé hasonló problémákat. Például CHAKRAVARTY [3] és [4] művei tárgyalnak egy olyan modellt, amely kapcsolható cikkünk II. részéhez. Ugyanakkor ezek mind a záró tőkeállományt, mind a tervezési időszak hosszát önkényesen veszik fel. Ezenkívül Chakravarty modelljében a paraméterek bizonyos értékei mellett a tervezési időszak végefelé a tőke leépülése következik be.[6] Az általunk megfogalmazott véges távlatú terv mentes ezektől a kellemetlen tulajdonságoktól. A végtelen távlatú modellről szólva, azt CASS [2] elemzésével hasonlíthatjuk össze. Annak ellenére, hogy *Cass* eszközei eléggé másfajták (ő például felhasználja az *Inada* korlátozó feltételeinek eleget tevő neoklasszikus termelési függvényt), eredményeink bizonyos hasonlóságokat mutatnak. Az optimális növekedési pálya mindkét modellben „aranykori" fogyasztással[7] jár, de amíg a mi modellünk ezt véges időszakon belül éri el, *Cass* optimális pályája aszimptotikusan közelíti meg a (módosított) aranyszabályt.

[3] Másszóval azzal az ésszerű feltételezéssel élünk, hogy a gazdaság eléggé termelékeny ahhoz, hogy mind a fogyasztás, mind a nettó beruházás pozitív lehessen.

[4] Lásd: PHELPS [11], 17. o.

[5] Hasonló problémák jelentkeznek meglehetősen más összefüggések között a duális gazdaságok irodalmában. Lásd például: DIXIT [7] és STERN [13].

[6] A CHAKRAVARTY [3] modellt ugyanezért tartotta kifogásolhatónak MANESCHI [9] és [10]. Lásd CHAKRAVARTY válaszát is a [9]-ben.

[7] Ezzel nem akarjuk azt mondani, hogy az „aranykori" fogyasztás szintje ugyanaz a két modellben.

II. A véges távlatú terv

Ebben a részben leírunk egy tervet, amely a

$$J_1 = \int_0^T u[c(t)]\, e^{-\delta t}\, dt \tag{7}$$

kifejezést maximalizálja mind u-ra, *mind T-re nézve.* A $c(t)$ jelöli az egy főre jutó fogyasztást a t időszakban, u az egy főre jutó összes hasznosság ugyanabban az időszakban, és δ egy pozitív diszkontláb. Feltételezésünk szerint δ három összetevőből áll, $\delta = r - \lambda - n > 0$, ahol az r ütem tisztán az időpreferenciát tükrözi, λ és n pedig a fent definiáltak[8]. Feltételezzük továbbá, hogy J_1 additív szeparábilis és homogén. Ily módon a pillanatnyi hasznosság függvénye állandó rugalmasságú lesz[9]:

$$u[c(t)] = \frac{[c(t)]^{1-\nu}}{1-\nu} > 0\,. \tag{8}$$

CHAKRAVARTY [3] bebizonyította, hogy a leginkább reális fogyasztási tervek $\nu > 1$ esetén jelennek meg, így mi is erre a tartományra összpontosítjuk elemzésünket. $\nu > 1$ mellett a (8) kifejezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

(i) $u' = c^{-\nu} > 0$
(ii) $u'' = -\nu c^{-(\nu+1)} < 0$,

azaz pozitív, de csökkenő a határhaszon.

(iii) Mivel $-c \cdot u''/u' = \nu$, a határhaszon állandó rugalmasságú.

(iv) Felülről korlátos, mivel $c \geq 0$, $u < 0$ és $\lim\limits_{c\to\infty} u' = 0$.

Az egy dolgozóra jutó nettó beruházás egyenletéből (3), tudjuk, hogy $k < k^*$ esetén

$$\dot{k} = \hat{\beta} k - c, \tag{9}$$

ahol $\hat{\beta} \equiv \beta - n - \lambda > 0$. Ezért a feladat

$$J_1 = \frac{1}{1-\nu} \int_0^T [c(t)]^{1-\nu} e^{-\delta t}\, dt \tag{10}$$

maximalizálása a

$$\dot{k} = \hat{\beta} k - c \tag{9}$$

$$c(t) \in [0, \hat{\beta} k] \tag{11}$$

feltételek és a

$$k(0) = mk^*, \tag{6}$$

$$k(T) = k^* \tag{12}$$

[8] Végig feltételezzük azt is, hogy a népesség (ugyanúgy, ahogy a munkaerő) n ütemben exponenciálisan növekszik. Tehát az ún. részvételi arány állandó.
[9] Lásd HICKS [8] C függelékét.

határfeltételek mellett, ahol T nem egy rögzített végpont, hanem a $k(T)-k^* = 0$ által meghatározott összesség.

A Pontryagin és szerzőtársai [12] könyvében található ismert maximum elvet alkalmazva bevezetünk egy, az állapotváltozóhoz hozzárendelt változót (co-state variable), $q(t)$-t, és definiáljuk a Hamilton függvényt:

$$H(k, c, q, t) = \frac{c^{1-\nu} e^{-\delta t}}{1-\nu} + q\,[\hat{\beta} k - c] \tag{13}$$

$$M(k, q, t) = \sup_{c \in [0, \hat{\beta} k]} H(k, c, q, t) \tag{14}$$

Feltételezve, hogy a maximum a $[0, \hat{\beta} k]$ halmaz belsejébe esik, az optimalitás szükséges és elégséges feltételei a következők:[10]

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \rightarrow e^{-\delta t} c^{-\nu} = q, \quad \forall t \in [0, T] \tag{15}$$

azaz

$$H(k, c, q, t) = M(k, q, t), \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{\hat{\beta}} q \tag{16}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \dot{k} = \hat{\beta} k - c \tag{17}$$

$$M[k(t), q(T), T] = 0, \tag{18}$$

(15)-öt az idő szerint deriválva és (16)-ba helyettesítve nyerjük, hogy

$$\dot{c} = RC; \text{ahol } R \equiv (\hat{\beta} - \delta)/\nu, \tag{19}$$

$$\therefore c(t) = A_1 e^{RT}. \tag{20}$$

(20)-at (9)-be helyettesítve

$$\dot{k} = \hat{\beta} k - A_1 e^{Rt} \tag{9'}$$

és

$$\therefore k(t) = \frac{A_1 e^{Rt}}{\hat{\beta} - R} + A_2 e^{\hat{\beta} t}, \tag{21}$$

ahol A_1 és A_2 tetszőleges integrációs konstansok.

Így, a határfeltételeket helyettesítve

$$k(t) = \frac{k^*}{(e^{\hat{\beta} T} - e^{RT})} \{(1 - m e^{RT})\, e^{\hat{\beta} t} + (m e^{\hat{\beta} T} - 1)\, e^{Rt}\} \tag{21'}$$

$$c(t) = \frac{(\hat{\beta} - R)\,(m e^{\hat{\beta} T} - 1)\, k^* e^{Rt}}{(e^{\hat{\beta} T} - e^{RT})}. \tag{20'}$$

[10] Lásd a 4. tételt [12], 60–61. oldalán.

Megjegyezzük, hogy (15)-ből

$$q(t) = \left[\frac{(\hat{\beta} - R)\,(me^{\hat{\beta}T} - 1)\,k^*}{(e^{\hat{\beta}T} - e^{RT})}\right]^{-\nu} e^{-\hat{\beta}t}. \tag{22}$$

Ezért a (18) feltételt alkalmazva

$$\left[\frac{(\hat{\beta} - R)\,(me^{\hat{\beta}T} - 1)\,k^*}{(e^{\hat{\beta}T} - e^{RT})}\right]^{1-\nu} e^{(R-\hat{\beta})T} \left\{\frac{1}{1-\nu} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\beta} - R} + \right.$$

$$\left. + \frac{\hat{\beta}(1 - me^{RT})\,e^{\hat{\beta}T}}{(\hat{\beta} - R)\,(me^{\hat{\beta}T} - 1)\,e^{RT}} - 1\right\} = 0\,, \tag{23}$$

A kapcsos zárójelben levő kifejezést nullával téve egyenlővé, és az egyenletet átrendezve azt látjuk, hogy T-nek ki kell elégítenie az alábbi egyenlőséget:

$$\Phi(T) = m\nu(\hat{\beta} - R) - \hat{\beta}(\nu - 1)\,e^{-RT} - \delta e^{-\hat{\beta}T} = 0. \tag{24}$$

1. *tétel*: A $\Phi(T) = 0$ transzcendentális egyenletnek van egyértelmű pozitív valós gyöke:[11] T^*.

Bizonyítás

(i) *Létezés*: Tekintsük $T = \hat{\beta}^{-1} \log [m^{-1}]$. Ekkor

$$\Phi(T) = \hat{\beta}(\nu - 1)\,[m - m^{R/\hat{\beta}}] < 0\,.$$

Tekintsük ezekután

$$T = R^{-1} \log [m^{-1}] \text{ és } \Phi(T) = \delta(m - m^{\hat{\beta}/R}) > 0\,.$$

Így tehát a $\Phi(T)$ folytonossága biztosítja, hogy $\exists T^*$, melyre $\Phi(T^*) = 0$, és

$$\hat{\beta}^{-1} \log [m^{-1}] < T^* < R^{-1} \log [m^{-1}]. \tag{25}$$

(ii) *Egyértelműség*: $\Phi'(T) = R\hat{\beta}(\nu - 1)\,e^{-RT} + \delta\hat{\beta}e^{-\hat{\beta}T} > 0, \forall T$. $\Phi(T)$ tehát szigorúan monoton növekvő és ezzel T^* egyértelmű. Q.E.D.

(24)-ből nyerjük az alábbiakat is:

$$1 - me^{RT^*} = \frac{\delta(e^{\hat{\beta}T^*} - e^{RT^*})}{\nu(\hat{\beta} - R)\,e^{\hat{\beta}T^*}} \tag{26}$$

$$me^{\hat{\beta}T^*} - 1 = \frac{\hat{\beta}(\nu - 1)\,(e^{\hat{\beta}T^*} - e^{RT^*})}{\nu(\hat{\beta} - R)\,e^{RT^*}}. \tag{27}$$

[11] Explicit módon nem lehetséges a T^*-ra való megoldás, mivel az ilyen típusú egyenleteknek nincs általános analitikus megoldásuk.

E kifejezések hasznosak lesznek a tőke/munkaerő arány, az egy dolgozóra jutó nettó beruházás és az egy főre jutó fogyasztás optimális pályájának egyszerűbb alakú felírásához. Valóban

$$k(t) = \frac{k^*}{\nu(\hat\beta - R)} \{\delta e^{\hat\beta(t-T^*)} + \hat\beta(\nu - 1)\, e^{R(t-T^*)}\} \tag{21''}$$

$$\dot k(t) = \frac{\hat\beta k^*}{\nu(\hat\beta - R)} \{\delta e^{\hat\beta(t-T^*)} + R(\nu - 1)\, e^{R(t-T^*)}\}. \tag{28}$$

Így a nettó beruházás végig pozitív és soha sincs tőkekivonás.

$$c(t) = \frac{\hat\beta(\nu - 1)\, k^*\, e^{R(t-T^*)}}{\nu}. \tag{20''}$$

A tervezési időszak alatt tehát az egy főre jutó fogyasztás a $\hat\beta(\nu - 1)\, k^*/\nu e^{RT^*}$ kezdőértékről a $\hat\beta(\nu - 1)\, k^*/\nu$ ($\hat\beta k^*$-nál kisebb) értékre növekszik.[12] Mindazonáltal a tervidőszak végén még mindig az „aranykori" szint alatt van; így $t = T^*$-ban a fogyasztási szint egy véges ugrást tesz, hogy elérje $\hat\beta k^*$-ot. Úgy látszik, hogy ebben a gazdaságban (adott záró tőkeállomány mellett) a véges távlatú terv számára az optimális stratégia a fogyasztás olyan mértékű korlátozása, amely biztosítja, hogy viszonylag rövid időn belül beálljon a teljes foglalkoztatás. Vegyük észre azonban, hogy ez *nem* a lehetséges minimális időszak.

III. A végtelen távlatú terv

Ugyanazt a jelölésrendszert és függvényeket használva, mint az előző részben, feladatunk a

$$J_2 = \frac{1}{1-\nu} \int_0^\infty [c(t)]^{1-\nu} e^{-\delta t}\, \mathrm{d}t \tag{29}$$

kifejezés maximalizálása a

$$\dot k = \hat\beta k - c \tag{9}$$

$$k - k^* \leq 0 \tag{4}$$

$$c(t) \in [0, \hat\beta k] \tag{11}$$

$$k(0) = mk^*;\quad m \in (0,1) \tag{6}$$

feltételek mellett. Ez viszonylag egyszerű szabályozási feladat, ahol az állapotváltozók tartománya korlátozott. Meg fogjuk mutatni, hogy (bizonyos, a későbbiekben kifejtendő feltételek mellett) a megoldás egy belső szakaszból ($k < k^*$ esetén) és egy határfelületi szakaszból ($k = k^*$ esetén) áll.

[12] Pontosabban növekszik, csökken vagy állandó marad, attól függően, hogy $\hat\beta \gtreqless \delta$ mely része áll. „Normális" paraméterértékek mellett azonban számíthatunk arra, hogy $\hat\beta > \delta$.

Tekintsük a
$$S = \{k \mid k \leq k^*\} \tag{30}$$
halmazt. Mivel a kiindulási (mk^*) tőke/munka hányados kisebb k^*-nál, k pályája kezdetben szükségképpen S belsejébe esik. Ezért az előző rész optimalitási feltételei, kivéve a (18) feltételt, fenn kell hogy álljanak. Nevezetesen e kezdeti szakaszban
$$c(t) = A_1 e^{Rt} \tag{20}$$
$$k(t) = \frac{A_1 e^{Rt}}{\hat{\beta} - R} + A_2 e^{\hat{\beta}t} \tag{21}$$
a megoldáshoz tartozó pálya. A k pályája mármost vagy mindenhol az S belsejében halad, vagy pedig kezdetben a belső tartományban van, később a határon. Nyilvánvaló, hogy ha a határt egyszer már elérte, később optimális akar maradni, $k = k^*$ és $\dot{k} = 0 \to c = c^*$.

Tekintsük a
$$\psi = [A_2, R] \tag{31}$$
vektort. Az olvasó könnyen igazolhatja, hogy k-nak a megoldásban levő pályája véges időn belül eléri S határát, ha $\psi \geq \mathbf{0}$ (ahol a $\geq$ azt jelöli, hogy legalább egy elemnél szigorú egyenlőtlenség áll fenn). Fel fogjuk tételezni, hogy ez a helyzet.[13] Tegyük fel, hogy k pályája valamely $T \in (0, \infty)$ időszakban éri el az S határát, azaz, hogy $k(T) = k^*$. Ekkor $t \in [0, T]$ esetén a c és k időbeli pályáját a fentiekben megadott (20′) és (21′) egyenletek írják le. A $t \in [T, \infty]$ esetben pedig
$$c(t) = \hat{\beta} k^* \tag{5}$$
és
$$k(t) = k^* \tag{21''}$$
Hátra van még az alábbiakban T'-vel jelölt optimális átváltási időszak meghatározása. Ehhez *Berkovitz* egyik eredményét fogjuk felhasználni.[14] Visszaidézzük, hogy a Hamilton függvény az alábbi alakba írható:
$$H(k, c, q, t) = u(c)\, e^{-\delta t} + q\dot{k}. \tag{13'}$$
Az optimális átváltási időnek teljesítenie kell a
$$H(T)^- = H(T)^+ \tag{32}$$
feltételt, ahol a $+$ és $-$ felső indexek a bal oldali és jobb oldali határértéket jelölik, $\lim_{t \to T} H(k, c, q, t)$. Esetünkben a feltétel teljesül, ha
$$c(t)^- = c(T)^+ = \hat{\beta} k^* \tag{33}$$

[13] Az olyan esetek, amelyeknél a k pályája mindenkor az S belsejében halad, kevéssé érdekesek, mivel a munkanélküliség örökös fennállását jelentik. Vegyük észre azt is, hogy A_1-nek pozitívnak kell lennie, mivel $c(t) = A_1 e^{Rt}$ és a pillanatnyi hasznossági függvény szerkezetéből adódóan a zéró fogyasztás *sohasem* optimális.

[14] Lásd BERKOVITZ [1] cikkében a 2. tételt a 498. oldalon.

(mivel az S határa mentén $\dot{k} = 0$). Így (21′)-t felhasználva

$$\frac{(\hat{\beta} - R)\,(me^{\hat{\beta}T-1})\,k^*\,e^{RT}}{e^{\hat{\beta}T} - e^{RT}} = \hat{\beta}k^*. \tag{33'}$$

Átrendezve és a $k^* e^{(\hat{\beta}+R)T}$ kifejezéssel végigosztva látható, hogy T-nek ki kell elégítenie a

$$\Theta(T) = (\hat{\beta} - R)m + Re^{-\hat{\beta}T} - \hat{\beta}e^{-RT} = 0 \tag{34}$$

egyenletet.

2. *tétel.* A $\Theta(T) = 0$ transzcendentális egyenletnek van egyértelmű pozitív valós gyöke: T'.

Bizonyítás

(i) *Létezés.* Nézzük a $T = R^{-1} \log [m^{-1}]$ értéket. Ekkor

$$\Theta(T) = R(m^{\hat{\beta}/R} - m) < 0.$$

Legyen most

$$T = R^{-1} \log [\hat{\beta}/m(\hat{\beta} - R)], \quad \text{ekkor} \quad \Theta(T) = R\,[m(\hat{\beta} - R)/\hat{\beta}]^{\hat{\beta}/R} > 0.$$

Ezért a $\Theta(T)$ folytonosságából következően $\exists T'$, amely kielégíti a $\Theta(T') = 0$ egyenletet, és

$$R^{-1} \log [m^{-1}] < T' < R^{-1} \log [\hat{\beta}/m(\hat{\beta} - R)] \tag{35}$$

(ii) *Egyértelműség.* $\Theta'(T) = \hat{\beta}R(e^{-RT} - e^{-\hat{\beta}T}) > 0$ minden T esetén. Ezért $\Theta(T)$ szigorúan monoton növekvő és T' egyértelmű. Q.E.D.

(34)-ből juthatunk a következőkhöz is:

$$me^{\hat{\beta}T'} - 1 = \frac{\hat{\beta}(e^{\hat{\beta}T'} - e^{RT'})}{(\hat{\beta} - R)\,e^{RT'}} \tag{36}$$

$$me^{RT'} - 1 = \frac{R(e^{\hat{\beta}T'} - e^{RT'})}{(\hat{\beta} - R)\,e^{\hat{\beta}T'}}. \tag{37}$$

Így (36) és (37)-ből alkalmasan helyettesítve nyerjük a tőke/munka arány, az egy dolgozóra jutó nettó beruházás és az egy főre jutó fogyasztás alábbi egyszerűsített formáit:

$$k(t) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{k^*}{(\hat{\beta} - R)}\,[\hat{\beta}e^{R(t-T')} - Re^{\hat{\beta}(t-T')}], & \text{ha } t \in [0, T') \\ k^*, & \text{ha } t \in [T', \infty) \end{array}\right\}, \tag{38}$$

$$\dot{k}(t) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\hat{\beta}Rk^*}{(\hat{\beta} - R)}\,[e^{R(t-T')} - e^{\hat{\beta}(t-T')}], & \text{ha } t \in [0, T') \\ 0, & \text{ha } t \in [T', \infty) \end{array}\right\}, \tag{39}$$

Tehát az egy dolgozóra jutó nettó beruházás a terv kezdeti szakasza mentén végig pozitív, de az utolsó pillanatban nullára esik (és attól kezdve természetesen ott is marad). Így tőkekivonás ez esetben sincs.

$$c(t) = \begin{cases} \hat{\beta}k^* e^{R(t-T')}, & \text{ha } t \in [0, T') \\ \hat{\beta}k^*, & \text{ha } t \in [T', \infty) \end{cases}, \tag{40}$$

azaz az egy főre jutó fogyasztás a kezdeti szakasz mentén végig monoton növekszik és (az előző rész véges távlatú modelljével szemben) $t = T'$ időpontban felveszi maximálisan fenntartható (aranykori) szintjét.

IV. A két modell összehasonlítása

Ebben a részben összevetjük a véges és a végtelen távlatú terv optimális megoldását. Az összehasonlítást a két célfüggvény maximális értékével kezdjük. Tekintsük elsőként a végtelen távlatú tervet. (40)-et (29)-be helyettesítve és integrálva kapjuk, hogy

$$J_2 = \frac{(\hat{\beta}k^*)^{1-\nu}}{(1-u)\,e^{\delta T'}} \left\{ \frac{1}{\delta} + \frac{(e^{\hat{\beta}T'} - e^{RT'})}{(\hat{\beta}-R)\,e^{RT'}} \right\}. \tag{41}$$

A véges távlatú tervben pedig a (20″) 10)-be helyettesítése és az integrálás után

$$J_1 = -\frac{(\hat{\beta}k^*)^{1-\nu}\,(e^{\hat{\beta}T^*} - e^{RT^*})}{\nu(\hat{\beta}-R)\,e^{(R-\nu)T^*}} \left[\frac{\nu}{\nu-1} \right]^{\nu}. \tag{42}$$

A nem korlátozott távlatú tervvel való összehasonlítás céljaira jelenértékeket képezhetünk a terv *vége* utáni időpontok egy főre jutó hasznosságából. Feltételezve tehát, hogy a gazdaság fogyasztását az „aranykori" szinten tartja

$$J_1' = \frac{1}{1-\nu} \int_{T^*}^{\infty} [\hat{\beta}k^*]^{1-\nu} e^{-\delta t}\,\mathrm{d}t = \frac{(\hat{\beta}k^*)^{1-\nu}}{\delta(1-\nu)\,e^{\delta T^*}}. \tag{43}$$

Ezért, ha a gazdaság követi a *véges* horizontú tervet, akkor a *végtelenbe* nyúló jövőben elért egy főre jutó hasznosságok maximális jelenértéke

$$J_1 + J_1' = -\frac{(\hat{\beta}k^*)^{1-\nu}}{e^{\delta T^*}} \left\{ \frac{(e^{\hat{\beta}T^*} - e^{RT^*})}{\nu(\hat{\beta}-R)\,e^{RT^*}} \left[\frac{\nu}{\nu-1} \right]^{\nu} + \frac{1}{\delta(\nu-1)} \right\}. \tag{44}$$

Sajnos a (41) és (44) értékeket nem tudjuk közvetlen módon összehasonlítani, mert mint az előzőekben rámutattunk, nem tudunk analitikus megoldást adni a T^* és a T' értékekre. Kézenfekvő azt remélni, hogy $J_2 > (J_1 + J_1')$ és az alábbiakban bemutatott számpéldában ez is a helyzet. Tudjuk mindamellett, hogy $T' > T^*$, mivel (25)-ből és (35)-ből

$$0 < \hat{\beta}^{-1}\log[m^{-1}] < T^* < R^{-1}\log[m^{-1}] < T' < R^{-1}\log[\hat{\beta}/m(\hat{\beta}-R)] < \infty, \tag{45}$$

ami azt jelenti, hogy a végtelen időszak feletti optimalizálás esetében a teljes foglalkoztatásba való átmenet időszaka kétségtelenül hosszabb ideig tart, mint a véges esetben.

Egy számpélda: Legyen $k^* = 100$; $\hat{\beta} = 0{,}2$; $m = 0{,}75$; $\delta = 0{,}125$; $\nu = 1{,}5$. Ekkor egy iterációs módszerrel $T^* = 2{,}266$ és $T' = 10{,}430$ értékekhez jutunk. Tekintsük most az egy főre jutó fogyasztás pályáját a két terv átmeneti időszakában. A paraméterek fenti értékei mellett az alábbiakat kapjuk:

Véges távlatú terv:

$$c(t) = \frac{\hat{\beta}(\nu - 1)\, k^*\, e^{R(t-T^*)}}{\nu} = 5{,}96\, e^{0,05t}$$

$$\therefore\ c(0) = 5{,}96 \text{ és } c(2{,}266) = 6{,}67$$

Végtelen távlatú terv:

$$c(t) = \hat{\beta} k^*\, e^{R(t-T')} = 11{,}87\, e^{0,05t}$$

$$\therefore\ c(0) = 11{,}87 \text{ és } c(10{,}430) = 20 = c^*.$$

Mindez elég szemléletesen mutatja a probléma két megközelítésének alapvető különbségét. A véges távlatú tervben a teljes foglalkoztatásra való (viszonylag rövid) áttérés folyamán az egy főre jutó fogyasztás meglehetősen szigorúan korlátozott, míg a végtelen távlatú tervet sokkal fokozatosabb megközelítés jellemzi.

A végtelen távlatú terv egy másik kedvező eredménye, hogy az egy főre jutó fogyasztás kiinduló értéke bizonyos értelemben maximalizált, $T = T'$ mellett ugyanis a kiinduló egy főre jutó fogyasztás magasabb, mint bármely más, (20′)-t kielégítő pálya esetében. Emlékeztetünk rá, hogy az egy főre jutó fogyasztás kiinduló értékét általános alakban fölírva

$$c(0) = \frac{(\hat{\beta} - R)\,(m e^{\hat{\beta}T} - 1)\, k^*}{(e^{\hat{\beta}T} - e^{RT})}\,. \tag{20'''}$$

Könnyen igazolható, hogy ez a kifejezés $T = T'$ mellett T-re nézve maximális és $\max c(0) = \beta k^* e^{-RT'}$.

Tekintsük végül a maximális jelenértékű egy főre jutó hasznosságra felírt két kifejezést (azaz (41)-et és (44)-et fentebb). A számpélda értékeiből kiszámíthatjuk, hogy

$$J_2 = -4{,}031 \text{ (végtelen távlatú eset)}$$

és

$$J_1 + J_1' = -4{,}272 \text{ (véges távlatú eset)}.$$

Így tehát erre az egyedi példára a végtelen távlatú terv egy 6%-os többletet mutat a véges távlatúhoz képest (mely utóbbit az összehasonlíthatóság kedvéért kiterjesztettük).

V. Befejező megjegyzések

Végül szeretnénk összefoglalni mi az, ami véleményünk szerint lényeges dolgozatunkban. Először is úgy érezzük, hogy a véges távlatú terv a mi megfogalmazásunkban sikeresen túljut az ilyen modellekkel szemben felhozható szokásos hiányosságokon, amennyiben

a) A tőke/munka záróértékét meghatározott céllal, és nem csupán egy önkényes döntéssel választottuk meg;

b) A tervezési időszak hosszát az optimálási folyamat részeként állapítottuk meg.

c) Modellünk semmikor sem fogyaszt előzőleg felhalmozott tőkét.

Másodszor, megmutattuk, hogy a véges és végtelen távlatú terv gazdaságpolitikailag igen különböző, az utóbbi sokkal inkább fokozatos megközelítést követ. Érzésünk szerint a végtelen távlatú tervet kell előnyben részesíteni, valószínűnek látszik, hogy a paraméterek ésszerű értékei mellett hasznossági „többletet" mutat a véges időszakú tervhez képest.[15] Végül szeretnénk rámutatni arra, hogy munkánk szándéka szerint is inkább szemléltetés volt és nem kimerítő elemzés.

(*Beérkezett: 1980 április 14-én.*)

IRODALOM

1. Berkovitz, L. D.: "On control problems with bounded state variables". Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1962.
2. Cass, D.: "Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation". Review of Economic Studies, 1965.
3. Chakravarty, S.: "Optimal savings with finite planning horizon". International Economic Review, 1962.
4. Chakravarty, S.: "Capital and development planning". The M.I.T. Press, 1969.
5. Chakravarty, S.: "Optimal savings with finite planning horizon: a reply". International Economic Review, 1966.
6. Chakravarty, S. and A. S. Manne: "Optimal growth when the instantaneous utility function depends on the rate of change in consumption".
7. Dixit, A. K.: "Optimal development in the labour-surplus economy". Review of Economic Studies, 1968.
8. Hicks, Sir John R.: "Capital and growth". Oxford University Press, 1965.
9. Maneschi, A.: "Optimal savings with finite planning horizon: a note". International Economic Review, 1966.
10. Maneschi, A.: "Optimal savings with finite planning horizon: a rejoinder". International Economic Review, 1966.
11. Phelps, E. S.: "Golden rules of growth". New York, W. W. Norton and Co., 1967.
12. Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze és E. F. Mischchenko: "The mathematical theory of optimal processes". (translated by K. N. Trirogoff). New York, Interscience Publishers, 1962.
13. Stern, N. H.: "Optimum development in a dual economy". Review of Economic Studies, 1971.

[15] *Minford* professzor rámutatott, hogy ha a véges tervben maximalizált mennyiséghez egy alkalmasan megválasztott „örökséget" csatolunk, akkor ezzel feltehetően azonossá tehető a két terv.

OPTIMAL GROWTH IN A LABOUR SURPLUS ECONOMY

In the article the functioning of the traditional macro-economic model is examined in the case of labour surplus, looking for the path that maximizes the time-integral of the discounted utility function. In case of an integral with finite horizon neither the initial capital stock, nor the length of the planning horizon are given arbitrarily. In case of infinite time horizon such a solution has been found where the consumption path reaches the „golden age" consumption within a finite interval. Important conclusions are drawn also from the comparison of finite and infinite horizon paths, the former reaching the state of full employment earlier albeit with a lower level of consumption.

ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗВИТИЕ ЭКОНОМИКИ, РАСПОЛАГАЮЩЕЙ ИЗБЫТКОМ РАБОЧЕЙ СИЛЫ

В данной статье рассматривается функционирование традиционной макроэкономической модели в условиях избытка рабочей силы и изыскивается тот путь, который максимализирует повременный интеграл дисконтируемую зависимость полезности. В случае интеграла с конечным горизонтом не дается ни нулевой состав капитала, не берется произвольно протяженность горизонта планирования, при котором путь потребления в пределах установленного времени достигает потребления в «золотом веке». Существенные выводы могут быть получены при сопоставлении путей конечного и бесконечного горизонта и первый случай при более низком уровне потребления быстрее выходит к полной занятости.