Simonovits András

A költségmegosztás elméletéről

1. Bevezetés

Induljunk ki a következő feladat vizsgálatából: egy egyetem egy telefonközpontot működtet, amelynek használatáért (a beszélgetés távolságától, időtartamától és időszaktól függően) a felhasználók fizetnek. Adminisztratív okokból a költségeknek s a bevételeknek egyezniük kell. Kérdés: ki mennyit fizessen? Hogyan osszuk föl a költségeket a felhasználók között? [Vö. *Billera*, *Heath* és *Raanan* (1978).]

Hasonló problémák merülnek föl pl. több ország közös vállalkozásánál, vagy a közszolgáltatásoknál. Nem állítom azt, hogy a telefon, az energiatermelés vagy -szállítás nem lehet veszteséges, ill. nyereséges; azonban az említett tevékenységek monopol-jellege (amely a növekvő hozadékok létezése miatt törvényszerű) merőben eltérő árszabályozást követel, mint más tevékenységek. Ilyenkor valamilyen értelemben a többlet vagy veszteség adott; ekkor általánosított költségmegosztásról beszélhetünk.

Ebben a dolgozatban az egyszerűség kevéért a szűkebb értelemben vett költségmegosztással foglalkozunk, méghozzá meglehetősen elvont formában. Összehasonlítunk különböző elméleti és gyakorlati költségmegosztási mechanizmusokat. Ki fog derülni, hogy nincs olyan mechanizmus, amely minden jogos követelményt kielégít. Ezért különböző körülmények között más-más mechanizmusra van szükség. [Vö. *Ruggles* (1950).]

A dolgozat hat fejezetet tartalmaz, a bevezetésen kívül. A 2. fejezet arról szól, hogy a profitot maximalizáló árak azonosak a határköltségekkel, amelyek azonban nem vezetnek nulla profithoz, azaz költségmegosztáshoz. A 3. fejezetben a határköltség-ár alapján, azt általánosítva, az ár-költségfüggvény hozzárendeléseket vizsgáljuk és ezeknek hat tulajdonságát mutatjuk be: 1. mértékegység függetlenség, 2. additivitás, 3. nem-negativitás, 4. pozitivitás, 5. homogenitás és 6. költségmegosztás. A hat közül a 2. és az 5. nem triviális: 2. többek között azt mondja ki, hogy ha külön számítjuk a tőkeköltségeket és a munkaköltségeket és az így adódó árakat összeadjuk, akkor ugyanazt az árat kapjuk, mint ami az összeg költségfüggvényhez tartozik. 5. többek között azt mondja ki, hogyha a piros autó termelése ugyanannyiba kerül, mint a kéké, akkor az árának is ugyanannyinak kell lennie. A határköltség-árrendszer az első öt tulajdonságot kielégíti, a 6-ot azonban nem. A 4. fejezetben *Billera–Heath* (1979) és *Mirman–Tauman* (1979) munkáival foglalkozunk, akik egy olyan ár-költségfüggvény hozzárendelést találtak, amelyik mind a hat követelményt kielégíti, természetesen az „optimalitási" tulajdonság nélkül. Játékelméleti analógia alapján a szerzők *Aumann–Shapley*-áraknak nevezték a fellépő árakat.

Figyelemre méltó, hogy a hat tulajdonságot csak egyetlen egy ár-költségfüggvény hozzárendelés elégíti ki. A képlet jelentése viszonylag egyszerű, a képlet a határköltségek speciális átlagolásán alapul.

Az 5. fejezetben megkíséreljük megmutatni, hogyan lehet e képletre rájönni. Itt röviden utalunk a kérdés játékelméleti hátterére is.

A 6. fejezet saját eredményemet tartalmazza: amely az előző költségfüggvény ár-hozzárendelést kiterjeszti több önálló termelő esetére.

A 7. fejezetben visszatérünk *Mirman*–*Tauman* (1979) eredményeire. Bevezetjük a keresleti függvényeket és tanulmányozzuk a kereslet-kínálat egyenlőségéből adódó egyensúlyt. *Baumol* és *Bradford* (1970) áttekintését követve röviden kitérünk a második legjobb árra, amelyet először *Ramsey* (1927) tanulmányozott. Egy fogyasztó esetén a Ramsey-árrendszer elméletileg előnyösebb az A—S egyensúlyi árnál, azonban több fogyasztó esetén az előbbi a jövedelemnek explicit bár közvetett újraelosztását foglalja magába, holott éppen ennek (közvetlen formájának) elkerülése végett alkalmazzák. Azonban még egy fogyasztó esetén is vannak olyan tulajdonságai a Ramsey-áraknak, amelyek akadályozhatják alkalmazását.

Végül figyelmeztetjük az Olvasót, hogy példáink inkább a gondolatok megértését szolgálják, mint konkrét helyzetek leírását. Éppen ezért nem kell túl szigorúan érteni őket.

2. A határköltség-árrendszer

Induljunk ki a következő feladatból: egy gazdasági egység m árut termel, $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_m$ mennyiségben, a termelés összköltsége $F(x) = F(x_1, \ldots, x_m)$. Föltesszük, hogy a termeléshez kizárólag *más* árukra, ill. szolgáltatásokra van csak szükség, melyeknek ára *adott*. Föltesszük, hogy a lehetséges termelési vektorok halmaza a $\times_{i=1}^{m} [0, c_i]$ halmaz; $F(x)$ *nemcsökkenő* függvény és mindenütt *differenciálható*.

E feltevések jól ismertek a közgazdaságtanban; korántsem olyan ártalmatlanok, mint amilyennek látszanak, ebben a dolgozatban azonban — az 5. fejezet kitérőjétől eltekintve — mindig olyan esetekre szorítkozunk, amelyekre e feltevések érvényesek.

Profit-maximalizálás

Először vizsgáljuk meg, hogy adott $p > 0$ m-dimenziós árvektor mellett milyen termelési vektor maximalizálja a bevételek és a költségek különbségét, a profitot. Képletben:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i x_i - F(x) \to \max; \quad x \geq 0\,.$$

A differenciál-számítás egyik jól ismert tétele szerint a profitmaximum *szükséges* feltétele ($\bar{x}$-szel jelölve az optimumot!)

$$p_j = \frac{\partial F}{\partial x_j}(\bar{x}) \qquad \text{ha } \bar{x}_j > 0 \tag{2.1}$$

és

$$(2.2) \qquad p_j \leq \frac{\partial F}{\partial x_j}(\bar{x}) \qquad \text{ha } \bar{x}_j = 0 .$$

Szavakban megfogalmazva: pozitív mennyiségben termelt áru ára egyenlő a *határköltséggel*, nem termelt áru ára pedig legfeljebb akkora, mint a határköltség. (Ez az eredmény kb. 100 éves!)

A továbbiakban a termelés—ár függvény helyett az inverzét, az ár—termelés függvényt vizsgáljuk.

A (2.1—2) feltétel *elégséges*, ha a költségfüggvény *konvex*: azaz két termékvektor átlagának termelési költsége nem nagyobb, mint az egyes termékvektorok termelési költségének az átlaga.

A továbbiakban fontos szerepet játszik az az eset, amikor nincsenek fix költségek:

$$(2.3) \qquad F(0) = 0.$$

Például (2.3) mellett, ha a költségfüggvény (szigorúan) konvex, akkor a profit (pozitív) nem negatív. (Szigorúan) konkáv költségfüggvény esetén viszont a profit (negatív) nem pozitív — feltéve, hogy (2.1) teljesül. Igaz, ez utóbbi *minimális* profitot ad.

Ebben a dolgozatban azonban olyan helyzeteket vizsgálunk, ahol intézményes okokból nem lehet se nyereség, se veszteség.

$$(2.4) \qquad \sum_{i=1}^{m} p_i x_i = F(x)$$

Ilyen esetben *költségmegosztásról* beszélünk. Jól ismert, hogy a határköltség-árak általában nem elégítik ki (2.4)-et. A következő fejezetben a határköltség-árakhoz *hasonló* árakat keresünk, amelyek azonban biztosítják a költségmegosztást.

3. Ár-költségfüggvény hozzárendelések

Ebben a fejezetben azt kérdezzük, hogy *adott* kínálat (kereslet) esetén az árak hogyan függjenek a költségektől; pontosabban, a költségfüggvényektől. Valóban, a határköltség-ár nem egyszerűen a költségtől függ, hanem a költségfüggvénytől, speciálisan annak differenciálhányadosától. Általában $p(F, \bar{x})$ jelöli az árvektor és a költségfüggvény közötti kapcsolatot, amelyet *ár-költségfüggvény hozzárendelésnek* nevezünk.

Az alábbiakban fölsorolunk öt olyan tulajdonságot, amellyel a határköltség-ár rendelkezik, azonban nemcsak ő rendelkezik vele. Aláhúzzuk, hogy szemléletünkben m nemcsak tetszőleges, de nem is rögzített. Pl. a 4. és az 5. tulajdonságban egyszerre tekintünk különböző m-eket.

Az ár-költségfüggvény hozzárendelések „kívánatos" tulajdonságai

Az ár-költségfüggvény hozzárendeléstől a következő tulajdonságokat várjuk.

1. *Mértékegység-függetlenség.* Tegyük föl, hogy adott termelési és érték mértékegység esetén, $\bar{x}$ termeléshez és $F(x)$ költségfüggvényhez $p(F, \bar{x})$ ár

tartozik. Ha új mértékegységekre térünk át, ahol az i-edik termék új mértékegysége λ_i-szerese a réginek, és az érték mértékegysége μ-szöröse a réginek, akkor az új költségfüggvény $\langle\lambda\rangle = \langle\lambda_i\rangle_{i=1}^m$ jelöléssel ($\lambda > 0$)

$$G(x) = \frac{1}{\mu} F(\langle\lambda\rangle x) \quad \text{minden } x\text{-re.} \tag{3.1}$$

A mértékegység-függetlenség esetén a $G(x)$ költségfüggvényhez tartozó árvektor:

$$p(G, \bar{x}) = \frac{\langle\lambda\rangle}{\mu} p(F, \langle\lambda\rangle\bar{x})\,. \tag{3.2}$$

Megjegyzés. Ez a tulajdonság nyilvánvalóan teljesül a határköltség-árrendszerre. Speciális esetben azonban könnyű más árrendszert is mutatni, ugyanezzel a tulajdonsággal.

2. *Additivitás.* Tegyük föl, hogy adott G költségfüggvény F^1 és F^2 költségfüggvények összegeként előállítható:

$$G(x) = F^1(x) + F^2(x). \tag{3.3}$$

Additivitás esetén a $G(x)$ függvényhez tartozó árvektor

$$p(G, \bar{x}) = p(F^1, \bar{x}) + p(F^2, \bar{x}). \tag{3.4}$$

Additív költségfüggvények

A legegyszerűbb esetben a költségfüggvény az egyes termékek előállítási költségfüggvényének összege:

$$F(x_1, \ldots, x_m) = F_1(x_1) + \ldots + F_m(x_m) \quad \text{minden } x\text{-re.} \tag{3.5}$$

Ekkor (2.4)-ből és (3.4)-ből ,,egyértelműen'' adódik a megoldás:

$$p_j = \frac{F_i(x_j)}{x_j} \qquad 1 \leq j \leq m\,. \tag{3.6}$$

Mit mondhatunk azonban általános esetben, amikor a költségfüggvény nem additív? A választ a 4. fejezet tartalmazza.

Könnyű gyakorlati példákat hozni az additivitás megsértésére. Például a menettérti repülőjegy ára jóval alacsonyabb, mint két egyirányú repülőjegy ára, holott az oda-, ill. visszautazás költségei nyilvánvalóan azonosak és additívak — azonos kapacitás-kihasználást feltételezve. Hasonló a helyzet az utazási és szállásköltségek kombinációjával. Mindkét esetben fogyasztási ár diszkriminációról van szó, az egyik fogyasztó többet fizet, mint a másik fogyasztó — lényegében ugyanazért a szolgáltatásért.

3. *Nem negativitás:* $p(F, \bar{x}) \geq 0$

A határköltség-ár a költségfüggvény nem csökkenő volta miatt nem-negatív: ez a tulajdonság természetesnek tűnik, hiszen ki fizet azért, hogy eladjon. Nos, a környezetszennyezés korszakában ez nem is olyan magától értetődő: a gyáraknak vagy a környezetszennyezés elhárításáért, vagy pedig a környezetszennyezésért kell fizetni, márpedig a füst és egyéb szennyeződés is ,,termék". Ettől a bonyodalomtól azonban a továbbiakban eltekintünk.

4. *Nulla költség, nulla ár*

Tegyük föl, hogy az i-edik áru termelésének volumene nincs hatással a termelési költségre:

Létezik egy olyan $G(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ költségfüggvény, hogy minden x-re:

$$F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m) = G(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)\,. \tag{3.7}$$

Ekkor

$$p_i(F, \overline{x}) = 0. \tag{3.8}$$

Megjegyzés. Ez a tulajdonság nyilvánvalóan teljesül a határköltség ár-rendszerre. A gyakorlatban azonban a feltétel nem mindig teljesül. Pl. a maximálistól távol levő kihasználás esetén az autópálya használati költsége jó közelítéssel független a felhasználók számától, egyes nyugati országokban mégis kell fizetni a használatáért. Azonban példánk nem tökéletes, hiszen ha senki sem használná az autópályát, akkor meg sem kellene építeni. E szépséghiba ellenére a kérdés releváns, sőt a mai napig megoldatlan. A megoldásnál nem lenne szabad kizárni a fix költségeket!

5. *Homogenitás*

Ezzel a névvel durván szólva azt akarjuk kifejezni, hogy költség-szempontból azonos termékek árai is azonosak.

Pontosabban: tegyük föl, hogy mind az m termék altermékek csoportja: a j-edik csoport $x_{j1}, \ldots, x_{jk_j}$ volumenű altermékekből áll. A részletezett költségfüggvény csak az aggregátumoktól függ:

$$G(x_{11}, \ldots, x_{1k_1}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mk_m}) = F\left(\sum_{i=1}^{k_1} x_{1i}, \ldots, \sum_{i=1}^{k_m} x_{mi}\right). \tag{3.9}$$

Ekkor az egyes csoportokon belül az altermékek ára azonos:

$$p_{ji}(G, \overline{X}) = p_j(F, \overline{x}) \qquad 1 \leq i \leq k_j;\ 1 \leq j \leq m\,. \tag{3.10}$$

Megjegyzés. A határköltség ár-rendszer kielégíti a homogenitási feltételt.

Inhomogén árakra gyakorlati példák tömegével találkozhatunk; a legismertebb ismét a menettérti repülőgépjegy ára. Az értelmezés most némileg eltér az additivitási példától: Két adott város közti utazáson belül két alosztályt képzünk: az egyirányú, ill. a menettérti utazásokét. Költségoldalról nyilvánvaló, hogy a menettérti utazás költsége azonos két egyirányú utazás költségével; a valóságban azonban az előbbi ára jóval alacsonyabb az utóbbiénál. Példánk azonban nem alkalmazható olyan esetekre, amikor a különböző irányú forgalomra irányuló kereslet nem független egymástól (pl. sífelvonónál a hegymenetre, és a völgymenetre).

6. *Költségmegosztás*

$$\sum_{j=1}^{m} p_j(F, \overline{x})\overline{x}_j = F(\overline{x})\,. \tag{3.11}$$

Mivel folytonos árrendszereket vizsgálunk, $\bar{x} = 0$-ra $F(0) = 0$-nak teljesülnie kell [vö. (2.3)]. A továbbiakban tehát föltesszük, hogy *nincsenek fix költségek.*

Megjegyzések. A határköltség-ár az első öt követelményt kielégíti, általában azonban nem elégíti ki a hatodik követelményt. Mint korábban említettük, szigorúan konvex költségfüggvényeknél a megfelelő profit pozitív, szigorúan konkáv költségfüggvényeknél pedig negatív. Egyetlen viszonylag általános költségfüggvény osztály ismert, amelynél a határköltség-árak kielégítik a költségmegosztási feltételt; nevezetesen, az *elsőfokú homogén függvényeké:*

$$F(\nu x) = \nu F(x) \quad \text{minden } \nu\text{-re és } x\text{-re.} \tag{3.12}$$

Ekkor egy jól ismert tétel értelmében [*Baumol* (1968), eredetileg *Wicksteed* (1894)] (3.11) teljesül a határköltség-árakra.

Milyen árrendszert alkalmaznak, ha (3.12) nem teljesül: azaz, ha a termelés arányos kiterjesztése nem arányosan növeli a költségeket?

4. Az Aumann—Shapley-árrendszer

Az előző fejezetben láttuk, hogy a határköltség-árrendszer kielégíti az első öt követelményt, azonban általában nem elégíti ki a hatodikat. Márpedig ebben a dolgozatban éppen a költségmegosztás a vizsgálat célja.

Szerencsés módon a fenti hat követelmény egyszerre kielégíthető az ún. Aumann—Shapley árrendszerrel:

$$p_j(F, \bar{x}) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_j}(t\bar{x})\,dt \qquad 1 \leq j \leq m\,. \tag{4.1}$$

Mielőtt vázolnánk a bizonyítást, érdemes szemléltetni az Aumann—Shapley-árak jelentését. Tegyük föl, hogy a kereslet a $[0, 1]$ időszak alatt lineárisan nőtt 0-ról $\bar{x}$-ra. Ekkor a t időpillanatban a j-edik termék határköltség-ára $\frac{\partial F}{\partial x_j}(t\bar{x})$, (4.1) pedig a *határköltség-árak időátlaga.* Az Aumann—Shapley-ár tehát egyfajta ötvözete a határ- és az átlagköltség-árnak.

A (4.1) formula alapján viszonylag könnyű belátni, hogy az Aumann—Shapley-árrendszer mind a hat fent említett tulajdonsággal rendelkezik. Valóban, az utolsó tulajdonság (költségmegosztás) kivételével az összes tulajdonság következik a határköltség-ár megfelelő tulajdonságaiból, ezeken az integrálás nem változtat. A 6. tulajdonság a következő összefüggésekből következik:

$$F(\bar{x}) = F(\bar{x}) - F(0) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial t}(t\bar{x})\,dt = \sum_{j=1}^{m} \bar{x}_j \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_j}(t\bar{x})\,dt\,. \tag{4.2}$$

Távolról sem ilyen egyszerű azt igazolni, hogy *csak* az Aumann—Shapley-árak elégítik ki a fenti hat követelményt. A matematikai részletek iránt közömbös olvasó nyugodtan kihagyhatja a fejezet hátralevő részét és a következő fejezetet és rögtön a 6. fejezettel folytathatja az olvasást. Itt csak utalunk a bizonyításra, az érdeklődők a teljes bizonyítást *Mirman—Tauman*

(1979) cikkében találhatják meg. Egyébként a teljes bizonyítás *Aumann–Shapley* (1974) alaptétele bizonyításának egyszerűsítése. [Lásd még *Billera* és *Heath* (1979).]

a) Először tegyük fel, hogy egy termékünk van:

Ekkor a 6. tulajdonság egymaga egyértelműen meghatározza az árat:

$$p(F, \bar{x}) = \frac{F(\bar{x})}{\bar{x}} \tag{4.3}$$

b) A $G(x) = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^l$ típusú függvények esetén a (3.9–10) homogenitási tulajdonság $m = 1$-re biztosítja az ár-költségfüggvény hozzárendelés egyértelműségét; hiszen mind a k termék ára egyenlő, ekkor a költségmegosztás megintcsak egyértelmű.

c) Az $F(x) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i x_i)^l$ költségfüggvénynél az ár-költségfüggvény hozzárendelés a mértékegység (λ) függetlenségi tulajdonság alapján egyértelműen meghatározott a b) pont alapján.

d) Az m-változós $F(x)$ polinomok az $F(0) = 0$ feltétel esetén lineáris kombinációi a c) pontbeli kifejezéseknek [*Aumann–Shapley* (1974), Lemma 7.2]. Az additivitás és a mértékegység függetlenség (μ) alapján a polinomok halmazán is egyértelműen meghatározott az ár-költségfüggvény hozzárendelés.

e) Finomabb meggondoásokkal belátható, hogy amennyiben rögzített kompakt halmazon vannak értékelve a költségfüggvények, a folytonosan differenciálható függvények halmazán a *hozzárendelés folytonos.* Mivel a folytonosan differenciálható függvények egyenletesen megközelíthetők polinomokkal, a d) pont alapján a hozzárendelés egyértelműen kiterjeszthető a folytonosan differenciálható függvények osztályára is.

5. Egy intuitív megközelítés

Ebben a fejezetben megpróbáljuk megvilágítani, hogyan lehet eljutni az Aumann–Shapley-árrendszerhez. Előbb azonban két egyszerűbb feladatot vizsgálunk meg, amelyek önmagukban is érdekesek.

a) *A Shapley-érték*

Tegyük föl, hogy valamilyen létesítmény adott termékből több fogyasztót szolgál ki egyszerre. Legyen az i-edik fogyasztó igénye y_i, $1 \leq i \leq n$. A létesítmény beruházási és üzemeltetési költsége csak az összes igénytől, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$-től függ: $F(y)$ a költségfüggvény. Föltehetjük, hogy az igények együttes kielégítési költsége nem nagyobb, mint a részigények kielégítési költségének az összege:

$$F(y) \leq F\left(\sum_{k=1}^{l} y_{i_k}\right) + F\left(y - \sum_{k=1}^{l} y_{i_k}\right), \tag{5.1}$$

ahol $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leq n$; i_k természetes szám.

Ha a költségfüggvény additív volna; azaz $F(y)=\sum_{i=1}^{n} F(y_i)$ teljesülne, akkor semmi probléma nem volna, az i-edik fogyasztó az $F(y_i)$ költségrészt fedezne. Ekkor azonban akár külön-külön is végrehajthatják a beruházást; ez az eset nem érdekes. (Vö. a 3. fej. additív költségfüggvény résszel.)

Ha létezne valamilyen „természetes" számozása a fogyasztóknak, és azt alkalmaznánk, akkor az i-edik fogyasztónak

$$F(y_1+\ldots+y_i)-F(y_1+\ldots+y_{i-1})$$

költségnövekményt kellene fedeznie.

Ilyen számozás azonban esetünkben *nem* létezik, és a különböző sorrendek különböző költségmegosztáshoz vezetnének.

Tekintsük azonban az összes lehetséges sorrendet egyforma valószínűséggel és mindegyik fogyasztó az általa *okozott költségnövekmény várható értékét fizesse.*

Például két fogyasztó esetén a fogyasztók teherviselése rendre:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\,[F(y_1+y_2)-F(y_2)+F(y_1)],\\ (5.2)\qquad &\frac{1}{2}\,[F(y_1+y_2)-F(y_1)+F(y_2)].\end{aligned}$$

Egy ilyen rendszer, amelyet *Shapley* (1953) tiszteletére *Shapley-értéknek* neveznek, a következő tulajdonságokkal rendelkezik: additív, nem-negatív és költségmegosztó. Sőt, ha két fogyasztó fogyasztása azonos, akkor a hozzájárulásuk is azonos. Nulla fogyasztás esetén nem kell fizetni.

Viszonylag egyszerű belátni, hogy e tulajdonságok egyértelműen meghatározzák a Shapley-értéket. [Vö. *Szép–Forgó* (1974), ahol az Olvasó megismerkedhet a Shapley-érték eredeti felhasználásával, a karakterisztikus függvénnyel adott kooperatív játékok értékével.]

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a Shapley-érték több termék esetén is hasonlóan definiálható, de ekkor nemcsak a fogyasztók, hanem az áruk összes lehetséges sorrendjét is figyelembe kell venni a költségnövekmények meghatározásánál. Erre a kérdésre még visszatérünk a c) alpontban. A Shapley-érték fenti alkalmazását egymástól függetlenül *Shubik* (1962), *Littlechild* (1970) és *Loehmann – Whinston* (1971) dolgozták ki.

b) *A Shapley-értékrendszerről*

Egy tetszőleges fogyasztó fogyasztásához tartozó Shapley-értéket elosztva a fogyasztással, valamilyen *egységár*-jellegű mennyiséghez jutunk, amely azonban a fogyasztástól függően változik. Ez a jelenség jól ismert a gyakorlati életből is; pl. minél többet telefonál valaki egy hónap alatt, annál kevesebbet fizet egy beszélgetésért, hiszen az előfizetői díj annál több részre oszlik. (Persze itt megint a fix-költség tér vissza!)

Természetesen nem mindig indokolható egy ilyen díjszabás. Felmerül a kérdés: mi történik, ha *nem vesszük* figyelembe, hogy egy fogyasztó, aki kétszer többet fogyaszt egy adott termékből, több (kevesebb) mint kétszer annyi többletköltséget okoz, mint egy másik fogyasztó. Vagyis ismét több terméket mérlegelve, csak az egyes termékek által okozott költségeket osztjuk el; és az egyes fogyasztók fogyasztásukkal *arányos* részt fizetnek. Részletesebben: visszatérve az előző fejezetek $F(x_1, x_2, \ldots x_m)$ költségfüggvényéhez; az i-edik termék által okozott költségnövekmény az *eredeti számozás* mellett

$$F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, 0, \ldots 0) - F(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, 0, \ldots, 0).$$

Az áruk összes lehetséges számozását egyforma valószínűséggel figyelembe véve eljutunk az *i-edik termék Shapley-értékéhez;* ezeket x_i volumennel elosztva eljutunk a Shapley-árakhoz. Új árrendszerünknél az egységár független a fogyasztás mennyiségétől, ellentétben az a) ponttal. Látszólag tehát teljesen visszatérünk az Aumann—Shapley-árakhoz, hiszen az új árrendszer mértékegység-invariáns, additív, nem-negatív, nulla költségnél nulla árat ad és költségmegosztó. „Csupán" a homogenitási tulajdonsággal van baj. Valóban, legyen két „költséghomogén" árunk:
$G(x_1, x_2) = F(x_1 + x_2)$. Ekkor az 1. áru Shapley-ára (5.2) alapján

$$\frac{1}{2x_1}[F(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) - F(\bar{x}_2) + F(\bar{x}_1)],$$

amely általában nem azonos az igazi átlagárral, ami

$$F(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)/(\bar{x}_1 + \bar{x}_2).$$

c) *Az Aumann—Shapley-árrendszer heurisztikus levezetése*

Ebben az alpontban megpróbáljuk megvilágitani, hogyan lehet rájönni az A—S képletre. [Vö. *Aumann—Shapley* (1974).]

Az egyszerűség kedvéért egy két-termékes gazdaságot vizsgálunk.

Térjünk vissza az a) alpont végén említett átlagnövekmény árhoz. Tegyük föl, hogy az első áru iránti kereslet $x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^l$, a második áru iránti kereslet pedig $x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^l$. Ha azt gondoljuk, hogy először az 1. áru iránti keresletek érkeznek meg, akkor ennek a rendezésnek a $p_1 = F(\bar{x}_1, 0)/\bar{x}_1$ átlagár felel meg.

Ha azt gondoljuk, hogy először a 2. áru iránti keresletek érkeznek meg, akkor ennek a $p_1 = [F(\bar{x}_1, \bar{x}_2) - F(0, \bar{x}_2)]/\bar{x}_1$ átlagár felel meg. Bonyolultabb a helyzet, ha az egyes termékek iránti keresletek érkezési sorrendje keveredik. Tegyük föl például, hogy felváltva érkeznek az 1. és a 2. áru iránti igények, méghozzá éppen a számozás szerinti sorrendben. $x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_1^l, x_2^l$. Ekkor az 1-es termék termelésével járó növekmény-költségeket $F(x_1^i, x_2^{i-1},) - F(x_1^{i-1}, x_2^{i-1})$ $1 \leq i \leq n$ adják, ahol $x_1^0 = x_2^0 = 0$.

Felesleges lenne az általános képletet fölírni. Tegyük föl, hogy a felosztás egyre finomabb:

$$\lim_{l} \max_{i} x_{j,l}^i = 0\,, \qquad j = 1,2\,.$$

Ekkor a nagy számok törvénye értelmében a két növekmény az esetek legnagyobb részében arányos egymással: $x_{1l}^i \sim t\bar{x}_1$ esetén $x_{2l}^i - t\bar{x}_2$, ahol a $\sim$ jel két mennyiség aszimptotikus egyenlőségét jelöli, $l \to \infty$ mellett.

Mivel a felosztás egyre finomodó, az összegek határértékben integrálhoz tartanak; mivel alkalmas t-re:

$$F(x_1^i, x_2^{i-1}) - F(x_1^{i-1}, x_2^{i-1}) \sim \frac{\partial F}{\partial x_1}(t\bar{x})\,\bar{x}_1\,dt + \frac{\partial F}{\partial x_2}(t\bar{x})\,\bar{x}_2\,dt\,,$$

az A–S képletet „levezettük".

6. Aumann—Shapley-árak több termelő esetén

Ebben a fejezetben (amely saját eredményeimet tartalmazza) általánosítjuk a 4. fejezet eredményeit egy termelőről több termelőre.

Legyen a termelők jele $k = 1, 2, \ldots, q$. Legyen x^k a k-adik termelő termelése és $F^k(x^k)$ a megfelelő költségfüggvény.

$$\sum_{k=1}^{q} x^k = \bar{x} \tag{6.1}$$

Két megoldás lehetséges, aszerint, hogy a termelők között a) van vagy b) nincs jövedelem-átcsoportosítás.

a) *A termelők között (tetszőleges) jövedelem-átcsoportosítás lehetséges*

Tegyük föl, hogy létezik egy központ, amelyik tetszőleges $\bar{x}$ kereslet esetén úgy határozza meg az egyes termelők termelését, hogy az összköltséget minimalizálja.

$$F(x) = \min\left\{\sum_{k=1}^{q} F^k(x^k)\,,\ \sum_{k=1}^{q} x^k = \bar{x}\,;\ x^k \geq 0,\ k = \overline{1, q}\right\}. \tag{6.2}$$

Föltesszük, hogy a feladat megoldható.

Az $F(x)$ összköltségfüggvény — amennyiben folytonosan differenciálható — egyértelműen meghatározza az Aumann–Shapley-árakat.

Ennél a megoldásnál az egyes termelők bevételei és kiadásai azonban általában nem egyeznek meg; egyes termelőket támogatásban kell részesíteni, másokat pedig meg kell adóztatni; a veszteséget, ill. a nyereséget eltüntetendő.

Jól ismertek a jövedelem-átcsoportosításokkal járó veszélyek: a veszteséges termelők elvesztik érdekeltségüket saját költségeik minimalizálásában, hiszen a veszteséget úgyis fedezi a központ. A nyereséges termelők közömbössége hasonló, bár ellenkező előjelű okból fakad: a nyereséget úgyis elveszi a központ. A valóságban tehát a jövedelem-átcsoportosításnak szigorú határai vannak. Az egyszerűség kedvéért a következőkben az előzővel szélsőségesen ellenkező esetet vizsgáljuk.

b) *A termelők között nem lehetséges jövedelem-átcsoportosítás*

Ekkor minden termelőnél a bevételek és a kiadások egyeznek, tehát minden termelő a saját termelésének és költségfüggvényének megfelelő A–S árat számítja föl a fogyasztóinak: ha tetszőlegesen választják meg az egyes termelők saját termelési vektorukat, akkor az egyes áruk A–S ára más és más lesz, a termelőktől függően. Modellünkben azonban minden pozitív mennyiségben termelt áru ára független kell hogy legyen a termelőtől:

Léteznie kell tehát egy $\overline{p}$ vektornak, amelyre

$$\overline{p}_j = p_j(F^k, x^k) \quad \text{ha } x_j^k > 0 \quad 1 \leq j \leq n \tag{6.3}$$

és

$$\overline{p}_j \leq p_j(F^k, x^k) \quad \text{ha } x_j^k = 0 \quad 1 \leq k \leq q. \tag{6.4}$$

Valóban, ha (6.4) nem teljesülne, akkor $x_j^k = 0$-t kicsit növelve (6.4) ellentéte továbbra is érvényben maradna, azaz a k-adik termelő olcsóbban termelhetne, mint a ,,többi'', mégsem termel. Ugyanakkor szigorú egyenlőtlenség könnyen előfordulhat (6.4)-ben, hiszen x_j^k növelésével a k-adik termelő ára továbbra is a ,,többi'' ár fölött marad.

Belátható, hogy folytonosan differenciálható F^k költségfüggvények esetén ($k = 1, 2, \ldots, q$) létezik legalább egy olyan $\overline{p}$ árvektor és $x^1, x^2, \ldots, x^q$ termelési kombináció, amely kielégíti (6.1)-et.

Általában több ilyen kombináció létezik; az a) pont szellemében a minimális költségű kombinációt kell választani, ahol a költséget a

$$\sum_{k=1}^{q} p^k(F^k, x^k) = \overline{p}\,\overline{x}$$

kifejezés adja. Persze, csalóka lehet a költségösszehasonlítás különböző árak mellett!

A bizonyítás gondolata

A bizonyítás indukciós, itt csak a kezdő lépést ismertetjük, amikor $n = 1$, $q = 2$ (egy áru, két termelő). Tekintsük a $p(F^1, x^1)$ és $p(F^2, \overline{x} - x^1)$ egyváltozós skalárértékű folytonos függvényeket a $0 \leq x^1 \leq \overline{x}$ intervallumon. A következő eseteket különböztetjük meg:

(i) $p(F^1, 0) \geq p(F^2, \overline{x})$,
(ii) $p(F^1, \overline{x}) \leq p(F^2, 0)$,
(iii) $p(F^1, 0) < p(F^2, \overline{x})$ és $p(F^1, \overline{x}) > p(F^2, 0)$.

Az (i) esetben $x^1 = 0$, $x^2 = \overline{x}$ és $\overline{p} = p(F^2, \overline{x})$, a (ii) esetben $x^1 = \overline{x}$, $x^2 = 0$ és $\overline{p} = p(F^1, \overline{x})$. A (iii) esetben Weierstrass tétele értelmében van egy olyan $x^1 \in (0, \overline{x})$, amelyre $p(F^1, x^1) = p(F^2, \overline{x} - x^1)$, azaz $(x^1, \overline{x} - x^1)$ a megfelelő pár.

Megjegyzés. Jól ismert, hogy profit-maximalizálás esetén minden termelőnek ugyanazt a határköltséget kell elérnie. Az optimalizálás decentralizálható, *feltéve*, hogy csökkenő hozadékokról van szó, amikor is a profitok pozitívok.

7. Az Aumann—Shapley egyensúlyi árvektor és viszonya a Ramsey-árvektorhoz

Ez a fejezet teljes egészében *Mirman–Tauman* (1979) dolgozatán alapul.

Az előző öt fejezetben adott kínálat esetén vizsgáltuk a költségek és az árak kapcsolatát. Ebben a fejezetben (amely egyben zárófejezete is a dolgozatnak), bekapcsoljuk a keresleti oldalt is.

Az A—S egyensúlyi ár

Föltesszük, hogy a fogyasztók száma l. Az i-edik fogyasztó hasznosságfüggvénye $u^i(x^i)$, amely a C_i fogyasztási halmazon van értelmezve, és az i-edik fogyasztó kiinduló gazdagsága a^i (pénzegység). Az általános egyensúlyelmélet rendszerét követve föltesszük, hogy adott p árvektor mellett minden fogyasztó maximalizálja saját hasznossági függvényét a pénztári egyensúly feltétele mellett:

Legyen a maximum-hely egyértelmű; $\psi^i(p)$ $1 \leq i \leq l$:

(7.1) $$u^i(\psi^i(p)) > u^i(x^i)$$

feltéve, hogy

(7.2) $$px^i \leq a^i\,; \quad x^i \in C^i \subset R^m_+.$$

Az általános egyensúlyelmélet szokásos feltevései mellett belátható, hogy létezik legalább egy olyan $\bar{p}$ árvektor, amely által meghatározott $\psi(\bar{p}) = \sum_{i=1}^{l} \psi^i(\bar{p})$ társadalmi keresletnél az A—S árvektor azonos p-vel:

(7.3) $$\bar{p} = p[F, \psi(\bar{p})].$$

Az ilyen tulajdonságú árvektor(oka)t *A—S egyensúlyi árvektor(ok)*nak nevezzük.

Megjegyezzük, hogy *Billera—Heath—Raanan* (1978) elhanyagolták az egyensúlyi feltételeket és az általuk javasolt A—S árvektort a tényleges árakon kialakult kereslet mellett számították ki. Ezt az egyszerűsítéssel járó következetlenséget azzal próbálták ellensúlyozni, hogy az A—S áraknál várhatóan fellépő keresletnél kisebb kiinduló kereslettel dolgoztak, tehát a növekvő hozadékok miatt némi profit volt várható.

A Ramsey-árvektor

Mint a Bevezetésben már említettük, a költségmegosztásnak hatalmas irodalma van, és az A—S egyensúlyi árvektor feltalálása előtt a közgazdászok szinte egyöntetűen az ún. Ramsey-árakat ajánlották. Nem meglepő tehát, hogy Mirman és Tauman előadásaik után mindig szembetalálkoztak azzal a kérdéssel: mi az A—S egyensúlyi árvektor viszonya a Ramsey-árvektorhoz, mi szükség van az előbbire, amikor az utóbbi — bár nem a legjobb ár — a második legjobb ár.

Mielőtt megmondanánk, mi a Ramsey-árvektor, mi a második legjobb ár, utalunk arra, hogy mi a legjobb árrendszer. „Természetesen" a határköltség-árrendszer. Valóban, a 2. fejezet értelmében tetszőleges fogyasztási hasznosságfüggvények esetén teljesülnie kell az ár-határköltség egyenlőségnek; azonban a költségmegosztási feltétel nem teljesül. Természetesen a profitok vagy veszteségek valamilyen formában a fogyasztók kezdő gazdagságát növelik, ill. csökkentik.

Tehát az optimum megvalósítása adóztatást igényel, méghozzá nem arányos, hanem egyszeri adó (lump sum tax) formájában.

A fogyasztók közötti közvetlen jövedelem-átcsoportosítás azonban hasonló buktatókkal jár, mint a termelőknél. A kiutat általában az ún. *társadalmi* *jóléti függvényben* szokás keresni, ahol a jóléti függvény az egyes fogyasztók fogyasztásaitól függ, azonban nem egyszerűen az összegüktől!

(7.4) $$w(x^1, x^2, \ldots, x^l).$$

Most a keresleti függvények nem az egyes hasznossági függvényekből származnak, hanem a közös jóléti függvényből: különbséget teendő, most $\tilde{\psi}^i(p)$-vel jelöljük az új egyéni keresleti függvényeket, a társadalmit pedig $\tilde{\psi}(p)$-vel. Az indirekt jóléti függvény $z(p) = w[\tilde{\psi}^1(p), \ldots, \tilde{\psi}^l(p)]$.

A közvetlen jövedelem-átcsoportosítás elkerülése végett vissza kell térnünk a (2.4) költségmegosztási feltételhez.

(7.6) $$\Pi(p) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j(p) - F[x(p)], \text{ ahol } x(p) = \sum_{i=1}^{l} x^i(p).$$

Definíció

A Ramsey-árvektor, $\tilde{p}$; a $z(p)$ indirekt hasznossági függvényt a $\Pi(p) = 0$ feltétel mellett maximalizálja.

Mielőtt ismertetnénk a Ramsey-árvektor kiszámítását *Baumol–Bradford* (1970) alapján, hadd húzzuk alá, hogy különböző jóléti függvények általában különböző elosztáshoz vezetnek; közvetlen jövedelem-átcsoportosítás helyett *közvetettet* kaptunk. Nem célunk választani két „rossz" között, csak a jövedelem-újraelosztás fennmaradását emeljük ki – ellentétben az A–S egyensúlyi árvektorral.

Jól ismert tétel szerint a maximum szükséges feltétele

(7.7) $$\frac{\partial z}{\partial p_j} = \lambda \frac{\partial \Pi}{\partial p_j} \qquad 1 \leq j \leq m.$$

Belátható, hogy tetszőleges $z(p)$ függvény esetén $\dfrac{\partial z}{\partial p_j} = -\mu x_j$, ahol μ pozitív skalár, tehát (7.6) helyett $-x_j = \dfrac{\lambda \partial \Pi}{\mu \partial p_j}$ írható.

Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy az összes kereslet-ár keresztrugalmasság nulla:

(7.8) $$\frac{\partial x_i}{\partial p_j}(p) = 0 \qquad i \neq j.$$

Jelölje továbbá $E_j = -\dfrac{dx_j}{dp_j} \cdot \dfrac{p_j}{x_j}$ a j-edik termék saját kereslet-árrugalmasságát. Viszonylag egyszerű számolással belátható, hogy (7.7) ekvivalens a következő feltétellel:

(7.9) $$\tilde{p}_j = \frac{\left.\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(x_j)\right|_{x_j = \tilde{\psi}_j(\tilde{p}_j)}}{1 - \dfrac{\nu}{E_j}} \qquad 1 \leq j \leq N,$$

ahol a ν skalár a (2.4) feltételből meghatározható.

Mivel $x_j = \tilde{\psi}_j(p_j)$ és $E_j = E_j(p_j)$, (7.9) egy olyan nem-lineáris implicit egyenletrendszer, amelyet meglehetősen nehéz megoldani.

Bár az egyes egyenletek látszólag függetlenek egymástól, ν meghatározása — a költségmegosztási feltételen keresztül — összeköti őket. Semmi sem biztosítja a megoldás egyértelműségét, sem pedig a pozitivitását.

Összehasonlítás

Mivel több különböző fogyasztó esetén a Ramsey-árrendszer egy egész sereg megoldást ad — az alkalmazott jóléti függvénytől függően — célszerű az összehasonlításnál egy fogyasztó esetére szorítkozni. Ekkor (de csak ekkor) a Ramsey egyensúlyi árrendszer logikusabbnak tűnik, mint az A—S egyensúlyi rendszer. Azonban még ekkor is fellelhetők kifogásolható tulajdonságok.

a) *Költség-átcsoportosítás*

Tegyük föl, hogy költségfüggvényünk additív: pl. $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$. Ekkor a 3. tulajdonság (additivitás) és a 6. tulajdonság (költségmegosztás) alapján az A—S ár-költségfüggvény hozzárendelés azonnal meghatározható: $p(F, \bar{x}) = (\bar{x}_1, 1)$.

Legyen a fogyasztói hasznosságfüggvény Cobb—Douglas-alakú: $u(x_1, x_2) = x_1^r \cdot x_2^s$; $(r, s > 0)$. Ekkor egyszerű számolással levezethető a keresletfüggvény [vö. (7.1)—(7.2)]:

$$\psi(p) = \left[\frac{s}{r+s}\frac{a}{p_1};\quad \frac{r}{r+s}\frac{a}{p_2}\right].$$

(7.3)-ba helyettesítve adódik az A—S egyensúly:

$$\bar{p} = \left[\frac{s}{r+s},\ 1\right]. \tag{7.10}$$

A Ramsey-árakat nem lehet explicite meghatározni, mert a (7.9) egyenletrendszer negyedfokú egyenlethez vezet. Elégedjünk meg itt ennek bemutatásával, hogy a Ramsey-árvektor különbözik az egyensúlyi A—S árvektortól. Valóban, speciális keresleti függvényünk mellett $E_1 = E_2 = 1$; speciális költségfüggvényünk mellett

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x) = 2x_1 \text{ és } \frac{\partial F}{\partial x_2}(x) = 1, \text{ tehát (7.9) szerint:}$$

$$\tilde{p}_1 = \frac{2\cdot\dfrac{s}{r+s}\dfrac{a}{p_1}}{1-\nu},\quad \tilde{p}_2 = \frac{1}{1-\nu}. \tag{7.11}$$

Ha a két árvektor azonos lenne, akkor (7.10)—(7.11) összehasonlításából $\nu = -1$, ill. $\nu = 0$ adódna, és ez ellentmondás.

Tehát a Ramsey-árak alkalmazása még additív költségfüggvény esetén is az egyik termék költségének egy részét a másik termék költségtöbbletéből fedezi: $\tilde{p}_1 < \bar{p}_1$ és $\tilde{p}_2 > \bar{p}_2$. Az ilyen költség-átcsoportosítás tényleg hasznos lehet, azonban intézményes akadályai lehetnek.

Kuriózumként említjük meg *Hotelling* (1938) ötletét, miszerint a határköltségeken alapuló, általa javasolt közlekedési stb. díjszabásokból fakadó veszteséget pl. a luxus villák fokozott adóztatásából fedezzék. Eltekintve a gyakorlati akadályoktól, nem tudnám megmondani, hogy mi az a nagy különbség az egyenes adóztatás és a közvetett adóztatás fenti válfaja között.

b) *Költségben inhomogén árak*

Erre a pontra nem hozunk példát. Csak annyit jegyzünk meg, hogy az 5. tulajdonság feltevése (költség homogenitás) esetén az A—S-árak azonosak. Mivel a határköltség-árak is azonosak, amennyiben a kereslet-rugalmasságok is szerephez jutnak, ($\nu \neq 0$) és egymástól eltérőek, akkor a Ramsey-árak nem azonosak egymással, következésképpen *eltérnek* az A—S áraktól. Esetenként az ár-különbségeket nehéz megvédeni.

* * *

A dolgozat végére érve szeretnék kitérni e dolgozat keletkezésének körülményeire. Az 1978/79. akadémiai évet a CORE-ban (Belgium) töltöttem, ahol egy szemináriumon Billera beszámolt arról, hogyan alkalmazta munkatársaival együtt az atommentes játékok elméletét egy egyetemi telefonközpont díjszabásának kidolgozására. Ők azonban csak a kínálati oldalt vizsgálták. Két kollégám, *Mirman* és *Tauman*, hamarosan bekapcsolták a keresleti oldalt és egyensúlyi eredményeket kaptak. Egy beszélgetés során felhívtam a szerzők figyelmét arra, hogy jó lenne feltevéseiket a játékelméleti eszköztár nélkül megfogalmazni. (Ezzel szinte egyidőben Scarf professzor ugyanezt a kérdést tette föl Billerának.) Mirman és Tauman hamarosan kidolgozták az axiomatikus részt (itt 4. fejezet), akárcsak Billera és Heath — tőlük függetlenül. A következőkben én a több termelő esetén fellépő kérdéseket vizsgáltam és sokat beszélgettem a szerzőkkel a Ramsey-árakhoz való viszonyról. Elhatároztam, hogy a magyar olvasó számára hozzáférhetővé teszem ezeket az izgalmas elméleti újdonságokat, anélkül, hogy elmerülnék a részletekben. Ez a dolgozat tehát — kivéve az 5. és 6. fejezetet — leegyszerűsítése (nem egyszerűsítése!) Mirman—Tauman dolgozatának. Köszönetet mondok L. Mirmannek és Y. Taumannak, hogy hozzájárultak eredményeik közléséhez. Köszönet illeti Bod Pétert, Bródy Andrást, Forgó Ferencet, Lackó Máriát és Molnár Györgyöt az értelemzavaró hibák feltárásáért. Természetesen semmilyen felelősség nem terheli a felsoroltakat a cikkben foglaltakért.

(Beérkezett: 1980. január 17-én)

IRODALOM

Aumann, R. J. and Shapley, L. S. (1974): Values of Non-Atomic Games, Princeton. Princeton University Press.

Baumol, W. J. (1968): Közgazdaságtan és operációanalízis. Budapest. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

Baumol, W. J. and Bradford, D. F. (1970): Optimal Departures from Marginal Cost Princing. American Economic Review, 60, 265—283.

BILLERA, L. J., HEATH, D. C. and RAANAN, J. (1978): Internal Telephone Billing Rates — A Novel Application of Non-Atomic Games. Operations Research 26:6, 956—965.
BILLERA, L. J. and HEATH, D. C. (1979): A Unique Procedure for Efficient Allocation of Shared Costs. Technical Report 430, School of Operations Research and Industrial Engineering. Ithaca. Cornell University.
BOITEUX, M. (1956): Sur le gestion des Monopoles Publiques asreints à l'equilibre budgetaire. Econometrica 24:1, 22—40.
DRÉZE, J. (1964): Postwar Contributions of French Economists, American Economic Review 54
HOTELLING, H. (1938): The General Welfare in Relation to Problems of Taxation and of Railway and Utility Rates. Econometrica 6, 242—264.
LITTLECHILD, S. C. (1970): A Game Theoretic Approach to Public Utility Pricing. Western Economic Journal, 8, 162—166.
LOEHMANN, E. T.—WHINSTON, A. B. (1971): A New Theory of Princing and Decision Making for Public Investment. Bell Journal of Economics 2, 606—625.
MIRMAN, L. and TAUMAN, Y. (1979): Incentive Compatible Equitable Cost Sharing. CORE Discussion Paper 7930 Louvain-la-Neuve.
RAMSEY, F. (1927): A Contribution to the Theory of Taxation. Economic Journal 37, 47—61.
RUGGLES, N. (1950): Recent Developments in the Theory of Marginal Cost Pricing. Review of Economic Studies 17, 107—126.
SKAPLEY, L. S. (1953): A Value for N-person Games. In Advances in Game Theory. Annals of Mathematical Studies. No. 52. Princeton. Prince-University Press.
SHUBIK, M. (1962): Incentives, Decentralized Control, the Assignement of Joint Costs and Internal Pricing. Management Science, 8, 325—343.
SZÉP, J. és FORGÓ, F. (1974): Bevezetés a játékelméletbe. Budapest. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
WICKSTEED, PH. (1894): The Coordination of the Laws of Distribution. London. Mc. Millan.

ON THE THEORY OF COST SHARING

The present study discusses the question of cost sharing following Mirman—Tauman (1979). Let an m-dimensional vector x be formed from the quantities of products and services produced by an economic unit and $F(x)$ be the cost function. Under adequate conditions the traditional theory suggests to equate prices of individual products with marginal costs. This proposition is, however, inapplicable if institutional causes exclude the profits (or losses): e.g. telephone networks, railways and other public utilities. Nevertheless, marginal-cost prices are known to have five attractive properties which are expected to be fulfilled when assigning other price-cost functions:

1. its independence of the unit of measurement [(3.1—2); 2. additivity [(3.3—4)]; 3. non-negativity; 4. positivity [(3.7—8)] and 5. homogeneity [(3.9—10)]. The main finding of Mirman—Tauman is as follows:

Under the conditions of zero profit (cost sharing) there exists a unique price-cost function which satisfies the five preconditions above: the Auman—Shapley (1974) prices (4.1) which are special averages of marginal costs.

In the further part of the paper the case of more than one producer is discussed as well as the correspondence of supply and demand and the relation to Ramsey prices.

О ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗДЕРЖЕК

В настойщей статье рассматривается вопрос распределения издержек по Мирману—Тауману (1979). Пусть будет х вектор т-ого порядка, составленный из величин выпушенной продукции и услуги одной хозяйственной единицы и F (x) функция затрат. При соответствующих условиях традиционная теория предполагает приравнивать цены отдельных продуктов предельным затратам. Однако это предложение не применимо, если организационные причины исключают формирование прибыли (или убытков): например телефонная сеть, железная дорога и прочие коммунальные услуги. Однако известны пять

привлекательных качеств этих цен — предельных затрат — и их выполнение ожидается в случае других функций цен-затрат также:

1. Независимость от единицы измерения (3.1—2), 2. аддитивность (3.3—4), 3. не отрицательность, 4. положительность (3.7—8) и 5. однородность. Главный результат Мирмана—Таумана (1979):

При условиях нулевой прибыли (распределения затрат) существует одна и только одна функция цены-затрат, которая удовлетворяет вышеупомянутым качествам: цены Аумана—Шепли (1974) (4.1) которые являются специальными средними предельных затрат.

В дальнейшем обсуждается случай, где существуют несколько производителей, а также соответствие спроса и предложения и отношение к ценам Рэмси.