Danyi Pál—Komlósi Sándor

Megjegyzés a szállítási feladat egy változatához

Vörös József [2] alatti cikkében termelésprogramozási problémákkal foglalkozik, többek között egy lineáris célfüggvényű esettel, amelynek algebrai modelljéről (6) megmutatja, hogy olyan alakra transzformálható, amely a standard szállítási feladattól abban különbözik, hogy egyes feltételekben az egyenlőségjel helyett alsó és felső korlátok szerepelnek. Ez a feladattípus speciális esete a következőnek:

(A)-Probléma

Keressük a

$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

költségfüggvény minimumát a következő feltételek mellett:

$$0 \leq a_i \leq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq c_i < +\infty, \quad a_i \leq c_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$0 \leq b_j \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq d_j < +\infty, \quad b_j \leq d_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ és } c_{ij} \geq 0.$$

A célunk az, hogy megvizsgáljuk e kétoldalról korlátozott szállítási modell kapcsolatát a szállítási feladatok néhány típusával. Legyenek

$$A = \sum_{i=1}^{m} a_i, \quad B = \sum_{j=1}^{n} b_j, \quad C = \sum_{i=1}^{m} c_i \quad \text{és} \quad D = \sum_{j=1}^{n} d_j.$$

Az (A)-Probléma megoldhatóságának nyilván szükséges feltétele, hogy $A \leq D$ és $B \leq C$ teljesüljön. Amennyiben $A = D$ vagy $B = C$ teljesül, akkor egy standard szállítási feladatot kapunk. $A = D$ esetén a következőt:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$d_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ és } c_{ij} \geq 0,$$

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}.$$

Az (A)-Problémához rendeljük hozzá a következő, részben felsőkorlátos szállítási feladatot:

(B)-Probléma

Keressük a

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

költségfüggvény minimumát a következő feltételek mellett:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i,n+1} = c_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + x_{m+1,j} = d_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$0 \leq x_{i,n+1} \leq c_i - a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$0 \leq x_{m+1,j} \leq d_j - b_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ és } c_{ij} \geq 0.$$

A (B)-Probléma ekvivalens az (A)-Problémával olyan értelemben, hogy az egyik feladat minden lehetséges megoldásának kölcsönösen és egyértelműen megfeleltethető a másik feladat egy lehetséges megoldása, és az egymásnak megfelelő megoldásokhoz az egyes feladatokban egyenlő célfüggvényértékek tartoznak. A (B)-Probléma felsőkorlátos disztribuciós módszerrel megoldható, ha megoldáshalmaza nem üres.

Módosítsuk az (A)-Problémát úgy, hogy a $c_i < +\infty$, illetve $d_j < +\infty$ feltételeket $c_i \leq +\infty$, ill. $d_j \leq +\infty$ feltételekre változtatjuk. Nevezzük *(A')-Problémá*nak az előbbiekben megfogalmazott problémát. Ez a probléma általában nem írható át ekvivalens felsőkorlátos disztribuciós feladattá, mint azt a következő egyszerű példa is mutatja.

Példa:

Keressük a

$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

költségfüggvény minimumát a következő feltételek mellett:

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \geq 0,$$

$$1 \leq x_{11} + x_{12},$$

$$1 \leq x_{21} + x_{22},$$

$$1 \leq x_{11} + x_{21},$$

$$1 \leq x_{12} + x_{22},$$

és a költségmátrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A problémának optimális megoldásai lesznek a következők:

$$x_{12} = x_{21} = 0,\ x_{11} \geq 1 \text{ és } x_{22} \geq 1.$$

Ez a példa azt is mutatja, hogy általában az (A')-Probléma nem redukálható olyan (A)-Problémává, hogy a két probléma optimális megoldásai megegyezzenek. Egy, a gyakorlati alkalmazások szempontjából fontos esetben azonban hasznos megállapítást tehetünk. Abban az esetben, amikor minden fajlagos szállítási költség pozitív, igaz a következő:

Lemma: A

$$0 \leq a_i \leq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq c_i \leq +\infty, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$0 \leq b_j \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq d_j \leq +\infty, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

$$x_{ij} \geq 0, c_{ij} > 0,$$

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

szállítási feladatnak minden optimális $x = [x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn}]^*$ megoldására teljesülnek a következő feltételek:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq \max(a_i, B), \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq \max(b_j, A), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Bizonyítás:

Legyen $x = [x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn}]^*$ optimális megoldása (1)-nek. Tegyük fel, hogy van olyan g index, amelyre

$$\sum_{j=1}^{n} x_{gj} > \max(a_g, B).$$

Jelölje J a következő indexhalmazt:

$$J = \{j \mid 1 \leq j \leq n \text{ és } x_{gj} > 0\}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{j \in J} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq \sum_{j \in J} x_{gj} > B,$$

ezért található olyan $h \in J$, hogy

$$\sum_{=1}^{m} x_{ih} > b_h.$$

Legyen

$$a'_g = \sum_{j=1}^{n} x_{gj}, \quad b'_h = \sum_{i=1}^{m} x_{ih}.$$

Feltevésünk szerint $a'_g > a_g$ és $b'_h > b_h$. Legyen δ egy olyan pozitív szám, amelyre

$$0 < \delta < \min \{a'_g - a_g, b'_h - b_h, x_{gh}\}.$$

Legyen $\hat{x}_{ij} = x_{ij}$, ha $i \neq g$ vagy $j \neq h$ és legyen

$$\hat{x}_{gh} = x_{gh} - \delta.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor az $\underline{\hat{x}} = [\hat{x}_{11}, \ldots, \hat{x}_{mn}]^*$ vektor lehetséges megoldása az (1) feladatnak, és a hozzátartozó célfüggvényérték $\delta \cdot c_{gh} > 0$ értékkel kisebb, mint az $\hat{x}$ megoldáshoz tartozó célfüggvényérték. Vagyis x feltevésünkkel ellentétben nem optimális megoldás. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy a (2) egyenlőtlenségeknek szükségképpen teljesülniük kell.

A most bizonyított Lemmából következik az

1. Tétel:

Tekintsük a Lemmában megfogalmazott (1) feladatot. Módosítsuk azt a következőképpen:

$$0 \leq a_i \leq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq c'_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$0 \leq b_j \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq d'_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0, \; c_{ij} > 0,$$

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

ahol:

$$c'_i = \begin{cases} c_i, & \text{ha } c_i < +\infty \\ \max(a_i, B) & \text{egyébként} \end{cases}$$

és

$$d'_j = \begin{cases} d_j, & \text{ha } d_j < +\infty \\ \max(b_j, A) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor a (3) és az (1) feladat optimális megoldásainak halmaza egyenlő.

Bizonyítás:

Az nyilvánvaló, hogy a (3) feladat optimális megoldásai lehetséges megoldásokat szolgáltatnak az (1) feladat számára. Jelölje z_2, ill. z_1 a (3), ill. (1) feladat optimális megoldásaihoz tartozó célfüggvényértéket. Nyilvánvaló, hogy $z_1 \leq z_2$.

A Lemma állításából következik, hogy (1) minden optimális megoldása megvalósítható megoldása (3)-nak, következésképpen $z_2 \leq z_1$, és ennélfogva $z_1 = z_2$. Emiatt (3) optimális megoldásai (1)-nek is optimális megoldásai és a Lemmára való tekintettel (1) minden optimális megoldása optimális megoldása (3)-nak is.

Az 1. Tétel alapján tehát az (1) feladatot redukálhatjuk a (3) feladatra, az pedig — lévén típusát tekintve (A)-Probléma — redukálható egy (B)-Problámává, azaz egy felsőkorlátos szállítási feladattá.

Mielőtt rátérnénk az 1. Tételből adódó egy további következmény tárgyalására, néhány megjegyzést kell tennünk.

Ha a Lemmában a költségmátrixra vonatkozó pozitivitási feltevést nemnegativitási feltevésre módosítjuk (vagyis, ha csak azt feltételezzük, hogy $c_{ij} \geq 0$), akkor a Lemma állítása már nem lesz igaz, ami pl. a cikk elején közölt egyszerű példa alapján nyilvánvaló. Viszont a Lemma bizonyításában felhasznált gondolatmenet segítségével ebben az esetben is igazolható a következő:

2. Tétel: A

$$
\begin{aligned}
&0 \leq a_i \leq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq c_i \leq +\infty && i = 1, 2, \ldots, m, \\
&0 \leq b_j \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq d_j \leq +\infty && j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (4) \\
&x_{ij} \geq 0,\ c_{ij} \geq 0, \\
&\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}
\end{aligned}
$$

szállítási feladatnak *van* olyan optimális megoldása, melyre teljesülnek a Lemma (2) feltételei.

A 2. Tételből következik a

3. Tétel:

Módosítsuk a 2. Tételben megfogalmazott (4) feladatot a következőképpen:

$$
\begin{aligned}
&0 \leq a_i \leq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq c'_i && i = 1, 2, \ldots, m, \\
&0 \leq b_j \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq d'_j && j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (5) \\
&x_{ij} \geq 0,\ c_{ij} \geq 0, \\
&\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},
\end{aligned}
$$

ahol

$$
c'_i = \begin{cases} c_i, & \text{ha } c_i < +\infty \\ \max(a_i,\ B) & \text{egyébként} \end{cases}
$$

és

$$
d'_j = \begin{cases} d_j, & \text{ha } d_j < +\infty \\ \max(b_j,\ A) & \text{egyébként.} \end{cases}
$$

Ekkor az (5) feladat minden optimális megoldása egyúttal a (4) feladatnak is optimális megoldása.

Ennek alapján tehát a (4) feladat bizonyos optimális megoldásait (de általában nem mindegyiket) megkapjuk az (5) feladat megoldása útján, amely viszont már ekvivalens egy felsőkorlátos szállítási feladattal.

Ezek után vizsgáljuk meg a következő problémát:

Legyenek I_1, I_2, I_3 és J_1, J_2, J_3 páronként diszjunkt indexhalmazok, amelyekre $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \{1, 2, \ldots, m\}$, $J_1 \cup J_2 \cup J_3 = \{1, 2, \ldots, n\}$. Minimalizálandó

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} \alpha_i &\geq \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, & i &\in I_1, \\ \alpha_i &= \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, & i &\in I_2, \\ \alpha_i &\leq \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, & i &\in I_3, \\ \beta_j &\geq \sum_{i=1}^{m} x_{ij}, & j &\in J_1, \\ \beta_j &= \sum_{i=1}^{m} x_{ij}, & j &\in J_2, \\ \beta_j &\leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij}, & j &\in J_3, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\alpha_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ \beta_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0,\ c_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

	$i \in I_1$	$i \in I_2$	$i \in I_3$
$a_i :=$	0	α_i	α_i
$c_i :=$	α_i	α_i	$+\infty$

	$j \in J_1$	$j \in J_2$	$j \in J_3$
$b_j :=$	0	β_j	β_j
$d_j :=$	β_j	β_j	$+\infty$

Nyilvánvaló, hogy a (6) feltételrendszer azonos az

$$\begin{aligned} a_i &\leq \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq c_i, & i &= 1, \ldots, m \\ a_i &\leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq d_j, & j &= 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{7}$$

feltételrendszerrel. Ennek következtében tehát a (6) probléma egy (A′)-Probléma, melynek megoldása részben vagy egészben visszavezethető egy felsőkorlátos szállítási probléma ((B)-Probléma) megoldására.

(Beérkezett: 1980. május 21-én.)

IRODALOM

1. Krekó, B.: Lineáris programozás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1966.
2. Vörös, J.: Többállomásos termelés-tervezés konkáv és lineáris költségfüggvénnyel. Szigma. E számban.

REMARKS ON A VARIANT OF THE TRANSPORTATION PROBLEM

In the constraint system of a standard transportation problem let us replace equality signs by lower and upper limits (Problem A). This problem is equivalent to a transportation problem with upper bound (Problem B). The article is aimed at examining the relationship of Problem A and B, respectively, to some types of transportation problems. If in Problem A some of the upper bounds are omitted then in case of positive objective coefficients all optimum solutions of the new problem and, in general, some of its optimum solutions can be determined by solving a transportation problem with upper bound. Finally, let the standard problem be modified so that in the constraint system instead of the equality sign the relations $\leq$ and $\geq$ are also allowed. The solution of this model can also be reduced to problem B.

ЗАМЕЧАНИЕ К ОДНОМУ ИЗ ВИДОВ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Заменим в системе ограничений стандартной транспортной задачи знаки равенства с нижними и верхними пределами (проблема «А»). Эта задача эквивалентна транспортной задаче с верхним пределом (проблема «Б»). Цель данной статьи заключается в том, чтобы рассмотреть взаимосвязи проблем «А» и «Б» с некоторыми типами транспортных задач. Если в проблеме «А» из числа верхних пределов «c_i» и «d_j» некоторые будут упущены, то в случае «$c_{ij} > 0$» любое оптимальное решение новой задачи а в общем случае некоторые оптимальные решения могут быть определены путем решения транспортной задачи с верхним пределом. В заключении стандартная задача может быть изменена так, что системе ограничений вместо знака равенства будет допускать также и отношения $\leq$ и $\geq$. Такое решение также может быть сведено к проблеме «Б».