

## A Klein – I. modell a posteriori elemzése\*

## Bevezetés

A cikk a Klein-I. modell (Klein, 1950) teljes információn alapuló elemzését mutatja be, mely olyan a priori eloszláson alapul, amely elhagyja a közgazdasági szempontból érdekes paraméterekre vonatkozó „rossz” előjeleket. Az elemzés egzakt abban az értelemben, hogy semmiféle nagy mintán alapuló közelítést<sup>1</sup> nem alkalmaz.

A cikk egy nagyobb kutatási terv részét képezi, mely a szimultán lineáris egyenletrendszernek a Bayes-féle teljes információn alapuló elemzésével foglalkozik. Célunk az, hogy olyan módszereket dolgozzunk ki, melyek számítási szempontból hatékonyak, annyira, hogy velük legalábbis közepes mértékű ökonometriai modellek kezelhetők legyenek<sup>2</sup> s amelyek elég rugalmasak, hogy a közgazdasági szempontból fontos paraméterekre vonatkozóan a lehetséges a priori eloszlások nagy halmazát vegyék figyelembe.<sup>3</sup> Ez utóbbi követelmény miatt kell numerikus integráló módszert alkalmaznunk.

Első cikkünkben (Kloek—Van Dijk, 1978) a feltételezéseinkből következő numerikus integrálási feladatok kezelésére a Monte-Carlo-módszert javasoltuk. Az ott bemutatott példában háromdimenziós feladatot kellett megoldanunk. A Klein-modell esetében kilencdimenziós numerikus integrálási feladatot oldunk meg.

A javasolt Monte-Carlo-módszer sikeres alkalmazásának alapvető feltétele, hogy jó súlyfüggvényt találjunk, azaz olyan, a Monte-Carlo-módszerhez megfelelő tulajdonságokkal rendelkező sűrűségfüggvényt, amely elfogadhatóan közelíti az a posteriori sűrűségfüggvényt.

Az előzetes optimalizáló eljárások alapján megállapítottuk, hogy a Klein-I. modellre adott informatív a priori eloszlás esetén sem a teljes információn alapuló maximum likelihood becslések (FIML), sem a fontos<sup>4</sup> strukturális

\* A tanulmány előző változatát (Van Dijk—Kloek, 1977a) az 1977 októberében Madisonban (Wisconsin) a Bayes-féle következtetés az ökonometriában témáról tartott 15. NBER/NSF szemináriumon, valamint az 1977 szeptemberében rendezett ESEM ülésen adtuk elő. Számos résztvevőnek tartozunk köszönettel a hasznos megjegyzéséért. Fordította Kelemen Katalin.

<sup>1</sup> Eltérően Rothenbergtől (1973). A szimultán egyenletek dinamikus viselkedésére és stabilitási jellemzőire vonatkozó klasszikus elemzés is általában aszimptotikusan érvényes eredményeket hoz (Goldberger—Nagar—Odeh, 1961; Theil—Boot, 1962; Dhrymes, 1973; Oberhofer—Kmenta, 1973; Schmidt, 1973; Gill—Brissimis, 1978).

<sup>2</sup> Mely a numerikus integrálás standard módszereivel nem lehetséges (Morales, 1971).

<sup>3</sup> Ellentétben Harkemaval (1971).

<sup>4</sup> Azaz az összes strukturális paraméter, a konstansok, a pontosan ismert paraméterek (melyek vagy 0-k vagy egységre normáltak) és a látens változók varianciái és kovarianciái kivételével.

paraméterek (amelyek egy nagyon nagy tartományon egyenletes a priori eloszlásúak) együttes a posteriori peremeloszlásának módusza nem alkalmas az a posteriori strukturális momentumok közelítésére. Így ezek nem használhatók fel súlyfüggvény kialakítására.

A feladat megoldására (első lépésként) egy közelítő eljárást mutatunk be. Az alap gondolat az, hogy a koncentrált likelihood függvény felületének *csúcán*<sup>5</sup> mozdulunk el az *a priori* valószínű értékeket tartalmazó tartomány belsejébe. Itt felhasználjuk a mintán alapuló, közelítően normális a priori információt (azaz *adatokon alapuló* a priori információt). Az eredmények lehetővé teszik, hogy olyan súlyfüggvényt alakítsunk ki, mely jól közelíti az a posteriori sűrűségfüggvényt s mellyel végrehajtható a Klein-I. modell a posteriori elemzése. Hangsúlyoznunk kell, hogy végső eredményünk független ettől a közbülső lépéstől. Ezt csupán a számítások hatékonysága miatt alkalmazzuk.

Így a cikk célja kettős: (i) bemutatjuk és értékeljük elemzésünk eredményeit; (ii) ismertetjük, hogyan oldottuk meg a jó súlyfüggvény kialakításának problémáját.

A cikk felépítése a következő: A 2. fejezet az előzetes feltételezésekkel foglalkozik, így a modell specifikációjával, az a priori információkkal és az előző cikkünk néhány eredményével. A 3. fejezet az a posteriori értékek közelítésére vonatkozó eredményeket tartalmazza. A Klein-I. modell a posteriori eredményeit a 4. és 5. fejezet elemzi, az előbbi a strukturális paraméterekkel, az utóbbi a multiplikátorokkal és a stabilitási jellemzőkkel foglalkozik. A 6. fejezet következtetéseinket tartalmazza. Az A, B és C függelék a korlátozásokkal alkalmazott maximum likelihood becslés néhány részletét, az a posteriori sűrűségfüggvény közelítését, ill. a számítások pontosságának becslését tartalmazza.

## 2. A modell, a likelihood és az a priori információ

Az ökonometriai modell megegyezik az előző cikkünkben leírt modellel. A lényege megtalálható a *Kloek—Van Dijk* (1978, 2. fejezet), részletesebben a *Van Dijk—Kloek* (1977b, 2. fejezet) cikkekben, s a következőképp összegezhető. Kiindulópontunk a jól ismert szimultán lineáris egyenletrendszer, normális eloszlású látens változókkal, melyek kovariancia mátrixa  $\Sigma$ . A  $\Sigma$  a priori sűrűségfüggvénye arányos a  $|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}(G+1)$  értékkel, ahol  $G$  a szto-

chasztikus egyenletek száma<sup>6</sup> és a szabad konstansok ( $\beta_0$ ) a priori eloszlása egyenletes úgy, hogy a  $\Sigma$  és a szabad konstansok szerinti analitikus integrálás lehetséges. A pontosan ismert (rendszerint az identifikálhatóságot biztosító 0

<sup>5</sup> A „csúc” kifejezést olyan értelemben használjuk, ahogyan a numerikus optimalizálással foglalkozó könyvek, mint pl. *Himmelblau* (1972, 83. o.). Ez nem azonos az egyes szerzők által a regresszió kifejezésben használt értelmezéssel.

<sup>6</sup> A fenti, a  $\Sigma$ -ra vonatkozó a priori sűrűségfüggvényt gyakran kevés a priori információt tartalmazónak tartják (lásd pl. *Zellner*, 1971). Számos más a priori sűrűségfüggvény létezik, mely a  $|\Sigma|$  kitevőjének értékében különbözik egymástól. E cikk előző változatában (*Van Dijk—Kloek*, 1977a) kísérleteztünk néhány ilyen a priori sűrűségfüggvénnyel. Az eredményeket kérésre rendelkezésre bocsátjuk. Elhatároztuk azonban, hogy a  $\theta$ -ra, a közgazdasági szempontból közvetlenül érdekes paramétereket tartalmazó vektorra vonatkozó a priori információkra koncentrálnunk.

és egységre normált) paramétereket behelyettesítjük és a többi paramétert a  $\Theta$  vektorban foglaljuk össze.

A  $\Theta$  elemei (az úgynevezett érdekes paraméterek) rendszerint közgazdaságilag interpretálhatók, pl. a fogyasztási határhajlandóság, a tőkenövekedési koefficiens. Még egy kis a priori információt akarunk adni ezekre a paraméterekre vonatkozóan, amennyiben a likelihood információ elméletileg valószínű módon informatív, de mi ki akarjuk zárni annak a lehetőségét, hogy a paraméterek „rossz” előjelet vegyenek fel. Pl. a priori nem hisszük, hogy az aktuális profit rövidtávú hatása a fogyasztási és beruházási kiadásokra negatív. Az egység intervallumot a priori valószínűnek tekintjük a Klein-I. modell érdekes paramétereire vonatkozóan, lásd e fejezet végét.<sup>7</sup>

A  $(\Theta, \beta_0, \Sigma)$  a posteriori sűrűségfüggvényét úgy kapjuk, hogy a Bayes-tétel segítségével egyesítjük a szimultán lineáris egyenletrendszer likelihood függvényét és az a priori sűrűségfüggvényt. A  $\Sigma$  és  $\beta_0$  szerint analitikusan integrálva kapjuk a  $\Theta$  a posteriori, a  $\Sigma$ -ra és  $\beta_0$ -ra vonatkozó peremsűrűségfüggvényét:

$$\alpha(\Theta; Y, X) \propto ((\Gamma)(n)\Sigma) - \frac{1}{2}(n-1) \quad (1)$$

formában,<sup>8</sup> ahol  $Y$  és  $X$  az endogén, ill. a predeterminált változók megfigyelés-mátrixai. A  $|\Gamma|$  determináns, a  $\Theta$  függvénye, a szimultán lineáris egyenletrendszer jól ismert Jacobi determinánsa és  $\Sigma$  a strukturális egyenletrendszer látens változóinak („becsült”) kovariancia mátrixa, adott  $\Theta$ -ra. A szimultán lineáris egyenletrendszer koncentrált likelihood függvénye csak a második tényező kitevőjében különbözik az (1) kappa-függvénytől, mely koncentrált likelihood függvény esetében  $-n/2$ . A szabad konstansok vektora szerinti integrálás következtében eggyel csökken a szabadságfok; lásd Drèze (1976). Ahogy a mintanagyság nő, a kappa-függvény és a koncentrált likelihood függvény közötti különbség elhanyagolhatóvá válik, de kis minták esetében jelentős lehet; vesd össze Van Dijk-Kloek (1977a, 4. fejezet).

A következőkben bemutatjuk az egzakt korlátozásokat. A Klein-I. modellt használjuk, melynek strukturális egyenletrendszere a következő:

$$\begin{aligned} C &= \alpha_1 P + \alpha_2 P_{-1} + \alpha_3 W + \alpha_4 + u_1 \\ I &= \beta_1 P + \beta_2 P_{-1} - \beta_3 K_{-1} + \beta_4 + u_2 \\ W_1 &= \gamma_1 X + \gamma_2 X_{-1} + \gamma_3 t + \gamma_4 + u_3 \\ X &= C + I + G \\ P &= X - W_1 - T \\ K &= K_{-1} + I \\ W &= W_1 + W_2 \end{aligned} \quad (2)$$

A fogyasztási kiadások ( $C$ ) függenek a profittól ( $P$ ), az egy periódussal korábbi profittól ( $P_{-1}$ ) és az összes bértől ( $W$ ). A nettó beruházási kiadások ( $I$ ) a pro-

<sup>7</sup> Az egység intervallumon a  $[0, 1]$  intervallumot értjük, az egységtartományon pedig az egység intervallumok Descartes szorzatát.

<sup>8</sup> Részletesebben lásd Van Dijk-Kloek (1977b).

fittól, a késleltetett profittól és az egy periódussal korábbi tőkeállománytól<sup>9</sup> függnék. Végül a magánszektorban kifizetett munkabérosszeg ( $W_1$ ) a magán-szektor piaci áron számított nettó termelésétől ( $X$ ), ugyanezen változó késleltetett értékétől ( $X_{-1}$ ) és egy időtényezőtől ( $t$ ) függ. A modell négy azonossággal zárul. A magánszektor termelésének három felhasználási iránya van: a fogyasztási kiadások, a beruházási kiadások és az állam nem-bérjellegű kiadásai ( $G$ ). A magánszektor nyereség és veszteség elszámolása a profitot, mint a magán-szektor nettó termelése és az egyéni munkabérfjövédelmek ( $W_1$ ), valamint a forgalmi adók ( $T$ ) összege közti különbséget határozza meg. A tőkeállományt és az összes bért természetesen definiáljuk;  $W_2$  az állami szektorban kifizetett munkabérosszeg. A modell 7 endogén változót ( $C, I, W_1, X, P, K, W$ ) és 8 predeterminált változót ( $1, P_{-1}, X_{-1}, K_{-1}, G, T, W_2, t$ ) tartalmaz, a változókat (az  $I$  és a  $t$  kivételével) változatlan dollárban mérve. Részletesebb magyarázat<sup>10</sup> Klein (1950) művében található.

A  $\Theta'$  paraméter-vektor a következő  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ . A priori információink szerint e vektor egyenletes eloszlású a kilencedimenziós egység-tartományon. Vitathatatlan, hogy gyakran jóval több információ is rendelkezésre áll, pl. a gazdasági változók arányára vonatkozó történeti vagy külső információk. A Kloek—Van Dijk (1978) cikkben felhasználtunk ilyen információkat.

Itt az volt a szándékunk, hogy megmutassuk, milyen erőhatása van az egyenletes a priori eloszlásnak a valószínűtlen paraméterek kizárásában akkor, amikor a likelihood függvény egy nagy (részben valószínűtlen) tartományon sík. Azért választottunk egyenletes a priori eloszlást, mert ezt könnyű megérteni és specifikálni. Fontos előnye, hogy nem kell a priori specifikálni az első- és másodrendű momentumokat nagy dimenziókban, mint ahogy azt a normális a priori eloszlás esetében kellene.

### 3. A posteriori elemzés: első lépés

Az a posteriori momentumok és az a posteriori peremsűrűségfüggvények numerikus becslését Monte-Carlo-módszerrel végeztük. Megfelelő egzisztenciafeltételek esetén a számításra kerülő értékek a  $\Theta$  függvénye — jelöljük  $G(\Theta)$ -vel — várható értékeként foghatók fel s az

$$E[G(\Theta)] = \frac{\int G(\Theta) p(\Theta; Y, X) d\Theta}{\int p(\Theta; Y, X) d\Theta} \quad (3)$$

formában definiálhatók, ahol  $p(\Theta; Y, X)$  a  $\Theta$  a posteriori sűrűségfüggvénye. A (3) integrálokat fontosság szerinti mintavétel alkalmazásával becsülhetjük, ahogy a Kloek—Van Dijk (1978) cikkben ismertettük. A Monte-Carlo-módszer sikeres alkalmazásához szükség van egy  $I(\Theta)$  súlyfüggvényre, mely jól közelíti

<sup>9</sup> Figyeljük meg, hogy a beruházási egyenletben szereplő  $\beta_3$  előjele negatív!

<sup>10</sup> Az  $Y = (X - T + W_2)$  jelölést alkalmazzuk a nettó nemzeti jövedelemre. A Klein-I. modellel foglalkozó irodalomban nem egységes a nettó nemzeti jövedelem  $Y$ -nal és az állami nem-bérjellegű kiadások  $G$ -vel való jelölése. Mi Theil—Boot—Kloek (1965)-ben alkalmazott jelölését fogadtuk el. Klein (1950)  $G$ -vel a béreket is magában foglaló állami kiadásokat jelölte (=  $G + W_2$ , a mi jelöléseink szerint). Más szerzők, pl. Rothenberg (1973) az  $Y$ -t használták a magánszektor nettó termelésére az  $X$  helyett. Ez a jelölésbeli különbség lényeges a redukált és a végső forma multiplikátorai egy részének interpretálásakor. Részletesebben lásd az 5. fejezetet.

az a posteriori sűrűségfüggvényt és melyből viszonylag könnyű véletlen mintákat generálni.<sup>11</sup> A Klein-I. modell a posteriori sűrűségfüggvénye az (1) egyenletben adott. A koncentrált likelihood függvényre és a kappa-függvényre alkalmazott előzetes optimalizáló eljárás néhány koeficiensre vonatkozóan elméletileg valószínűtlen értékeket eredményezett (lásd az A függelék és *Van Dijk—Kloek*, 1977a). A likelihood függvény felületének közelebbi vizsgálata egy megnyújtott csúcs létezését mutatta ki.<sup>12</sup>

Megoldásként egy olyan eljárást javasolunk, mely két lépésben közelíti az (1) a posteriori sűrűségfüggvényt. Az első lépésben felhasználjuk a paraméterek tartományára vonatkozó közelítően normális a priori információt. Ezt a Bayes-tétel segítségével *egyesítjük* a likelihood információval, hogy megkapjuk az a posteriori momentumokat. A második lépésben felhasználjuk az első lépés a priori momentumait egy olyan súlyfüggvény momentumaként, mely az (1)-ben adott egzakt a posteriori sűrűségfüggvényt közelíti.

Mindkét lépésben szekvenciális Monte-Carlo-módszert<sup>13</sup> alkalmazunk, hogy ellenőrizzük, vajon a fontosság szerinti mintavétel megfelelően közelíti-e az első lépés közelítő a posteriori sűrűségfüggvényét és a második lépés egzakt a posteriori sűrűségfüggvényét.<sup>14</sup>

Az első lépés fő eredményei az 1. táblázatban találhatóak. Minden becsült érték pozitív. Az  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  és  $\beta_2$  átlaga jelentősen különbözik a FIML becslésétől. A  $\gamma_1$  és  $\gamma_2$  átlaga szintén eltér a FIML értékektől. A többi paraméter alig vagy egyáltalán nem változik. Bővebben lásd a B függelékben.

A  $\Theta$  közelítő a posteriori átlagát és a közelítő a posteriori kovariancia mátrixát felhasználjuk a 2. lépésben, hogy véletlen mintákat generáljunk egy a 0-nál és 1-nél csonkított Cauchy-féle eloszlásból.<sup>15</sup> Kiderült, hogy ez a súlyfüggvény pontos a posteriori eredményeket ad ésszerű számítási költségek mellett.<sup>16</sup> E súlyfüggvény nemcsak a strukturális paramétereket közelítette jól, hanem a cikkben figyelembe vett összes a posteriori eredményt is; részletesebben lásd a C függelékben.

#### 4. Az a posteriori eredmények I.: strukturális paraméterek

Ebben a fejezetben bemutatjuk a  $\Theta$  strukturális paraméterek a posteriori momentumait és a posteriori peremsűrűségfüggvényeit, az egységtartományon<sup>17</sup> értelmezett  $\Theta$ -ra vonatkozóan egyenletes a priori eloszlást alkalmazva.

<sup>11</sup> Részletesebben lásd *Kloek—Van Dijk* (1978, 6., 8., 9. o.).

<sup>12</sup> Kiderül (lásd a B függelék), hogy lényegében csak egy csúcs van, melynek irányát a FIML becslés aszimptotikus kovariancia mátrixának első sajátvektora írja le.

<sup>13</sup> A szekvenciális Monte-Carlo-módszer azt jelenti, hogy több menetben veszünk mintát, s az egyes menetekben a minta-elrendezés az előző (egy vagy több) menettől függ. Részletesebben lásd *Halton* (1962, 60. o.) és a B függelékben. A közelítő eljárás mindkét lépésében ezt a módszert alkalmaztuk.

<sup>14</sup> A második lépésben alkalmazott súlyfüggvényre vonatkozó részleteket a B függelék tartalmazza.

<sup>15</sup> Lásd *Kloek—Van Dijk* (1978, 13. lábjegyzet).

<sup>16</sup> A második lépésben újra 15 000 húzást alkalmaztunk. Összehasonlításképpen: a numerikus integrálásra egy tíz-pontos Gauss szorzási szabály alkalmazása  $10^9$  függvény becslést igényelne.

<sup>17</sup> Részletesebben lásd a 2. fejezetben. E cikkben csupán a  $\Theta$  a posteriori momentumaira fordítjuk figyelmünket. A többi strukturális paraméter a posteriori momentumai a  $\Theta$ -ra vonatkozó ismeretek alapján könnyen előállíthatók (lásd *Van Dijk—Kloek*, 1977b).

Az a posteriori momentumok az 1. táblázatban találhatók. Az eredmények azt mutatják, hogy az adott évi profit hatása a fogyasztási kiadásokra ( $\alpha_1$ ) és a beruházási kiadásokra ( $\beta_1$ ) enyhén pozitív. Mivel az a posteriori sűrűségfüggvények az egységtartományra korlátozottak, az  $\alpha_1$  és  $\beta_1$  szórásának nagyságából következik, hogy az a posteriori peremsűrűségfüggvények nagyon ferdek. Az a posteriori eredményeket összehasonlíthatjuk a FIML becslésekkel és az első lépésben kapott közelítő a posteriori momentumokkal. Látható, hogy az  $(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2)$  elsőrendű momentumai a FIML becslés és a közelítő eredmények között helyezkednek el. Az  $\alpha_3$  és  $\beta_3$  momentumai nem érzékenyek az a priori információkra. A munkabértömeg-egyenlet paraméterei közel megegyeznek a közelítő eredményekkel. A  $\theta$  a posteriori szórása az  $\alpha_3$  kivételével kisebb, mint a FIML becslés aszimptotikus standard hibája. Különösen az  $(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2)$ -re vonatkozó eredmények mutatnak jelentős eltérést az a posteriori átlag és a FIML érték között.

1. táblázat

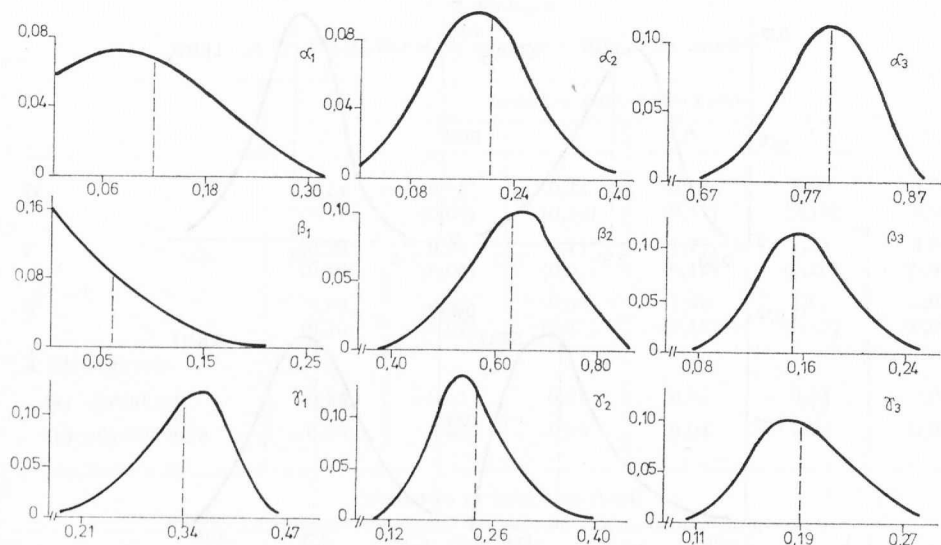
$\theta$  a posteriori átlagai és szórásai

	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$
A posteriori momentumok: első lépés közelítései*	0,17 (0,09)	0,13 (0,08)	0,79 (0,04)	0,08 (0,11)	0,57 (0,10)	0,15 (0,03)	0,32 (0,06)	0,23 (0,05)	0,20 (0,05)
A posteriori momentumok*	0,12 (0,08)	0,19 (0,08)	0,79 (0,04)	0,06 (0,06)	0,64 (0,10)	0,15 (0,03)	0,34 (0,06)	0,23 (0,05)	0,19 (0,04)
FIML	-0,23 (0,58)	0,39 (0,30)	0,80 (0,04)	-0,80 (0,84)	1,05 (0,43)	0,15 (0,05)	0,23 (0,09)	0,28 (0,06)	0,23 (0,06)

\* Az eredmények 15 000 mintavételen alapulnak.

Az a posteriori peremsűrűségfüggvények (MPD) az 1. ábrán láthatók. A függőleges szaggatott vonalak az a posteriori átlagot jelölik. Világosan megfigyelhető annak a hatása, hogy a likelihood információt az a priori információval csonkítottuk. A  $\beta_1$ -re vonatkozó MPD olyan, mint egy exponenciális eloszlás. A csonkítás hatása az  $\alpha_1$ -re vonatkozó MPD-n is megfigyelhető s jóval kisebb mértékben az  $\alpha_2$ -re vonatkozó MPD esetében is. A  $\gamma_1$  a posteriori sűrűségfüggvényének ferdesége valószínűleg a Jacobi determinánsnak tulajdonítható. Így a Klein-I. modell jó néhány paraméterére a módszer nem közelíti jól az a posteriori átlagot. Hozzá kell tenni, hogy a  $\theta$ -ra vonatkozó nagyon nagy tartományon egyenletes a priori eloszlás valószínűtlen eredményeket ad.<sup>18</sup>

<sup>18</sup> Nem tudjuk meghatározni az (1) kappa-függvény maximumát egy nagyon nagy tartomány belsejében. Néhány nem-informatív a priori eloszlással és a Zellner-féle (1977) maximális adat-információjú a priori eloszlás osztállyal (MDIP) végzett kísérletek szintén valószínűtlen eredményekhez vezettek. Ez nem meglepő, hiszen a modell likelihood információja már ebbe az irányba mutatott. Köszönettel tartozunk A. Zellnernek az e témában kifejtett hasznos véleményéért és azért, hogy felhívta figyelmünket arra a hibára, melyet az MDIP a priori eloszlásnak a lineáris egyenletrendszerre való alkalmazásában követtünk el (Van Dijk—Kloek, 1977a).



1. ábra. A strukturális paraméterek a posteriori sűrűségfüggvényei

## 5. Az a posteriori eredmények II.: a multiplikátorok és a rendszer stabilitásának jellemzői

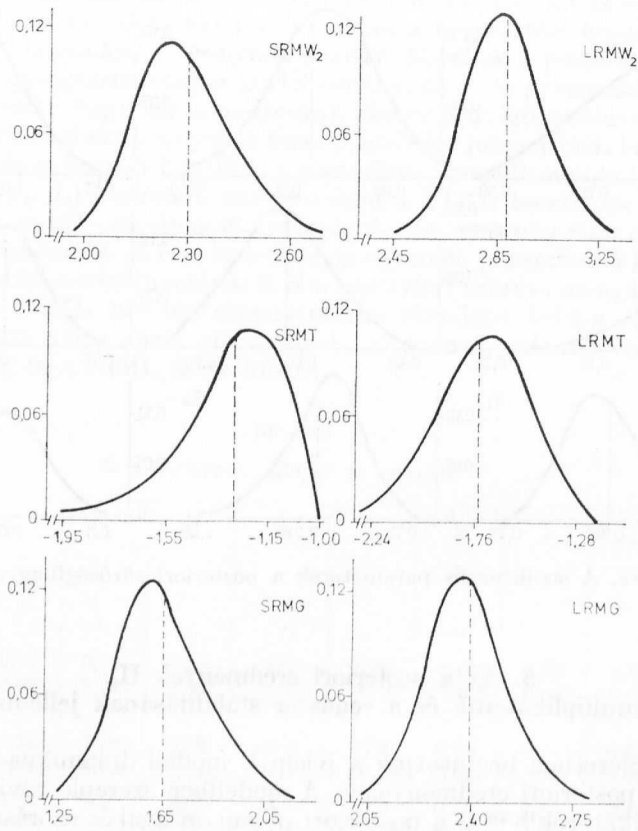
Ebben a fejezetben bemutatjuk a Klein-I. modell dinamikus viselkedésére vonatkozó a posteriori eredményeket. A modellben szereplő rövid- és hosszútávú multiplikátorok<sup>19, 20, 21</sup> a posteriori perem átlagai és szórásai a 2. táblázatban találhatóak, s a redukált és a végső<sup>22</sup> nemzeti jövedelem-egyenlet multiplikátorainak a posteriori sűrűségfüggvényét a 2. ábra mutatja. A 2. táblázat oszlopaiból látható, hogy a redukált beruházási egyenletben szereplő rövidtávú multiplikátorok (SRM) a posteriori átlaga nem különbözik „szignifikánsan” 0-tól. Ez összhangban van a strukturális elemzés eredményeivel. Továbbá a költségvetési egyenleg-növekmény (az állami nem-bérjellegű kiadásokra és az adókra vonatkozó tényezők összege) a redukált fogyasztási egyen-

<sup>19</sup> Ezeket a multiplikátorokat a strukturális paraméterek terén vett függvényként definiáltuk, hogy elkerüljük a nehéz transzformációs problémákat.

<sup>20</sup> Helyhiány miatt a  $t$  időváltozóra és a késleltetett predeterminált változókra vonatkozó multiplikátorokat elhagytuk.

<sup>21</sup> Klein (1950), Goldberger—Nagar—Odeh (1961) és Theil—Boot (1962)  $G$ -vel jelölték a béreket is tartalmazó állami kiadásokat (=  $G + W_2$ , a mi jelölésünk szerint). Az általuk definiált  $G$  azt jelenti, hogy a  $W_2$  növekedésének közölt hatását nem lehet úgy interpretálni, mint egy *ceteris paribus* növekedésnek a hatását, hanem csak úgy, hogy az állam nem-bérjellegű kiadásainak azonos méretű csökkenése impliciten kompenzálja azt. Ez azt jelenti, hogy az e szerzők által jelölt  $\partial Y/\partial W_2$  egyenlő a mi jelölésünk szerinti  $\partial Y/\partial W_2 - \partial Y/\partial G$ -vel. Eredményeink és Goldberger—Nagar—Odeh eredményeinek részletesebb összehasonlítása az A függelékben található.

<sup>22</sup> A rövidség kedvéért a végső nemzeti jövedelem-egyenlet kifejezést használjuk a Theil—Boot (1962) értelmezése szerinti „nemzeti jövedelem egyenlete a végső formában” kifejezés helyett. Ugyanez vonatkozik a végső forma többi egyenletére is.



2. ábra. A redukált és végső nemzeti jövedelem egyenlet multiplikátorainak a posteriori sűrűségfüggvényei

letben, a magánszektorban kifizetett bérből származó jövedelem- és a nemzeti jövedelem-egyenletekben pozitív.

Negatív azonban a redukált profit egyenletében és majdnem 0 a redukált beruházás-egyenletben. Figyelemre méltó, hogy az összes költségvetési egyenleg multiplikátor-szórása kisebb, mint az adók és az állami kiadások multiplikátoraira vonatkozó szórások külön-külön. Ez az adók és az állami kiadások közti pozitív korreláció következménye, mely a megfelelő paraméterek negatív a posteriori korrelációját eredményezi. Láthatjuk továbbá, hogy a redukált profit-egyenletben szereplő multiplikátorok (abszolút) értéke nagyobb, mint a redukált személyes bérjövedelem-egyenletben levőké.

A hosszútávú multiplikátorok esetében a számítások további a priori feltételezés, a stabilitás feltételezése mellett történtek. Ezek a multiplikátorok nagyobbak (abszolút értékben), mint a rövidtávú multiplikátorok, kivéve a végső profit-egyenletben szereplő állami nem-bérjellegű kiadások és az állami bérjövedelem multiplikátorait (ez a végső beruházási egyenletre is igaz, hiszen az LRM-ek definíciószerűen 0-k az adott esetben). A végső nemzeti jövedelem-egyenlet multiplikátorai egynél nagyobbak (abszolút értékben).



## 2. táblázat

A multiplikátorok a posteriori átlaga és szórása

	Rövidtávú multiplikátorok (SRM)					
	<i>C</i>	<i>I</i>	<i>W<sub>1</sub></i>	<i>P</i>	<i>F</i>	<i>K</i>
<i>W<sub>2</sub></i>	1,24 (0,12)	0,06 (0,06)	0,44 (0,10)	0,86 (0,11)	2,30 (0,16)	0,06 (0,06)
<i>T</i>	-0,23 (0,15)	-0,08 (0,08)	-0,11 (0,07)	-1,21 (0,13)	-1,31 (0,20)	-0,08 (0,08)
<i>G</i>	0,58 (0,15)	0,07 (0,07)	0,56 (0,13)	1,09 (0,12)	1,65 (0,19)	0,07 (0,07)
A költségvetés						
(a) egyenlege	0,34	-0,01	0,46	-0,12	-0,34	-0,01
(b) növekménye	0,08	0,03	0,09	0,04	0,08	0,03

## Hosszútávú multiplikátorok (LRM)

<i>W<sub>2</sub></i>	1,88 (0,16)	0	1,07 (0,10)	0,82 (0,10)	2,88 (0,16)	3,92 (1,15)
<i>T</i>	-0,75 (0,24)	0	-0,42 (0,13)	-1,33 (0,11)	-1,75 (0,24)	-6,35 (1,74)
<i>G</i>	1,39 (0,15)	0	1,35 (0,11)	1,04 (0,10)	2,39 (0,15)	4,97 (1,38)
A költségvetés						
(a) egyenlege	0,64	0	0,93	-0,29	0,64	-1,38
(b) növekménye	0,15		0,11	0,05	0,15	0,48

Említésre méltó, hogy a költségvetési egyensúly-növekmény nagy negatív hatást gyakorolna a tőkére hosszú távon. Ebben az esetben azonban a szórás viszonylag nagy.

A redukált nemzeti jövedelem-egyenletben szereplő multiplikátorok a posteriori peremsűrűségfüggvényei mind ferdek, de a hosszú távra vonatkozók szimmetrikusabbak. Az a tény, hogy minden sűrűségfüggvény viszonylag kis körzetben koncentrálódik, alkalmassá tenné azokat különböző stratégiák elemzésére, de a modell természetesen túl kicsi erre a célra. (Lásd 2. ábrát.)

Végül a 3. táblázatban bemutatjuk a stabilitási jellemzők a posteriori valószínűségeit. A számításokban a redukált forma paramétereinek<sup>23</sup> harmadfokú polinomját azzal a formulával oldottuk meg, ami pl. *Uspensky* (1948) könyvében szerepel. Az eredmények igazolják, hogy a modell csillapított rezgő mozgást végez közelítőleg 0,97 valószínűséggel. Az oszcillálás periódusának átlaga 15,15 év, a szórása 2,99. A domináns gyök együtthatójára ezek az értékek sorrendben 0,85 és 0,08. Ez alátámasztja a 3. táblázat eredményeit. A klasszikus

<sup>23</sup> Minden véletlenszerűen húzott  $\Theta_i$  vektorra a számítógépi program kipróbálja, hogy a polinomiális egyenlet megoldása a 3. táblázatban bemutatott négy lehetőség közül melyiket tartalmazza.

## 3. táblázat

A stabilitási jellemzők a posteriori valószínűségei

	Explozív	Csillapított
Oscilláló	0,0258	0,9738
Monoton	0,0000	0,0004

módszerek, a FIML, a FIMLD (a látens változók kovariancia mátrixa diagonális) és a 2SLS szintén azt mutatják, hogy a modell csillapított rezgő mozgást végez. Elmondhatjuk, hogy a beruházási folyamat dinamikájának gyenge specifikálása és a Jacobi-determináns miatti ferdeség ellenére a két háború közti időszakra vonatkozó adatok hullámozása olyan jellegzetes, hogy az összes különböző becslési módszer kimutatja ezt a ciklikus viselkedést. A klasszikus becslési módszerek numerikus eredményeiről részletesebb információ az A függelékben található.

## 6. Következtetések

Nagyon sikeresnek bizonyult a Monte-Carlo-módszer alkalmazása a kilencdimenziós integrálási feladatunk megoldására, mielőtt egy jó súlyfüggvényt találtunk. Nem volt egészen triviális ilyen súlyfüggvényt találni, s a bemutatott megoldás többé-kevésbé ki is használta a vizsgált feladat jellemzőit. Nem tisztázott, hogy ez a közelítés milyen mértékben általánosítható más esetekre. Természetesen előnyös lenne, ha egy többé-kevésbé mechanikusan működő eljárásunk lenne. Ez azonban a további vizsgálatok tárgya marad. Ugyanez vonatkozik a likelihood diagnosztika módszerére (*Van Dijk - Kloek, 1977a*), melyet alkalmaztunk, de itt nem ismertettünk.

A Klein-modell strukturális paramétereinek a posteriori átlaga nagyon különbözik a megfelelő FIML becslésektől. Ugyanez vonatkozik — habár kisebb mértékben — a rövidtávú multiplikátorokra is. Néhány a posteriori peremsűrűségfüggvény meglehetősen ferde volt. Így az a posteriori módusz alapos megfontolás nélkül nem tekinthető az a posteriori átlag közelítésének. Ez a jelenség nagy mértékben annak a következménye, hogy az a priori sűrűségfüggvényünk kizárta a „rossz” előjelet, míg a FIML becslés két ilyen „rossz” előjelet is tartalmazott. Ezen becslések egyike jelentősen, bár nem szignifikánsan különbözött 0-tól.

A két háború közti adatokban szereplő ciklusok olyan jellegzetesek, hogy bár a strukturális koeficiensek numerikus értéke különbözik, minden vizsgált becslési módszer csillapított oszcilláló viselkedést jelez.

Ilyen méretű modell specifikációja természetesen nem lehet egészen reális. Néhány numerikus eredmény alapján a beruházási függvényre hosszabb késleltetés látszik indokoltnak, mint amelyet Klein alkalmazott. Az  $(1 - \lambda)P_t + \lambda P_{t-1}$  egy  $\lambda$  éves átlagos késésnek felel meg. A  $\lambda$ -ra vonatkozó FIML becslés 4,2, de a likelihood hányados próba nem zárja ki a  $\lambda = 1$  megszorítást. A  $\lambda$ -ra vonatkozó a posteriori átlag közel 1, mely az adott a priori eloszlás

esetén határeset. Az autoregresszív látens változók feltételezését<sup>24</sup> bevezető *Hendry* (1971) eredményei is felvetik, hogy az újraspecifikálás helyénvaló lehet. Cikkünk célját tekintve nem törekedtünk erre. Nem számoltunk előrejelzési momentumokat és előrejelzési sűrűségfüggvényeket sem (*Van Dijk—Kloek*, 1977b), mivel a modell valószínűleg nem alkalmas a háború utáni időszakra vonatkozó előrejelzésekre.

### A. Függelék: a maximum-likelihood becslés korlátozásokkal

Ebben a függelékben a strukturális paraméterekre vonatkozó teljes információ alapján maximum likelihood becslését (FIML) mutatjuk be különböző korlátozások mellett. Megvizsgáljuk a rövid- és hosszútávú multiplikátorokra

#### 4. táblázat

A  $\Theta$  paraméter becslései különböző feltételek mellett\*

	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\beta_1$	$\beta_2$	
FIML	korlátozás nélküli $\Theta$	-0,23 (0,58)	0,39 (0,30)	0,80 (0,04)	-0,80 (0,84)	1,05 (0,43)
	$\alpha_1 = 0$	0	0,27	0,79	-0,47	0,92
	$\beta_1 = 0$	0,12	0,19	0,79	0	0,70
	$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$	0	0,25	0,80	0	0,71
A posteriori átlagok	0,12 (0,08)	0,19 (0,08)	0,79 (0,04)	0,06 (0,06)	0,64 (0,10)	
2SLS	0,02 (0,12)	0,22 (0,11)	0,81 (0,04)	0,15 (0,17)	0,62 (0,16)	
	$\beta_3$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\log l$	
FIML	korlátozás nélküli $\Theta$	0,15 (0,05)	0,23 (0,09)	0,28 (0,06)	0,23 (0,06)	6,07
	$\alpha_1 = 0$	0,16	0,27	0,26	0,22	5,91
	$\beta_1 = 0$	0,17	0,35	0,22	0,18	4,47
	$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$	0,16	0,37	0,21	0,17	3,89
A posteriori átlagok	0,15 (0,03)	0,34 (0,06)	0,23 (0,05)	0,19 (0,04)		
2SLS	0,16 (0,04)	0,44 (0,04)	0,15 (0,04)	0,13 (0,03)		

\* A zárójelben levő számok a standard hibát (szórást) jelentik. A korlátozás nélküli FIML eredmények megegyeznek a *Chernoff—Divinsky* (1953, 284., 288. o.) által közölt eredményekkel.

<sup>24</sup> Ez kilenc külön paraméter bevezetését jelenti. Egy olyan modellben, ahol már 18 paramétert illesztettünk 63 megfigyelésre, óvatossá kell lennünk, hogy elkerüljük a túllillesztés veszélyét.

kapott értékeket. Ezeket az eredményeket azután összehasonlítjuk a 4. és 5. fejezetben található a posteriori eredményekkel, valamint néhány klasszikus eredménnyel (*Goldberger—Nagar—Odeh*, 1961; *Gill—Brissimis*, 1978).

Tekintsük az  $\alpha_1 = 0$  és  $\beta_1 = 0$  korlátozásokat.<sup>25</sup> Ezeket azért választottuk, mert ezekre a paraméterekre vonatkozóan a korlátozás nélküli FIML becslések „rossz” előjelet tartalmaztak és standard hibájuk nagy volt. A számszerű eredmények a 4. táblázatban találhatók. A loglikelihood értékeket a konstans tagot nem számítva közöljük.

Az eredmények azt mutatják, hogy az  $(\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2)$  becslései jelentősen változnak, pl. az  $\alpha_1$  becslése negatív értékből pozitívvá válik abban az esetben, ha a  $\beta_1 = 0$  korlátozást tesszük. Az  $\alpha_3$  és  $\beta_3$  becslései meglehetősen érzéketlenek a korlátozásokra, míg a bértömeg egyenletének paraméterei közepes helyzetet foglalnak el.<sup>26</sup>

Az a posteriori átlagokkal való összehasonlítás a 4. fejezetben található. A 2SLS becslések nemcsak az  $\alpha_1$  és  $\beta_1$  paraméterekre különböznek, hanem a bérjövdelem egyenletének paramétereire is.

Ha a *Mizon* (1977) által javasolt eljárást követjük, mely a próba sorozatban a legjobban korlátozott hipotézist fogadja el, akkor az  $\alpha_1 = 0$  és  $\beta_1 = 0$  korlátozást kell előnyben részesítenünk.<sup>27</sup> Így azonban a szimultaneitás nagy része megszűnik a modelltől. Mielőtt eldöntjük, hogy mely korlátozásokat részesítjük előnyben, először megnézzük a feltételes strukturális becslések során kapott multiplikátor értékeket.

Az állami bérjövdelemre (SRMW<sub>2</sub>), az adókra (SRMT) és az állami nem-bérjellegű kiadásokra (SRMG) vonatkozó rövidtávú multiplikátorok az 5. táblázatban találhatók. A redukált beruházási egyenletben szereplő SRMW<sub>2</sub> negatív értéke lényegesen eltér az FIML és az  $\alpha_1 = 0$  korlátozással számolt FIML a posteriori átlagtól. A  $\beta_1 = 0$  korlátozás olyan multiplikátor-értékeket eredményez, melyek viszonylag közel állnak az a posteriori átlaghoz, mint az a 4. és 5. fejezet a posteriori elemzéséből várható volt. A 2SLS strukturális becslésen alapuló multiplikátor-értékek közelebb állnak az a posteriori átlaghoz, mint a FIML becslések. Ez azzal magyarázható, hogy a 2SLS módszer nem veszi figyelembe a Jacobi-determinánst és figyelmen kívül hagyja a strukturális egyenletek látens változóinak korrelációját is.

A redukált beruházási egyenletben az SRMT és SRMG értékek „rossz” előjelet vesznek fel a nem korlátozott FIML becslés és az  $\alpha_1 = 0$  feltétellel számolt FIML becslés esetén. Az  $\alpha_1 = 0$  és  $\beta_1 = 0$  korlátozás lényegesen csökkenti a rendszer szimultaneitását. Közgazdasági megfontolásból a  $\alpha_1 = 0$  korlátozás kedvezőbbnek tűnik.

Az a posteriori szórások sokkal kisebbek, mint az aszimptotikus 2SLS standard hibák. A beruházási folyamat dinamikájának bizonytalanságát mind az a posteriori szórások, mind a 2SLS standard hibák méretei jelzik.

<sup>25</sup> A kovariancia mátrix diagonalitására vonatkozó hipotézist a likelihood hányados próba világosan elutasítja;  $\chi^2(3) = 28,46$ . Ennek következtében a *Theil*- és *Boot*- (1962) féle multiplikátor értékek, melyek ezeken a strukturális becsléseken alapultak, e cikkben nem szerepelnek.

<sup>26</sup> Hasonló következtetések adódnak, ha más klasszikus módszerekkel végzünk összehasonlítást. Lásd pl. *Klein* (1950, 68–75. o.); *Rothenberg—Leenders* (1964); *Jorgenson—Brundy* (1973).

<sup>27</sup> Azokat a hipotéziseket, amelyekben az  $\alpha_1 = 0$  vagy  $\beta_1 = 0$  és a  $\Sigma = D$  feltevés együtt szerepelt, természetesen elutasítottuk. Az eredmények megtalálhatók a *Van Dijk—Kloek* (1977a) cikkben.

5. táblázat

A rövidtávú multiplikátorok (SRM) becslései\*

	<i>C</i>	<i>I</i>	$W_1$	<i>P</i>	<i>Y</i>	$\kappa$	
Az állami bérjellegű kiadások (SRMW <sub>2</sub> )							
FIML	korlátozás nélküli $\Theta$	0,81	-0,31	0,12	0,38	1,50	-0,31
	$\alpha_1 = 0$	0,94	-0,24	0,19	0,51	1,70	-0,24
	$\beta_1 = 0$	1,21	0	0,42	0,79	2,21	0
	$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$	1,14	0	0,42	0,72	2,14	0
A posteriori átlagok		1,24 (0,12)	0,06 (0,06)	0,44 (0,10)	0,86 (0,11)	2,30 (0,16)	0,06 (0,06)
2SLS		1,35	0,12	0,65	0,83	2,47	0,12

Az adók (SRMT)\*\*

FIML	korlátozás nélküli $\Theta$	0,24	0,41	0,15	-0,51	-0,36	0,41
	$\alpha_1 = 0$	0,09	0,33	0,11	-0,70	-0,58	0,33
	$\beta_1 = 0$	-0,18	0	-0,06	-1,12	-1,18	0
	$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$	0	0	0	-1,00	-1,00	0
A posteriori átlagok		-0,23 (0,15)	-0,08 (0,08)	-0,11 (0,07)	-1,21 (0,13)	-1,31 (0,20)	-0,08 (0,08)
2SLS		-0,13 (0,28)	-0,18 (0,24)	-0,13 (0,21)	-1,17 (0,27)	-1,30 (0,48)	-0,18 (0,24)

Az állami nem-bérjellegű kiadások (SRMG)\*\*

FIML	korlátozás nélküli $\Theta$	0,01	-0,38	0,15	0,48	0,62	-0,38
	$\alpha_1 = 0$	0,19	-0,30	0,24	0,65	0,88	-0,30
	$\beta_1 = 0$	0,54	0	0,54	1,00	1,54	0
	$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$	0,42	0	0,52	0,90	1,42	0
A posteriori átlagok		0,58 (0,15)	0,07 (0,07)	0,56 (0,13)	1,09 (0,12)	1,65 (0,19)	0,07 (0,07)
2SLS		0,66 (0,24)	0,15 (0,21)	0,80 (0,20)	1,02 (0,24)	1,82 (0,42)	0,15 (0,21)

\* A zárójelben levő számok a standard hibát (szórást) jelölik.

\*\* Az adók és az állami nem-bérjellegű kiadások esetében a 2SLS multiplikátor-értékek megegyeznek a *Goldberger—Nagar—Odeh* (1962) és *Gill—Brissimis* (1978) eredményeivel. Ezek aszimptotikus standard hibája a becsült érték alatt található. A  $W_2$ -re vonatkozó multiplikátor-értékünk közvetlenül nem hasonlítható össze az általuk kapott értékekkel, lásd 5. fejezetet.

A 6. táblázatban található különböző becslési technikák esetén a hosszú-távú multiplikátor-értékek sokkal közelebb állnak egymáshoz, mint a rövid-távú multiplikátor-értékek.

## 6. táblázat

## A hosszútávú multiplikátorok (LRM) becslései\*

	C	I	W <sub>1</sub>	P	F	K	
Az állami bérjellegű kiadások (LRMW <sub>2</sub> )							
FIML	{korlátozás nélküli $\Theta$	1,57	0	0,82	0,76	2,57	1,28
	$\alpha_1 = 0$	1,75	0	0,93	0,82	2,75	2,22
	$\beta_1 = 0$	1,87	0	1,06	0,81	2,87	3,40
	$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$	1,87	0	1,07	0,79	2,87	3,56
A posteriori átlagok		1,88 (0,16)	0	1,07 (0,10)	0,82 (0,10)	2,88 (0,16)	3,92 (1,15)
2SLS		1,89	0	1,11	0,78	2,89	3,80
Az adók (LRMT)							
FIML	{korlátozás nélküli $\Theta$	-0,30	0	-0,16	-1,14	-1,30	-1,94
	$\alpha_1 = 0$	-0,60	0	-0,32	-1,27	-1,60	-3,48
	$\beta_1 = 0$	-0,72	0	-0,41	-1,31	-1,72	-5,52
	$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$	-0,59	0	-0,34	-1,25	-1,59	-5,60
A posteriori átlagok		-0,75 (0,24)	0	-0,42 (0,13)	-1,33 (0,11)	-1,75 (0,24)	-6,35 (1,74)
2SLS		-0,54 (0,20)**	0	-0,32	-1,23	-1,54 (0,20)**	-5,95 (1,57)**
Az állami nem-bérjellegű kiadások (LRMG)							
FIML	{korlátozás nélküli $\Theta$	0,96	0	1,02	0,94	1,96	1,59
	$\alpha_1 = 0$	1,21	0	1,18	1,03	2,21	2,81
	$\beta_1 = 0$	1,37	0	1,35	1,02	2,37	4,31
	$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$	1,32	0	1,33	0,99	2,32	4,43
A posteriori átlagok		1,39 (0,15)	0	1,36 (0,11)	1,04 (0,10)	2,39 (0,15)	4,97 (1,38)
2SLS		1,33 (0,13)**	0	1,37	0,97	2,33 (0,13)**	4,69

\* Lásd az 5. fejezet első lábjegyzetét.

\*\* Ezek a Gill-Brissimis- (1978) féle aszimptotikus standard hibák az összehasonlítás kedvéért.

Az aszimptotikus 2SLS standard hibák valamivel kisebbek, mint az a posteriori szórások.

Összegezve, előzetes megokolásokból és a strukturális forma specifikációjának próbája alapján a  $\beta_1 = 0$  megszorítást kedvezőbbnek tarthatjuk. Így az a posteriori elsőrendű momentumokhoz közelálló eredményeket nyerhetünk. A Bayes-féle megközelítésnél azonban kevesebb egzakt korlátozást

alkalmazhatunk, mint a likelihood közelítésnél ( $\beta_1 = 0$ , ill. a  $\beta_1$  egyenletes eloszlású  $[0, 1]$ -en) s több (sztochasztikus) a priori információt használtunk fel, mint a likelihood megközelítésnél (vö. *Drèze*, 1962). Továbbá a Monte-Carlo-módszert alkalmazva kis mintán alapuló a posteriori sűrűségfüggvényt kapunk a klasszikus aszimptotikus eredmények helyett.

### B. Függelék: a $\Theta$ a posteriori sűrűségfüggvényének közelítése: kétlépéses megközelítés

Ebben a függelékben bemutatjuk a 3. fejezetben említett közelítő eljárás első fázisában alkalmazott, közelítően normális a priori információt. Ezután azt ismertetjük, hogy az első fázisban az a posteriori momentumokat milyen számszerű értékekkel közelítettük. Elemezzük a két súlyfüggvényt is, melyeket a közelítő eljárás mindkét fázisában alkalmaztunk.

Az első fázist azzal a megjegyzéssel kezdhetjük, hogy a FIML becslése, melyet  $\hat{\Theta}$ -vel jelölünk, aszimptotikusan normális eloszlású  $\Theta$  várható érték vektorral és  $Q = -H^{-1}$  kovariancia mátrixszal, ahol  $H$  a szimultán lineáris egyenletrendszer (koncentrált) loglikelihood függvényének Hesse-féle mátrixa. Részletesebben lásd *Koopmans - Rubin - Leipnik* (1950, 133–153. o.) művében. Tekintsük ezután a

$$\text{Var } \hat{\Theta} = Q = PAP' = \sum_{i=1}^M p_i p_i' \lambda_i \quad (\text{B.1})$$

ahol  $P$  ortogonális mátrix ( $PP' = I$ ), melynek oszlopai ( $p_i$ ) a  $Q$  ortonormált sajátvektorai. A  $A$  diagonális mátrix a  $Q\lambda_i$  sajátértékeit tartalmazza csökkenő sorrendben. Végül  $M$  a  $\Theta$  mérete. Az első tag  $p_1 p_1' \lambda_1$ , ahol  $p_1$  a  $Q$  legnagyobb sajátértékének megfelelő sajátvektor  $P$ -ben, az az irány, amelyben a szórásnégyzet a maximális. Kiszámoltuk a Klein-I. modellre a  $P$  mátrixot és a  $A$  diagonális elemeit. A legnagyobb sajátérték és a második legnagyobb sajátérték aránya hozzávetőleg 22,5, mely azt mutatja, hogy erre a modellre a (B.1) első tagja erősen dominálja a többi tagot.

A következő lépés, hogy a  $\hat{\Theta}$  FIML becslésének aszimptotikus sűrűségfüggvényét alkalmazzuk a likelihood függvény<sup>28</sup> közelítésére. Azaz adott statisztikai információ esetén vesszük a  $\Theta$  többdimenziós normális sűrűségfüggvényét  $\hat{\Theta}$  átlaggal és  $Q$  kovariancia mátrixszal. Ekkor  $\Theta$  rotációval történő transzformációja a  $P'$  mátrixszal a következő:

$$P'(\Theta - \hat{\Theta}) = u \quad (\text{B.2})$$

ahol  $u$  független valószínűségi változók vektora. Könnyen belátható, hogy  $\text{var } u_i = \lambda_i$  és a Klein-modell esetére  $\text{var } u_1$  erősen domináns.  $\Theta$  a priori eloszlását úgy definiáljuk, hogy az  $u$ -ra adunk a priori információt. megszorozva (B.2)-t  $P$ -vel adódik

$$\Theta = \hat{\Theta} + u_1 p_1 + \sum_{i=2}^M u_i p_i \quad (\text{B.3})$$

<sup>28</sup> Vessd össze *Rothenberggel* (1973) 160. és 161. o. és az ott idézett művekkel.

Legyen  $u_1$  normális eloszlású,  $N(\mu; \Phi^2)$ , ahol  $\mu$  és  $\Phi^2$  később megadásra kerülő konstansok és legyen  $u_2, \dots, u_M$  normális eloszlású 0 várható értékkel és  $\omega^2$  (nagy szám) szórásnégyzettel. Az  $u_1, \dots, u_M$  egymástól független eloszlásúak. Ebből következik, hogy az a priori átlag és variancia:

$$E(\theta) = \hat{\theta} + \mu p_1$$

$$\text{Var}(\theta) = \Phi^2 p_1 p_1' + \omega^2 (I - p_1 p_1') \quad (\text{B.4})$$

A  $\theta$  a priori sűrűségfüggvénye:

$$f(\theta) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\Phi^2} (\theta - \hat{\theta} - \mu p_1)' \left[ p_1 p_1' + \frac{\Phi^2}{\omega^2} (I - p_1 p_1') \right] (\theta - \hat{\theta} - \mu p_1) \right\}$$

Feltesszük, hogy  $\omega^2$  olyan nagy, hogy az a priori preciziós mátrixban a második tag,  $\Phi^2(I - p_1 p_1')/\omega^2$ , elhanyagolható az a posteriori elemzésben. Így a közelítő a priori normális eloszlásfüggvényünk:

$$f(\theta) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\Phi^2} (\theta - \hat{\theta} - \mu p_1)' (p_1 p_1') (\theta - \hat{\theta} - \mu p_1) \right\}, \quad (\text{B.5})$$

így nem adjuk össze az a priori információt azon irányokban, ahol jelentős statisztikai információ áll rendelkezésre, de azon irányokban összeadjuk, ahol a statisztikai információ gyakorlatilag hiányzik. Azaz a  $p_1$ -gyel párhuzamos irányokban tekintetbe vesszük az a priori normális információt, de a  $p_1$ -re ortogonális<sup>29</sup> irányban nem adjuk össze.

Most a Bayes-tétel segítségével egyesítjük a közelítő a priori normális eloszlás (B.5) sűrűségfüggvényét a  $\theta$  fent adott normális sűrűségfüggvényével, mely a likelihood függvény közelítésére szolgál. Így egy többdimenziós normális a posteriori sűrűségfüggvényt kapunk, melynek első- és másodrendű momentuma *analitikusan* az alábbi módon határozható meg:

$$E(\theta) = \left[ -H + \frac{1}{\Phi^2} p_1 p_1' \right]^{-1} \left[ -H\hat{\theta} + \frac{1}{\Phi^2} p_1 p_1' \hat{\theta} + \frac{1}{\Phi^2} \mu p_1 \right] \quad (\text{B.6})$$

$$\text{Var}(\theta) = \left[ -H + \frac{1}{\Phi^2} p_1 p_1' \right]^{-1} \quad (\text{B.7})$$

Ez a normális sűrűségfüggvény szolgál súlyfüggvényként a közelítő eljárás első szakaszában. Ebben a szakaszban is egyesítjük a Bayes-tétel segítségével a (B.5) közelítő a priori normális sűrűségfüggvényt az (1) kappa-függvényvel. Az így nyert, a  $\theta$ -ra vonatkozó közelítő a posteriori sűrűségfüggvény momentumait nevezzük az első lépés (közelítő) a posteriori momentumainak. Ezeket Monte-Carlo-módszerrel számoltuk ki, a fent adott normális sűrűségfüggvényvel fontosság szerinti mintavételt hajtva végre. A közelítő a posteriori átlagokat és a közelítő a posteriori kovariancia mátrixot a Monte-Carlo-módszer második menetében a súlyfüggvény momentumaként alkalmaztuk azért, hogy a pontosságot növeljük. Ez a módszer a *szekvenciális* Monte-Carlo-módszer néven ismert (*Halton-Hammersley-Handscomb*, 1962). A közelítő a posteriori momentumokat a *Powell* (1964) módszerrel számoltuk ki.

<sup>29</sup> Ez a megközelítés lényegében általánosítható abban az esetben, ha több olyan irány is van, ahol a statisztikai információ hiányzik.



Mielőtt megvizsgálánk az első lépésben kapott számszerű eredményeket, először meg kell adnunk a (B.5)-ben szereplő  $\mu$  és  $\Phi^2$  konstansokat. A  $\Theta$ -ra vonatkozó a priori elképzelésünk, hogy ez a paraméter-vektor az egység tartományban fekszik. Ekkor a  $\mu$ -t és  $\Phi^2$ -et a következő szélsőérték feladat megoldásaként határozhatjuk meg:

$$\min \mu^2/\Phi^2 \quad (\text{B.8})$$

feltéve, hogy

$$0 < E(\Theta_i) \pm k\sigma_i < 1 \quad (i = 1, \dots, M) \quad (\text{B.9})$$

ahol  $E(\Theta_i)$  a (B.4) a priori várható értéke és  $\sigma_i$  a feltételes szórás  $u_2 = \dots = u_M = 0$  esetén, mely a (B.4)-ből az utolsó tag elhagyásával határozható meg. A  $k$  konstansról tegyük fel, hogy felveszi az 1, 2, 3 integer értékeket és így a (B.9) intervallumhoz tartozó a priori valószínűséget mutatja. A (B.9)-et átalakíthatjuk a következőképp:

$$0 < \hat{\Theta}_i + \mu p_{1i} + k\Phi p_{1i} < 1 \quad (i = 1, \dots, M) \quad (\text{B.10})$$

Ez a korlátos nemlineáris optimalizálási feladat könnyen megoldható a Klein-I. modell esetére. A (B.10) korlátozások  $i = 2$  és  $i = 4$ -re rögzítettek. A  $p_1$  sajátvektor<sup>30</sup> elemeiből levezethető:

$$\mu = k\Phi < 1,56 \quad i = 2 \quad (\text{B.11})$$

és

$$\mu - k\Phi > 1,07 \quad i = 4 \quad (\text{B.12})$$

A megoldások  $\mu$ -re és  $\Phi$ -re:  $\mu = 1,315$  és  $\Phi = 0,245/k$ . Ezeket az értékeket behelyettesíthetjük a (B.5) a priori sűrűségfüggvénybe.

A 7. táblázat bemutatja a  $\Theta$  a posteriori momentumaira vonatkozó közelítések első fázisában kapott számszerű eredményeket<sup>31</sup>  $k = 1, 2, 3$  esetben. A 7. táblázat felső részén a (B.6)-ban analitikusan nyert aszimptotikus a posteriori átlagokra vonatkozó eredményeket találjuk. Ez alatt mutatjuk be a közelítő a posteriori móduszokat és a közelítő a posteriori átlagokat és szórásokat. Ezen első lépés eredményei érdekes összehasonlítást tesznek lehetővé az aszimptotikus elemzés és a véges mintán alapuló elemzés között. Kiderül, hogy az aszimptotikus elemzés jó eredményeket ad az  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  paraméterekre. Az  $\alpha_1, \alpha_2$  és  $\beta_1$ -re vonatkozó eredmények azonban nagy eltéréseket mutatnak. Ez annak a következménye, hogy a kis mintán alapuló a posteriori sűrűségfüggvény erősen ferde, amit szimmetrikus aszimptotikus a posteriori sűrűségfüggvény nem képes megfelelően leírni.

A közelítő eljárás második fázisában felhasználjuk az első fázisban kapott a posteriori momentumokat a súlyfüggvény kialakítására. A (csonkított) többváltozós Cauchy-családba tartozó eloszlást alkalmazzuk e célra.<sup>32</sup> Főleg az első

<sup>30</sup> Ezek a *Van Dijk—Kloek* (1977a) cikkben adottak.

<sup>31</sup> A *Van Dijk—Kloek* (1977a, 23. o.) cikkében is megtalálhatók ezek a számszerű eredmények. Megjegyezzük, hogy az itt közölt eredményeket az első lépésbeli közelítésként interpretáljuk, mely az (1) kappafüggvényhez szükséges jó súlyfüggvény kialakításában nyújt segítséget; lásd még korábbi cikkünk következtetéseit.

<sup>32</sup> Normális súlyfüggvénnyel végzett kísérletek a  $k/I$  arány utolsó értékeinek expozíív viselkedését eredményezték, ahol  $k$  az (1)-ben adott és  $I$  a súlyfüggvény. Többváltozós Cauchy-eloszlásból generált véletlen mintavételeket ismertettünk a *Kloek—Van Dijk* (1978) cikkben. A minták generálásához szükséges a posteriori kovariancia mátrixot helyhiány miatt nem közöljük.

## 7. táblázat

$A \Theta$  a posteriori momentumai; Az első lépés közelítései

$k$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$
-----	------------	------------	------------	-----------	-----------	-----------	------------	------------	------------

A fontosság szerinti mintavételben használt aszimptotikus a posteriori átlagok (= móduszok)

1	0,40	0,07	0,78	0,14	0,62	0,17	0,30	0,25	0,21
2	0,43	0,05	0,78	0,18	0,61	0,17	0,30	0,25	0,21
3	0,43	0,05	0,78	0,18	0,61	0,17	0,30	0,25	0,21

A posteriori móduszok

1	0,14	0,17	0,79	-0,06	0,70	0,17	0,32	0,24	0,20
2	0,19	0,13	0,78	0,11	0,59	0,16	0,35	0,22	0,19
3	0,20	0,11	0,78	0,18	0,54	0,15	0,36	0,21	0,19

A posteriori átlagok\*

1	0,09	0,18	0,79	-0,14	0,69	0,16	0,29	0,25	0,22
2	0,17	0,13	0,79	0,08	0,57	0,15	0,32	0,23	0,20
3	0,19	0,11	0,78	0,16	0,52	0,15	0,34	0,22	0,20

A posteriori szórások\*

1	0,11	0,09	0,04	0,17	0,14	0,04	0,07	0,05	0,05
2	0,09	0,08	0,04	0,11	0,10	0,03	0,06	0,05	0,05
3	0,09	0,08	0,04	0,08	0,08	0,03	0,06	0,05	0,04

\* A fontosság szerinti mintavétel mindkét menetében 15 000 mintavételen alapulnak.

lépésbeli a posteriori eredményeket alkalmaztuk, melyek egy részét a 7. táblázatban mutattuk be  $k = 2$  esetén. Az egységintervallumon kívüli mintákat elvetjük,<sup>33</sup> ahogy a 2. fejezetben megadott a priori eloszlásunk előírta. Ahogy az első fázisban tettük, egy külön menetben szekvenciális Monte-Carlo-módszert alkalmaztunk, hogy növeljük a pontosságot, mellyel a súlyfüggvény az (1) kappafüggvényt közelíti. Kiderült, hogy súlyfüggvényünk pontos a posteriori eredményeket ad, melyeket a 4. és 5. fejezetben mutattunk be. Az összes a posteriori átlag számítási pontosságát a C függelékben elemezzük.

<sup>33</sup> Az elvetett minták aránya az összes mintán belül 0,44. Ez viszonylag magasnak tűnik, de tisztában kell lenni azzal, hogy a modern számítógépekkel nagyon gyorsan generálhatók véletlen számok és a számítási idő zömét a  $k/I$  kiszámítása emésztí fel, melyet az elvetett mintákra nem számítunk ki. Az 1. és 2. táblázatban közölt a posteriori eredmények számítása csupán néhány percet vesz igénybe egy IBM 370/158 számítógépen. Az a posteriori peremsűrűségfüggvényekre és a dinamikus viselkedés a posteriori valószínűségekre vonatkozó eredmények kiszámítása 10 és 15 perc közötti számítási időt igényelt.

Természetesen ez a kétlépéses közelítő eljárás nem az egyetlen lehetséges módja az a posteriori sűrűségfüggvény (1) közelítésnek. Esetünkben a *Van Dijk–Kloek* (1977a) cikkben közölt elemzésből tudjuk, hogy a likelihood függvény felületén egy csúcs van. Ezt az információt felhasználtuk az első fázisban az a posteriori sűrűségfüggvény közelítésének konstrukciójában. Azonban kedvező lenne egy mechanikus eljárás, pl. elindulhatunk egy egyenletes eloszlású súlyfüggvénnyel relatíve kis számú véletlen mintát alkalmazva. Ekkor a közelítő a posteriori átlagok felhasználhatók a 0-nál és 1-nél csonkított Cauchy-féle súlyfüggvény momentumaiként. Várható, hogy  $\beta_1$  esetében a közelítő a posteriori momentumok kis pozitív értékeket eredményeznek. Ez a folyamat a fontosság szerinti mintavétel néhányszori megismétlését jelentheti. A súlyfüggvény kialakítására vonatkozó különböző megközelítések összehasonlítása további vizsgálat tárgyát képezi.

### C. Függelék: a számítás pontosságának becslése

A posteriori momentumokat számolunk Monte-Carlo-módszerrel (PMMC). Ez azt jelenti, hogy a szükséges integrálokat meghatározott valószínűségi változók várható értékeként interpretáljuk. Ezen valószínűségi változókra vonatkozó megfigyeléseinket az együttes eloszlásukból húzzuk, melynek sűrűségfüggvénye a súlyfüggvény. Így az integrálási feladatot egy, a hagyományos mintavételi elméletben használatos elemi statisztikai becslési feladattá alakítottuk át. (Részletesebben lásd *Kloek–Van Dijk*, 1978.) Ebből következik, hogy eredményeink pontossága közvetlenül a mintavételek számától ( $N$ ) függ.  $N$  elég nagy értéke esetén a jól ismert aszimptotikusan normális eredmények alkalmazhatók. Így a PMMC eredmények numerikus pontosságát a következő valószínűségi állítással becsülhetjük:

$$P \left[ \frac{|H - \mu|}{\sigma/\sqrt{N}} < 1,96 \right] \geq 0,95 \quad (\text{C.1})$$

mely 95%-os konfidencia intervallumot jelent a  $\mu$  integrálra vonatkozóan egy  $H$  Monte-Carlo becslés körül. A  $\sigma^2$  paraméter az egyes véletlen minták varianciáját jelöli. A  $\mu$  és  $\sigma^2$  becslésének számításáról azon esetekre, ahol  $\mu$  integrálok aránya, bővebben lásd: *Kloek–Van Dijk* (1978, 6. fejezet).

Az elsőrendű a posteriori momentumokat 2 helyiértékes pontossággal mutattuk be e cikkben, s az ezen momentumokra vonatkozó konfidencia intervallumot használjuk integráló eljárásunk számítási pontosságának mértékéül. Ezt mutatja a 8. táblázat. Az elsőrendű PMMC értékeket láthatjuk a 95%-os számított konfidencia intervallum ( $= 1,96\sigma/\sqrt{N}$ ) fél szélességével együtt. A standard kerekítési hibára vonatkozó szabályok szerint két decimális számítás pontosság azt jelenti, hogy a számokat  $\pm 0,005$  maximális hibával közöltük. A 8. táblázatból látható, hogy a strukturális paraméterekre a 95%-os konfidencia intervallum minden esetben kisebb, mint  $2 \times 0,005$ . A tényezőkre az az eredmény adódik, hogy minden számított konfidencia intervallum kisebb, mint  $2 \times 0,01$ , kivéve a redukált nemzeti jövedelem-egyenletben az állami nem-bérjellegű kiadások tényezőjét és a végső tőke-egyenletben szereplő tényezőket. Minden eredményre  $H = 15\,000$ . Egy döntő számítógépes futás  $N = 60\,000$ -re ugyanazt az eredményt adta, így állíthatjuk, hogy a szá-

## 8. táblázat

Az a posteriori átlag becslések számított konfidencia intervallumai\*

Strukturális paraméterek								
$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$
0,12 (0,0032)	0,19 (0,0031)	0,79 (0,0016)	0,06 (0,0022)	0,64 (0,0036)	0,15 (0,0016)	0,34 (0,0039)	0,23 (0,0034)	0,19 (0,0022)
Rövidtávú multiplikatörök								
	$C$	$I$	$W_1$	$P$	$F$	$K$		
$W_2$	1,24 (0,0066)	0,06 (0,0022)	0,44 (0,0065)	0,86 (0,0036)	2,30 (0,0082)	0,06 (0,0022)		
$T$	-0,23 (0,0066)	-0,08 (0,0031)	-0,11 (0,0032)	-1,21 (0,0057)	-1,31 (0,0088)	-0,08 (0,0031)		
$G$	0,58 (0,0092)	0,07 (0,0027)	0,56 (0,0085)	1,09 (0,0045)	1,65 (0,0112)	0,07 (0,0027)		
Hosszútávú multiplikatörök								
	$C$	$I$	$W_1$	$P$	$F$	$K$		
$W_2$	1,88 (0,0056)	0	1,07 (0,0034)	0,82 (0,0035)	2,88 (0,0056)	3,92 (0,0550)		
$T$	-0,75 (0,0082)	0	-0,42 (0,0046)	-1,33 (0,0038)	-1,75 (0,0082)	-6,35 (0,0737)		
$G$	1,39 (0,0054)	0	1,36 (0,0041)	1,04 (0,0033)	2,39 (0,0054)	4,97 (0,0632)		

\* A táblázat a számított konfidencia intervallumok középpontját tartalmazza a zárójelben a megfelelő fél sáv szélességgel ( $1,96\sigma/N$ ).

mított konfidencia intervallum szélessége 2-vel osztható anélkül, hogy a középpontja változna. Ez a hibabecslés megerősíti azt az állítást, hogy — talán a végső törke-egyenleteket kivéve — minden figyelembe vett a posteriori eredményre egy súlyfüggvény alkalmazható.

(Béérkezett: 1979. március 10-én.)

## IRODALOM

1. CHERNOFF, H.—DIVINSKY, N.: The computation of maximum likelihood estimates of linear structural relations. In: HOOD, W. C.—KOOPMANS, T. C. (szerk.): Studies in econometric method. New Haven, 1953. Yale University Press.
2. DHRYMES, PH. J.: Restricted and unrestricted reduced forms: asymptotic distribution and relative efficiency. *Econometrica*. 1973. 41. sz. 119—134. o.
3. DRÈZE, J. H.: The Bayesian approach to simultaneous equation estimation, O. N. R. Research Memorandum 67, Northwestern University, 1962.
4. DRÈZE, J. H.: Bayesian limited information analysis of the simultaneous equations model. *Econometrica* 1976. 44. sz. 1045—1075. o.
5. GILL, L.—BRISSIMIS, S. N.: Polynomial operators and the asymptotic distribution of dynamic multipliers. *Journal of Econometrics*. 1978. 7. sz. 373—384. o.

6. GOLDBERGER, A. S.—NAGAR, A. L.—ODEH, H. S.: The covariance matrices of reduced form coefficients and of forecasts for a structural econometric model. *Econometrica*. 1961. 29. sz. 556—573. o.
7. HALTON, J. H.: Sequential Monte Carlo. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1962. 58. sz. 57—78. o.
8. HAMMERSLEY, J. M.—HANDSCOMB, D. C.: Monte Carlo methods. London, 1964. Methuen.
9. HARKEMA, R.: Simultaneous equations, a Bayesian approach. Rotterdam, 1971. Rotterdam University Press.
10. HENDRY, D. F.: Maximum likelihood estimation of systems of simultaneous regression equations with errors generated by a vector autoregressive process. *International Economic Review*. 1971. 12. sz. 257—272. o.
11. HIMMELBLAU, D. M.: Applied nonlinear programming. New York, 1972. McGraw-Hill.
12. JORGENSEN, D. W.—BRUNDY, J. M.: Consistent and efficient estimation of systems of simultaneous equations by means of instrumental variables. In ZAREMBKA, P. (szerk.): *Frontiers in econometrics*. New York, 1973. Academic Press.
13. KLEIN, L. R.: *Economic fluctuations in the United States, 1921—41*. New York, 1950. Wiley.
14. KLOEK, T.—VAN DIJK, H. K.: Bayesian estimates of equation system parameters; an application of integration by Monte Carlo. *Econometrica*. 1978. 46. sz. 1—19. o.
15. KOOPMANS, T. C.—RUBIN, H.—LEIPNIK, R. B.: Measuring the equation systems of dynamic economics. In: KOOPMANS, T. C. (szerk.): *Statistical inference in dynamic economic models*. Cowles Commission Monograph 10. New York, 1950. Wiley.
16. MIZON, G. E.: Inferential procedures in nonlinear models: an application in a U. K. industrial cross section study of factor substitution and returns to scale. *Econometrica*, 1977. 45. sz. 1221—1242. o.
17. MORALES, J.-A.: Bayesian full information structural analysis. Berlin, 1971. Springer Verlag.
18. OBERHOFER, W.—KMENTA, J.: Estimation of standard errors of the characteristic roots of a dynamic econometric model. *Econometrica*. 1973. 41. sz. 171—177. o.
19. POWELL, M. J. D.: An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives, *Computer Journal* 1964. 5. sz. 155—162. o.
20. ROTHENBERG, T. J.: *Efficient estimation with a priori information*. New Haven, 1973. Yale University Press.
21. ROTHENBERG, T. J.—LEENDERS, C. T.: Efficient estimation of simultaneous equation systems. *Econometrica*. 1964. 32. sz. 57—76. o.
22. SCHMIDT, P.: The asymptotic distribution of dynamic multipliers. *Econometrica*. 1973. 41. sz. 161—164. o.
23. THEIL, H.—BOOT, J. C. G.: The final form of econometric equation systems. Review of the International Statistical Institute. 1962. 30. sz. 136—152. o. Új kiadása: ZELLNER, A. (szerk.): *Readings in economic statistics and econometrics*. Boston, 1968. Little, Brown and Co.
24. THEIL, H.—BOOT, J. C. G.—KLOEK, T.: *Operations research and quantitative economics*. New York, 1965. McGraw-Hill.
25. USPENSKY, J. V.: *Theory of equations*. New York, 1948. McGraw-Hill.
26. VAN DIJK, H. K.—KLOEK, T.: Likelihood diagnostics and a posterior analysis of Klein's model I. Working Paper. Rotterdam, 1977a. Econometric Institute, Erasmus University.
27. VAN DIJK, H. K.—KLOEK, T.: Predictive moments of simultaneous econometric models, a Bayesian approach. In: AYKAÇ, A.—BRUMAT, C. (szerk.): *New developments in the applications of Bayesian methods*. Amsterdam, 1977b. North-Holland.
28. ZELLNER, A.: *An introduction to Bayesian inference in econometrics*. New York, 1971. Wiley.
29. ZELLNER, A.: Maximal data information prior distributions. In: AYKAÇ, A.—BRUMAT, C. (szerk.): *New developments in the application of Bayesian methods*. Amsterdam, 1977. North-Holland.

## POSTERIOR ANALYSIS OF KLEIN'S MODEL I

This paper gives a posterior analysis of Klein's well known model I (Klein [1950]). The underlying prior distribution of the parameters which are interesting for economists is uniform on finite intervals, which exclude "wrong" signs. Monte Carlo is used as a numerical integration method in order to compute posterior results which include posterior moments and marginal posterior densities for structural parameters and for short-run and long-run multipliers. Special attention is paid to the problem of constructing a good weighting function, which is required in the Monte Carlo procedure. In addition, the posterior probability that the model is of the damped oscillatory type is computed and found to be 0.97.

## АПОСТЕРИОРНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИ-1 КЛЕЙНА

В данной статье рассматривается апостериорный анализ известной модели-1 Клейна (Клейн, 1950). Априорное распределение экономически важных параметров является стандартным распределением, интерпретируемым для конечных величин, из которых исключены «плохие» знаки. Метод Монте-Карло был использован для вычисления апостериорных моментов структурных параметров одновременных и запаздывающих мультипликаторов, а также функции предельной плотности. Специальное внимание было уделено формулировке подходящей функции веса, которая необходима для применения метода Монте-Карло. Была вычислена апостериорная вероятность того, что модель выполняет затухающиеся колебания и полученное значение было равно 0,97.