Móczár József

A dekompozábilitás kiterjesztése a gazdaság lineáris modelljeiben

A matematikai-közgazdasági modellezésben a gazdasági rendszerek makroszintű vizsgálatára leggyakrabban felhasznált modellek a linearitás feltevésével élő input-output modellek, a Neumann-modell és ezek különféle speciális változatai. Mind az input-output modellekben, mind a Neumann-modellben, de általában is a gazdaságot többszektoros rendszerként leíró modellekben különféle struktúramátrixok szerepelnek. E struktúramátrixok típusát minden esetben a gazdaság aggregációs szintje határozza meg, amely elsősorban a vizsgálat céljától függ. A gazdaság aggregálása többféleképpen történhet: ágazati (szektor), alágazati, szakágazati, termékcsoportonkénti stb. bontásban; funkcionális (termelőeszközök, fogyasztási cikkek) bontásban; szervezeti elhatárolásban stb. A matematikai-közgazdasági modellekkel végzett elemzéseink eredményességének egyik legfontosabb feltétele a gazdaság minél pontosabb leírása. Ennek pedig egyik összetevője a dezaggregáció foka. A közgazdász egészséges törekvése a dezaggregáció fokozása. Kérdés azonban, vajon meddig mehetünk el matematikai szempontból a dezaggregációval, a túlzottan valósághű ábrázolásra való törekvés fejében nem áldozzuk-e fel a modell működőképességét. A dezaggregáció szintje specifikus tulajdonságokat kölcsönözhet az említett lineáris modellekben szereplő struktúramátrixoknak, nevezetesen dekompozábilissá[1], illetve indekompozábilissá teheti a mátrixokat, ami viszont a modellek viselkedését jelentős mértékben befolyásolja. (A kérdés megválaszolásának természetesen csak elméleti szempontból van jelentősége. Ugyanis a gazdasági struktúra dekompozabilitását az a tény eredményezi, hogy bizonyos ágazatközi kapcsolatokban nincs termékáramlás. Ha a nulla termékáramlás helyett bármilyen piciny $\varepsilon > 0$ értéket szerepeltetünk, a gazdasági struktúra máris indekompozábilis lesz. Ezzel élvezhetjük a modell indekompozabilitásának előnyeit úgy, hogy ez a perturbáció lényegesen nem befolyásolja a kapott eredményeket.)

A dezaggregáció mélységének a közgazdasági és számítástechnikai meggondolásokon túlmenően van egy statisztikai aspektusa is: minél dezaggregáltabb a modell, várhatóan annál kisebb a felhasznált adatok stabilitása, pontossága.

Ebben a tanulmányban lényegében három modell: az input-output modell, a Neumann-modell és a Neumann—Leontief modell strukturális sajátosságait vizsgálom. Kiindulva a Neumann-modell — *D. Gale* által megfogalmazott — indekompozabilitás meghatározásából, a dekompozábilis gazdaságok külön-

[1] Gyakran előfordul az egyes matematikai-közgazdasági művekben a reducibilis terminológia is. A pontos meghatározást lásd később.

féle specifikációit vezetem be; nevezetesen az erősen és a gyengén dekompozábilis gazdaságokat. Minthogy a Leontief- és a Neumann—Leontief modellek a Neumann-modell speciális esetei, ezért ezek az újabb fogalmak kiterjeszthetők ezekre a modellekre is. Mivel a fenti modellek mindegyike a gazdaságot duális összefüggésekkel írja le, ezért elvégezhető az (in) dekompozabilitás duális kiterjesztése: elemzem a technológiai és a gazdasági (in) dekompozabilitás fogalmát, közgazdasági tartalmát, megvizsgálom a dekompozabilitás gyenge és erős válfajainak duális összefüggéseit.

Az egyes modellek strukturális összefüggéseinek fentiekben említett újabb specifikációi és a dualitás bekapcsolása új tételek (l. később a 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9. tételeket) megfogalmazását, az egyes modellek újabb tulajdonságainak feltárását eredményezték.

A tanulmány második felében azt vizsgálom meg, hogy milyen előnyöket nyújthat a gazdaság strukturális összefüggéseit leíró mátrix jellege a fenti modellekkel végzett közgazdasági elemzésekben: rámutatok a technológiailag vagy gazdaságilag indekompozábilis, valamint csak gyengén dekompozábilis struktúrának a modellezés eredményességében játszott szerepére. A Neumann-gazdaságok strukturális sajátosságainak a tanulmányban kifejtett újabb specifikációi lehetővé teszik, hogy tovább bővítsük az unicitást biztosító, speciális struktúrájú Neumann-gazdaságok körét. A tanulmány végén bebizonyítom, hogy (akár technológiailag, akár gazdaságilag) erősen nem dekompozábilis gazdaságok esetében mindig fennáll az unicitás (l. 10. tételt); ennek komplementeréből az unicitást biztosító gazdaságok kiszűrése csak megfelelő további nem-strukturális feltételek bevezetésével lehetséges.

A levezetésekben a következő matematikai jelöléseket használom: $\mathbf{x}'$ az $\mathbf{x}$ vektor transzponáltja;

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{y}: \ \mathbf{x} \geqq \mathbf{y}, \text{ de } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

(In)dekompozábilis gazdaságok modellezése

A címben szereplő „indekompozábilis gazdaság" megtévesztő lehet az olvasó számára; ugyanis ha a gazdaságot például a termelési folyamat metszeteként vizsgáljuk, ilyen gazdaság nem létezik. Biztosan találunk olyan különálló termelési blokkokat, amelyek a gazdaság többi részével nincsenek összefüggésben, tőle függetlenül funkcionálnak, állítják elő termékeiket. Ha viszont a gazdaságot a Neumann-féle felfogásban, ún. fenomenológiai általánosságban vizsgáljuk, akkor a gazdaság csakis indekompozábilis lehet, hiszen ebben az értelemben minden összefügg mindennel. Ez utóbbi értelemben vett vizsgálatra azonban még csak modellcsírákkal sem rendelkezünk; a Szovjetunióban komplex népgazdasági tervezés címén folyó kutatás [19] (komplex modellrendszer és információs adatbázis felépítése) is csak nagyon kezdetleges és vitatott formában folyik. Addig amíg nem rendelkezünk ilyen modellekkel, meg kell elégednünk a gazdaság különféle metszetenkénti vizsgálatával, ahol viszont az indekompozabilitás mindig kérdéses. Belátható, hogy az indekompozabilitás mindig csak egy bizonyos aggregációs szintig létezik, csak eddig a szintig beszélhetünk összefüggő gazdaságról. Nézzük meg milyen kritériumokkal határozható meg az input-output modell, a Neumann-modell és a Neumann—Leontief-modell indekompozabilitása.

Az *input-output modell* esetében az indekompozabilitás fogalmát a zárt, statikus Leontief modell segítségével fogjuk bemutatni. A modell megfogalmazásához tekintsünk egy lineáris, fix koefficiensű termelési modellt több termelési eljárással vagy tevékenységgel, amelyek mindegyike egyetlenegy terméket bocsájt ki (nincs ikertermelés). Valamely termék, mondjuk a j-edik, egységnyi termelése az i-edik termékből a_{ij} mennyiséget igényel. Minthogy a modell lineáris, a j-edik output x_j mennyisége az i-edik inputból $a_{ij}x_j$ mennyiséget használ fel. Mivel fix termelési koefficiensek vannak, ezért az inputok között nincs helyettesíthetőség, azaz x_j termékmennyiséghez az i-edik inputból $a_{ij}x_j$, a k-adik inputból pedig $a_{kj}x_j$ mennyiség szükséges. Amennyiben az input-termékek halmaza megegyezik az output-termékek halmazával és nincs más input-forrás csak a folyó termelés, akkor a zárt input-output modell mérlegegyensúlyi feltételeit $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{x}$ lineáris egyenlőtlenség-rendszerrel írhatjuk le, ahol $\mathbf{A}$ az a_{ij} input-koefficiensekből (folyó ráfordítási együtthatókból) álló inputmátrix, amely per definitionem nemnegatív. Ha kikötjük, hogy minden egyes termék előállítása legalább egy termékből igényel ráfordítást, valamint minden egyes termék hozzájárul legalább egy termék előállításához, akkor $\mathbf{A}$ szemipozitív mátrix.

Matematikailag nézve, az hogy egy x_j változó szerepel-e a k. összefüggésben vagy sem, a megfelelő a_{kj}-től függ. Ha a_{kj} zérus, akkor a j-edik termék kibocsátásához a k-adik termékből nem kell közvetlenül ráfordítás: a két terméket előállító szektor között nincs ilyen irányú függőség a termelési folyamatban. Az indekompozabilitást az ilyen jellegű kapcsolatok száma és a szektorok közötti eloszlása dönti el. Ugyanis, ha az $[a_{ij}]$ mátrixban kellő számú zérus van megfelelő helyen, akkor az indekompozábilis jelleg megszűnik.

A sor-, illetve oszlopindexek segítségével egzakt, konstruktív eljárást adó definíciót fogalmazhatunk meg egy tetszőleges nemnegatív (csak erre van értelme) n-edrendű mátrix dekompozábilitásának eldöntésére.[2]

1. definíció (Leontief-dekompozábilitás)

> Az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ mátrix dekompozábilis, ha van olyan valódi I részhalmaza az $\{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmaznak, hogy $a_{ij} = 0$, $\forall\, i \in \bar{I}$, $j \in I$, (egyébként indekompozábilis.).

Ez azt jelenti, hogy az I-be tartozó szektorok nem használnak fel az $\bar{I}$-be tartozó szektorok kibocsátásaiból. Az I-be tartozó szektorok az inputokból történő ellátást tekintve autark helyzetben vannak. Ez azonban nem feltétlenül jelenti azt, hogy az I-beni szektorok termékeire nem mutatkozik kereslet az $\bar{I}$-beni szektorok részéről. Más szavakkal az $\mathbf{A}$ dekompozábilitása nem szükségszerűen jelenti azt, hogy $a_{ij} = 0$, ha $i \in I$, $j \in \bar{I}$. A dekompozábilis gazdaságban a szektorcsoportok sorbarendezhetők oly módon, hogy egyik szektorcsoport sem használja fel a sorban előtte levő szektorcsoportok termékeit.

[2] A dekompozabilitás fogalma, eredetét tekintve, először a Markov-lánc tulajdonságainak leírásánál szerepelt (l. pl. [8], [9]). Ezt a definíciót vették át később (elsők között: R. Solow [28], G. Debreu, I. N. Herstein [7] stb.) a lineáris modellek struktúráinak jellemzésére. Az itt szereplő 1. definíció megfogalmazásánál Nikaidó [26] művét vettük alapul; egyébként többféle kritérium létezik a dekompozabilitás eldöntésére (l. például: [12], [27]).

Ha $a_{ij} = 0$, $\forall i \in I$, $j \in \bar{I}$, valamint $\forall i \in \bar{I}, j \in I$ is, akkor a rendszer teljesen szétválik két I és $\bar{I}$ szektorcsoportra, amelyek mindegyike autark helyzetben van és amelyek között nincs tranzakció. A gazdaság ekkor teljesen dekompozábilis, azaz „szétesik" a termelési folyamatban egymástól függetlenül funkcionáló blokkokra.

A dekompozábilis $\mathbf{A}$ mátrix sorainak és oszlopainak átrendezésével, azaz egy megfelelően megkonstruált $\mathbf{P}$ permutáló mátrix segítségével

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22} \end{pmatrix}$$

alakra hozható, amelyben a $\mathbf{D}_{11}$ az I-be tartozó szektorok közötti termékáramlást tartalmazza és $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}'$. Az egyenlet jobb oldalán levő hipermátrix szimmetrikusan particionált (vagyis a diagonális blokkok kvadratikusak).

Természetesen lehetséges olyan gazdaság is, amelyben több, egymástól függetlenül funkcionáló blokk létezik. Általában a fenti szimmetrikus átrendezéssel az ilyen gazdaságok struktúramátrixai a következő alakra hozhatók:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \ldots \mathbf{0} & \mathbf{D}_{1k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22} & \mathbf{0} \ldots \mathbf{0} & \mathbf{D}_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \ldots \mathbf{D}_{k-1,k-1} & \mathbf{D}_{k-1,k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \ldots \mathbf{0} & \mathbf{D}_{kk} \end{pmatrix},$$

ahol a $\mathbf{D}_{11}, \mathbf{D}_{22}, \ldots, \mathbf{D}_{kk}$ mátrixok kvadratikusak. Amennyiben a fődiagonális felett valamennyi blokkban szemipozitív mátrixok szerepelnek, úgy ismét csak egy független termékcsoport adható meg, amelynek kijelölése viszont $(k-1)$-féleképpen lehetséges.

Az input-output modell dekompozabilitásával kapcsolatos a következő két tétel, amelynek bizonyításánál Nikaidó [26] gondolatmenetét vettük alapul.

1. tétel: Egy nemnegatív kvadratikus mátrix dekompozabilitása invariáns a transzponálás műveletére.

Bizonyítás: Feltevésünk szerint $a_{ij} = 0$ $\forall i \in \bar{I}$, $j \in I$, ahol I az $\{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmaz egy valódi részhalmaza. $\mathbf{A}' = [a_{ji}]$, amelyben $a_{ji} = 0$ $\forall i \in I$, $j \in \bar{I}$, ahol $\bar{I}$ szintén egy valódi részhalmaza az $\{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmaznak. Hasonló érveléssel mutatható meg, hogy $\mathbf{A}'$ dekompozábilitása egyúttal $\mathbf{A}$ dekompozábilitását is jelenti, mivel $\mathbf{A} = \mathbf{A}''$.

2. tétel: Az $\mathbf{A} = [a_{ij}] \geq 0$ mátrix dekompozábilis akkor és csak akkor, ha létezik olyan nemnegatív ϱ valós szám és szemipozitív $\mathbf{x}$ vektor (amelynek nem minden komponense pozitív), amelyek kielégítik az $\mathbf{Ax} \leq \varrho\mathbf{x}$ összefüggést.

Bizonyítás: (i) Szükségesség. Legyen $\mathbf{x}_1$ egy tetszőleges pozitív vektor és $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. Ekkor meg tudunk adni egy olyan nemnegatív ϱ valós számot, amelyre

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \leq \varrho \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Átrendezve: $\mathbf{Ax} \leqq \varrho\mathbf{x}$, ahol $\mathbf{x} = \mathbf{P}\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$

(ii) Elégségesség. Legyen $I = \{j \mid x_j > 0,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq \varrho x_j\}$. A feltevés szerint az I egy valódi részhalmaza az $\{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmaznak. Az $\mathbf{Ax} \leqq \varrho\mathbf{x}$ egyenlőtlenségek között szerepelnek

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq 0, \quad i \in \bar{I}$$

alakú egyenlőtlenségek is, amelyek bal oldalán szereplő összeadandók nemnegatívak, úgyhogy $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0\ (\forall i \in \bar{I})$. Ekkor, mivel $x_j > 0, \forall j \in I$, kapjuk: $a_{ij} = 0,\ \forall i \in \bar{I},\ j \in I$, azaz $\mathbf{A}$ dekompozábilis.

Megjegyzendő, hogy a fenti tételben foglalt állítás igaz $\varrho > 0$ feltétel mellett is. Ebből következik, hogy az állítás igaz úgy is, hogy $\exists \alpha > 0$ és $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, amelyre $\alpha\mathbf{Ax} \geq \mathbf{x}$. Látni fogjuk, hogy ebben a formában a vizsgált tétel értelemszerűen kiterjeszthető a Neumann-modell erős dekompozábilitására, amelynek vizsgálatára most térünk át.

A *Neumann-modell*ben a technológiai sajátosságokat leíró input-output mátrix a termelési tevékenységeken keresztül két mátrixban: a **C** fogyasztási (felhasználási) és a **B** kibocsátási mátrixban jut kifejezésre. A **C** mátrix általános c_{ij} eleme azt mutatja meg, hogy a j-edik tevékenység egységnyi szinten történő alkalmazása hány egységet igényel az i-edik termékből, a **B** mátrix általános b_{ij} eleme pedig azt, hogy a j-edik tevékenység egységnyi szinten történő alkalmazása hány egységet eredményez az i-edik termékből. Mindkét mátrix $n \times m$ típusú nemnegatív mátrix, ahol n a termékek számát, m pedig a tevékenységek számát jelöli.

A továbbiakban feltesszük[3], hogy $\sum_{i=1}^{n} c_{ij} > 0\ (j = 1, \ldots, m)$ és $\sum_{j=1}^{m} b_{ij} \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, ami azt jelenti, hogy minden egyes tevékenység legalább egy terméket felhasznál, illetve minden egyes termék termelhető legalább egy tevékenységgel. Lényeges, hogy a modell feltételrendszere megengedi az ikertermelést is: így a **B** mátrix oszlopvektoraiban egynél több pozitív elem is szerepelhet.

A Neumann-gazdaság indekompozábilitását annak a kérdésnek megválaszolása dönti el, hogy ki tudunk-e választani a tevékenységek halmazából olyan tevékenységköteget (-kötegeket), amelybe (amelyekbe) tartozó tevékenységek csak olyan termékekből „fogyasztanak", amelyekből gyakorlásuk eredményeként kibocsátanak. Nemleges válasz esetén a gazdaság indekompozábilis, ellenkező esetben pedig dekompozábilis, amelyen belül megkülönböztetem az erősen és a gyengén dekompozábilis eseteket.

Először vezessük be D. Gale [12] nyomán a dekompozábilis gazdaság egzakt kritériumának megfogalmazásához szükséges független (önálló) termékcsoport fogalmát.

[3] Ezt a feltevést eredetileg *Kemeny*, *Morgenstern* és *Thompson* vezették be [16], biztosítva ezzel a modell megoldásának egzisztenciáját (l. később).

2. definíció (független termékcsoport):

A termékek $\{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmazának I valódi részhalmazát függetlennek nevezzük, ha a tevékenységek $\{1, 2, \ldots, m\}$ indexhalmazának van olyan nem üres J részhalmaza, hogy $c_{ij} = 0$, $\forall i \in \bar{I}$, $j \in J$ és $b_{ij} > 0$, $\forall i \in I$, valamely $j \in J$-re.

Független termékcsoport létezése közgazdaságilag azt jelenti, hogy lehetséges az adott I csoportba tartozó terméket előállítani anélkül, hogy a többi termékből felhasználnánk. Ezek után meghatározhatjuk a dekompozábilis Neumann-gazdaság fogalmát és a különböző specifikációit.

3. definíció (Neumann-dekompozábilitás):

A Neumann-gazdaság dekompozábilis, ha létezik független I halmaz. Adott I független termékcsoport esetén a dekompozábilis gazdaságokat az alábbi módon osztályozhatjuk:

$\mathcal{A}$: erősen dekompozábilis, ha $b_{ij} = 0$, $\forall i \in \bar{I}$, $j \in J$;

$\mathcal{B}$: gyengén dekompozábilis, ha $b_{ij} > 0$ néhány $i \in \bar{I}$, $j \in J$ esetén.

Nyilvánvaló, hogy vannak olyan Neumann-gazdaságok, amelyek erősen is és gyengén is dekomponálhatók, attól függően, hogy hogyan választjuk meg a független termékcsoportot. A definíció alapján az összes elképzelhető Neumann-gazdaságon belül (jelöljük ezek halmazát $\mathcal{H}$-val) a következő típusokat különböztethetjük meg:

1) erősen dekompozábilis: $\mathcal{A}$
2) gyengén dekompozábilis: $\mathcal{B}$
3) dekompozábilis: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$
4) indekompozábilis: $\mathcal{H} - (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$
5) csak gyengén dekompozábilis: $\mathcal{B} - \mathcal{A}$
6) csak erősen dekompozábilis: $\mathcal{A} - \mathcal{B}$.

Megjegyzendő, hogy a Neumann-modell növekedési és kamattényezőjének unicitását ez idáig csak az indekompozábilis esetre bizonyították. Később megmutatom, hogy a fenti unicitás fennáll akkor is, ha a gazdaság csak gyengén dekompozábilis. Ennek bizonyításához hasznos lesz az alábbi tétel, amely a Leontief-gazdaság dekompozábilitásával kapcsolatban megfogalmazott 2. tétel analógja[4] a Neumann-gazdaság esetében:

3. tétel:[5] A $(\mathbf{C}, \mathbf{B})$ strukturális mátrixokkal megadott Neumann-gazdaság akkor és csak akkor erősen dekompozábilis, ha van olyan szemipozitív $\mathbf{x}$ vektor és pozitív α valós szám, amelyekre $\alpha\mathbf{C}\mathbf{x} \leq \mathbf{B}\mathbf{x}$ és $\mathbf{B}\mathbf{x} \not> \mathbf{0}$.

Bizonyítás: (i) Elégségesség. A $\mathbf{C}$ fogyasztási mátrixra tett kikötés értelmében $\mathbf{1}'\mathbf{C} > \mathbf{0}'$. Ezért egy szemipozitív $\mathbf{x}$ vektorral való szorzata, $\mathbf{C}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, amiből figyelembe véve $\alpha > 0$ kikötést, a $\mathbf{B}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ következik. Legyen $I = \{i \mid \mathbf{b}_i'\mathbf{x} > \mathbf{0}\}$, ahol $\mathbf{b}_i'$ a $\mathbf{B}$ mátrix i-edik sorvektora; mivel $\mathbf{B}\mathbf{x} \not> \mathbf{0}$, ezért

[4] A tétel megfogalmazásáért *Zalai* Ernőnek tartozom köszönettel, aki hasznos észrevételeivel segítségemre volt a dekompozábilitás egyéb jellemzőinek megvitatásában is.

[5] Hasonló tétel fogalmazható meg a dekompozábilitásra vonatkozóan is, amelyben a $\mathbf{B}\mathbf{x} \not> \mathbf{0}$ kikötés helyett szükséges és elégséges feltételként a $\mathbf{C}\mathbf{x} \not> \mathbf{0}$ szerepel.

I és $\bar{I}$ egyike sem üres halmaz. Legyen $J = \{j \mid x_j \geqslant 0\}$; feltevésünk miatt $J \neq \emptyset$. Mivel $\sum_{j=1}^{m} b_{ij}x_j \geq \alpha \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_j$ és $\sum_{j=1}^{m} b_{ij}x_j = 0$, $\forall i \in \bar{I}$, $\alpha > 0$, ezért $b_{ij} = c_{ij} = 0$, $\forall i \in \bar{I}, j \in J$. Nyilvánvaló, hogy a $\sum_{j=1}^{m} b_{ij}x_j > 0$ összefüggésből következik, hogy $b_{ij} > 0$, $\forall i \in I$ valamely $j \in J$ mellett. Mindezek következtében a $(\mathbf{C}, \mathbf{B})$ erősen dekompozábilis.

(ii) Szükségesség. Legyen $(\mathbf{C}, \mathbf{B})$ erősen dekompozábilis; tehát megadható egy független I halmaz, azaz a struktúramatrixok megfelelő átrendezéssel:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$$

alakra hozhatók, ahol $\mathbf{C}_{21} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B}_{21} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{B}_{11}\mathbf{1} > \mathbf{0}$. Mivel $\mathbf{1}'\mathbf{C}_{11} > \mathbf{0}'$ és $\mathbf{B}_{11}\mathbf{1} > \mathbf{0}$, ezért[6] a $(\mathbf{C}_{11}, \mathbf{B}_{11})$ Neumann algazdaságra $\exists \alpha^{(1)} > 0$ és pozitív $\mathbf{x}^{(1)}$ vektor, amelyek mellett $\alpha^{(1)}\mathbf{C}_{11}\mathbf{x}^{(1)} \leq \mathbf{B}_{11}\mathbf{x}^{(1)}$. Legyen most $\mathbf{x} = [\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{0}]$, és $\alpha = \alpha^{(1)}$, ezek nyilván kielégítik a tétel kívánalmait.

Az erős dekompozábilitás kritériumára szintén adhatunk egy konstruktív eljárást adó definíciót. Ha összeadjuk a $\mathbf{C}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokat, amit azonos méreteik miatt megtehetünk, akkor egy olyan mátrixot kapunk, amelynek egyes oszlopai az egyes tevékenységek egységnyi szinten történő gyakorlásában felmerülő inputokat és outputokat tartalmazzák. Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{C} + \mathbf{B}$. A $(\mathbf{C}, \mathbf{B})$ Neumann-gazdaságot erősen dekompozábilisnek nevezzük, ha az $\{1, 2, \ldots, n\}$ és az $\{1, 2, \ldots, m\}$ indexhalmazokat particionálni tudjuk két olyan I és $\bar{I}$, valamint J és $\bar{J}$ részhalmazaira (egyik sem üres), hogy $a_{ij} = 0$, $\forall i \in \bar{I}, j \in J$. Amennyiben $a_{ij} = 0$, $\forall i \in \bar{I}, j \in J$ valamint $\forall i \in I, j \in \bar{J}$ mellett is, úgy a Neumann-gazdaság teljesen dekompozábilis. A teljesen dekompozábilis esetben is értelmezhetők a dekompozábilis Neumann-gazdaságok különféle osztályai.

Minthogy a Leontief-modell a Neumann-modell speciális esete[7], ezért erre is értelmezhető a Neumann-dekompozábilitás. Könnyen megmutatható, hogy a Neumann-dekompozábilitás tágabb fogalom, mint a Leontief-dekompozábilitás, abban az értelemben, hogy amíg egy Leontief-gazdaság lehet Neumann-dekompozábilis gyengén, addig, mint Leontief-dekompozábilis gazdaság, mindig csak erősen dekompozábilis. A Leontief-gazdaság gyengén dekompozábilis jellege azt jelenti, hogy bizonyos számú termék kibocsátása e termékcsoportba tartozó kevesebb számú termék felhasználásával történik. Ebben az esetben az inputmátrix szimmetrikus átrendezése után

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{22} \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk, ahol a $\mathbf{D}_{11}$ nem kvadratikus mátrixot jelöl (még pontosabban: sorainak száma kevesebb oszlopainak számánál.)

Tehát a Neumann-dekompozábilitás értelmezhető a Leontief-gazdaságra is, és ha egy Leontief-gazdaság Neumann-dekompozábilis, akkor nyilván mindig Leontief-dekompozábilis is. A továbbiakban meg fogjuk mutatni a Neumann—

[6] Ennek indoklását l. később a Neumann-modell vizsgálatánál.
[7] Ld. erre vonatkozóan [3], [14].

Leontief modell kapcsán (aminek a Leontief-gazdaság szintén egy speciális esete), hogy minden gyengén dekompozábilis Neumann—Leontief gazdaság egyúttal erősen is dekomponálható.

A *Neumann—Leontief modell* két kikötésben különbözik a Neumann-modelltől: 1) minden egyes szektor több különböző termelési eljárás (tevékenység) közül választhat; 2) ikertermékeket eredményező tevékenységeket nem szerepeltet. Az első kikötés értelmében legyen m_j azon tevékenységek száma, amelyek közül a j-edik szektor választhat. Egy tevékenység, mondjuk a j-edik szektor $s_j(l_j \leq s_j \leq m_j)$ tevékenysége egy n-dimenziós oszlopvektorral definiálható: azaz $c_{s_j} = (c^1_{s_j}, \ldots, c^n_{s_j})'$, amelynek komponensei a j-edik ágazat egységnyi outputjához szükséges inputokat mutatják. A második kikötés kizárja az ikertermelés lehetőségét, ezért a **B** kibocsátási mátrix egy csupa nullákból és egyesekből álló mátrix, amelynek az i-edik sorából az első $m_1 + m_2 + \ldots + m_{i-1}$ számú elem zérus, melyet m_j egyes követ, majd ismét $m_{i+1} + \ldots + m_n$ számú zérus következik.

A tevékenységek teljes halmazát, azaz az input-koefficiensek mátrixát jelölje az $n \times m$-es nemnegatív **C** mátrix:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c^1_{l_1} \ldots c^1_{m_1} \ldots c^1_{l_2} \ldots c^1_{m_2} \ldots c^1_{l_n} \ldots c^1_{m_n} \\ c^2_{l_2} \ldots c^2_{m_1} \ldots c^2_{l_2} \ldots c^2_{m_2} \ldots c^2_{l_n} \ldots c^2_{m_n} \\ c^n_{l_1} \ldots c^n_{m_1} \ldots c^n_{l_2} \ldots c^n_{m_2} \ldots c^n_{l_n} \ldots c^n_{m_n} \end{pmatrix},$$

ahol $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ a tevékenységek száma, n pedig a termékek száma. Mivel ikertermék a modellben nem szerepelhet, ezért az output-koefficiensek mátrixa a következő alakban írható fel:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \ldots 1 \; 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 \; 1 \ldots 1 \ldots 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots 0 \; 0 \ldots 0 \ldots 1 \ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Jelölje továbbra is I a termékek $\{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmazának egy valódi részhalmazát; J_j a j-edik szektor rendelkezésére álló tevékenységek halmazát, azaz $J_j = \{l_j, \ldots, m_j\}$, J pedig az $\bigcup_{j=1}^{n} J_j$ egy nem üres részhalmazát jelöli. Mivel minden egyes szektor valamennyi rendelkezésére álló tevékenységgel (technológiával) ugyanazt a terméket állítja elő, mégpedig egységnyi szinten, ezért a szektorok száma megegyezik a termékek számával. Megfelelő indexeléssel könnyen elérhetjük, hogy a megfelelő szektorok és termékek azonos sorszámúak legyenek. (Egyébként a **C** illetve a **B** mátrixok felírásánál mi is így jártunk el.)

A Neumann-dekompozábilitás fogalmát sajátosan megfogalmazva azt mondhatjuk, hogy a Neumann—Leontief gazdaság dekompozábilis, ha $\exists I$ és J, amelyekre $c^i_{s_j} = 0$, $\forall i \in \bar{I}$, $s_j \in J$; erősen dekompozábilis, ha $J \subset \bigcup_{j \in I} J_j$, egyébként gyengén dekompozábilis.

4. *tétel:* Bármely dekompozábilis Leontief- vagy Neumann—Leontief modell erősen is dekompozábilis.

Bizonyítás: Vegyük az általánosabb Neumann—Leontief modell esetét; ekkor feltevésünk értelmében $\exists I$ és J, amelyekre $c^i_{s_j} = 0$, $\forall i \in \bar{I}$, $s_j \in J$. Amennyiben a $J \subset \bigcup_{j \in I} J_j$, úgy a modell per definitionem erősen dekompozábilis; ha viszont J tartalmaz $s_j(\in \bigcup_{j \in \bar{I}} J_j)$-ket is, akkor gyengén dekompozábilis. Az erős dekompozábilitás kritériumának előállításához elegendő a következő transzformáció: a J-ből hagyjuk ki azokat az s_j-ket, amelyek az $\bigcup_{j \in \bar{I}} J_j$ halmazba tartoznak és jelöljük a redukált halmazt J'-vel. Az így megválasztott I és J' indexhalmazok már biztosítják az erős dekompozábilitást.

Következmény: Csak gyengén dekompozábilis Neumann—Leontief vagy Leontief-modell nem létezik.

5. *tétel:* Minden erősen dekompozábilis Leontief-modell esetében $I = J$. A tétel bizonyítása könnyen elvégezhető a 4. tétel felhasználásával, ezért azt az Olvasóra bízzuk.

Következmény: A Leontief-dekompozábilitás értelmezhető.

Tegyük fel, hogy valamennyi szektor a rendelkezésére álló tevékenységkötegből egyetlen tevékenységet választ ki[8]. Ha eme tevékenységek ráfordításvektorait egy mátrixban fogjuk össze és $\mathbf{C}_k$-val jelöljük, akkor az összes lehetséges $\mathbf{C}_k$ mátrixok száma $\prod_{j=1}^{n} m_j$ lesz. A dekompozábilitás problémája ebben az esetben a $(\mathbf{C}_k, \mathbf{E})$ Leontief-algazdaságok vizsgálatára vezethető vissza. Ezzel kapcsolatos a következő három tétel.

6. *tétel:* A Neumann—Leontief modell struktúrája akkor és csak akkor dekompozábilis, ha létezik $(\mathbf{C}_k, \mathbf{E})$ dekompozábilis Leontief-algazdaság.

Bizonyítás: (i) Elégségesség. Legyen a dekompozábilis k. Leontief-algazdaság ráfordítási mátrixa $\mathbf{C}_k = [\mathbf{c}_{s_{1k}}, \mathbf{c}_{s_{2k}}, \ldots, \mathbf{c}_{s_{jk}}, \ldots, \mathbf{c}_{s_{nk}}]$, ahol s_{jk} a j-edik ágazatnak a k-adik algazdaságba kerülő tevékenysége. Mivel $\mathbf{C}_k$ dekompozábilis, ezért $\exists I_k$ valódi részhalmaz, amelyre $c^i_{s_{kj}} = 0$, $\forall i \in \bar{I}_k$, $j \in I_k$. Legyen most $I = I_k$, $J = \{s_j \mid s_j = s_{jk}, j \in I_k\}$. Az I és J felosztás természetéből következik, hogy a Neumann—Leontief modell struktúrája dekompozábilis.

(ii) Szükségesség. Ha a Neumann—Leontief gazdaság dekompozábilis, akkor a 4. tétel értelmében erősen is dekompozábilis. Ezért a struktúramátrixok megfelelő átrendezéssel következő alakra hozhatók:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{pmatrix}$$

[8] Általában ilyen megoldások elemzésével találkozhatunk a szakirodalomban. L. például [20], [22].

ahol $\mathbf{C}_{21} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B}_{11}\mathbf{1} > \mathbf{0}$ és $\mathbf{B}_{21} = \mathbf{0}$. Nyilvánvaló, hogy minden olyan Leontief-algazdaság dekompozábilis, amelyet úgy kapunk meg, hogy az első blokkba tartozó termékeket előállító ágazatok tevékenységeit ugyancsak az első tevékenységblokkba tartozók közül választjuk ki.

7. tétel: Ha a Neumann—Leontief modell struktúrája olyképpen Neumann-dekompozábilis, hogy $J_j \subseteq J$ $\forall j \in I$-re, akkor az összes lehetséges $(\mathbf{C}_k, \mathbf{E})$ Leontief-algazdaság Leontief-dekompozábilis, ahol $k = 1, 2, \dots, \prod_{j=1}^{n} m_j$

Bizonyítás: A feltevés értelmében a Neumann—Leontief modell struktúrája dekompozábilis, mégpedig olyképpen, hogy $\exists I$ és J, amelyekre $c^i_{s_j} = 0$ $\forall i \in \bar{I}$, $s_j \in J \supseteq \bigcup_{j \in I} J_j$. Jelöljük a $j \in I$ termékek előállítására rendelkezésre álló J_j tevékenységhalmazból egy-egy tevékenységet tartalmazó halmazt J'-vel. Mivel az összes lehetséges $(\mathbf{C}_k, \mathbf{E})$ Leontief-gazdaságban a tevékenységek tartalmazzák J', amelyre $c^i_{s_j} = 0$ $\forall i \in \bar{I}$, $s_j \in J'$, ezért bármelyik Leontief-algazdaság Leontief-dekompozábilis J' szerint.

8. tétel: Ha valamennyi $(\mathbf{C}_k, \mathbf{E})$ Leontief-algazdaság olyképpen dekompozábilis, hogy az egyes Leontief-algazdaságokhoz tartozó független I_k indexhalmazokra

$$\bigcup_{k=1}^{\prod_{j=1}^{n} m_j} I_k = I \subset \{1, 2, \dots, n\}$$

teljesül, akkor ezen C_k-ből megkonstruálható Neumann—Leontief gazdaság is dekompozábilis.

Bizonyítás: A feltevés értelmében minden egyes Leontief-algazdaság dekompozábilis, így valamennyi esetében $\exists$ a termékek indexhalmazának egy olyan I_k valódi részhalmaza, hogy a struktúramátrixok megfelelő átrendezéssel a következő alakra hozhatók:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{k_{11}} & \mathbf{C}_{k_{12}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{k_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{22} \end{pmatrix},$$

ahol $\mathbf{1}'\mathbf{C}_{k_{11}} > \mathbf{0}'$, $\mathbf{E}_{11}\mathbf{1} = \mathbf{1}$, az $\mathbf{E}_{11}$ és $\mathbf{E}_{22}$ megfelelő rendű egységmátrixok Legyen J azon tevékenységek indexhalmaza, amelyek az egyes Leontief-algazdaságokban a független I_k-hoz tartozó termékeket állítják elő. Ekkor $c^i_{s_j} = 0$, $\forall i \in \bar{I} = \bigcap_k \bar{I}_k$, $s_j \in J$, ahol $\bar{I} \neq \emptyset$, azaz a Neumann—Leontief gazdaság Neumann-dekompozábilis I és J szerint.

Végül érdemes még megemlíteni, hogy M. *Morishima* az (in)dekompozábilitás fogalmát a fentiektől eltérően értelmezi. Definícióját (l. alább) az egyensúlyi növekedés általános modellje, a *Gale modell*[9] segítségével adja meg. A modell megfogalmazásánál abból a feltevésből indulunk ki, hogy a gazdaságban n számú terméket állítanak elő. A termelési lehetőségeket a $T(\mathbf{q}, \mathbf{y})$

[9] A modell leírását l. [22], [26] magyarul [14] könyvekben.

val,[10] azaz a $(\mathbf{q}, \mathbf{y})$ n-elemű vektorpár segítségével értelmezett transzformációs halmazzal adjuk meg, ahol az $\mathbf{y}$ vektor a $\mathbf{q}$ vektorral jelölt input-termékekből a technológiailag lehetséges kibocsátásokat foglalja magába.

4. Definíció (Morishima-dekompozábilitás):

Legyen $I(\mathbf{q}, \mathbf{y}) = \{i \mid q_i = 0 \text{ és/vagy } y_i = 0\}$.

A T halmaz dekompozábilis a $(\mathbf{q}, \mathbf{y})$ pontban, ha $I(\mathbf{q}, \mathbf{y}) \neq \emptyset$ és ha $I(\mathbf{q}, \mathbf{y})$ nem tartalmaz egyetlen olyan i indexet sem, amelyre $q_i > 0$ vagy $y_i > 0$. Más szavakkal, a T technológiai halmaz a $(\mathbf{q}, \mathbf{y})$ pontban dekompozábilis, ha a termékek $\{1, 2, \ldots, n\}$ indexhalmazának van olyan valódi $I(\mathbf{q}, \mathbf{y})$ részhalmaza, hogy mind $q_i = 0$, mind $y_i = 0$, $\forall i \in I(\mathbf{q}, \mathbf{y})$, de mind $q_i > 0$, mind $y_i > 0$ $\forall i \in \bar{I}(\mathbf{q}, \mathbf{y})$.

A Neumann-modell keretei között a technológiai halmaz következőképpen fogalmazható meg:

$$T(\mathbf{q}, \mathbf{y}) = \{(\mathbf{q}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{q} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Morishima definíciója értelmében, akkor nevezhetnénk egy Neumann-gazdaságot (in)dekompozábilisnak, ha (nem) létezne a gazdaságnak olyan erős dekompozíciója, amely esetén $\mathbf{C}_{11}\mathbf{1} > \mathbf{0}$ lenne. Ugyanis dekompozábilis a gazdaság Morishima szerint akkor, ha

$$\exists \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ és } I \subset \{1, 2, \ldots, n\}, I \neq \emptyset, \text{ hogy } \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_j > 0$$

és

$$\sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_j > 0 \quad \forall i \in \bar{I} \text{ és } \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_j = 0 \quad \forall i \in I.$$

Ekkor viszont $c_{ij} = b_{ij} = 0$ $\forall i \in I$, $j \in J = \{j \mid x_j > 0\}$, azaz a gazdaság erősen dekompozábilis az $\bar{I}$ független termékcsoport szerint. Mivel ugyanakkor $\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_j > 0$ $\forall i \in \bar{I}$, $j \in J$, ezért $c_{ij} > 0$ legalább egy $i \in \bar{I}$, $j \in J$ indexpár mellett, azaz $\sum_{j \in J} c_{ij} > 0$ $\forall i \in \bar{I}$. Megfordítva: ha a Neumann-gazdaság erősen dekompozábilis és $\mathbf{C}_{11}\,\mathbf{1} > \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{x}$ alkalmas megválasztásával (pl. $\mathbf{C}_{11}$ oszlopvektoraihoz pozitív x_j-ket rendelve, a többit pedig 0-nak véve) megmutatható, hogy a Neumann-gazdaság az adott $\mathbf{x}$ vektor mellett Morishima-dekompozábilis.

A fentiekben csak a statikus, illetve stacioner modellek struktúramátrixait vizsgáltam. Anélkül, hogy részletesen belemennénk a dinamikus modellek vizsgálatába, röviden kitérek a *zárt dinamikus input-output modell* struktúramátrixaira. Ha a modell szokásos elméleti-közgazdasági feltevései értelmében megállapodunk abban, hogy minden egyes periódusban pótolják az elhasznált állóeszközöket, akkor a pótlás az $\mathbf{A}$ folyó ráfordítások mátrixában szerepel, a termelésnövekedés egységéhez szükséges állóeszközöket egy külön mátrixban, a beruházási koefficiensek mátrixában szerepeltetjük. Az értelmezésből világos, hogy a gazdaság dekompozábilitását csakis a folyó ráfordításokat

[10] A T halmazra megfogalmazott tulajdonságok (l. pl. [26] magyarul [14]) következtében a (q, y) vektorpárok az E^{2n} nemnegatív ortansában egy zárt konvex kónuszt alkotnak.

magába foglaló mátrix segítségével vizsgálhatjuk. A fenti értelmezés mellett ugyanis a beruházási koefficiensek mátrixa általában nem „örökli" a folyó ráfordítások mátrixának struktúráját.

Az (in)dekompozábilitás duális kiterjesztése

Az indekompozábilitás fogalmát olyan lineáris modellek segítségével fogalmaztuk meg, amelyek mindegyikére jellemző a dualitás. „Az, hogy a termelés konkrét dologi arányainak megoldásait ugyanazon koefficiensekből vezetik le, mint amelyek a másik oldalon a termelés értékelését (árait, árnyékárait, termelési árát stb.) is meghatározzák."[11] A fentiekben tárgyalt különféle (in)dekompozábilitás fogalmak az egyes lineáris modellek termelési feltételeivel kapcsolatos tulajdonságokon alapulnak. A lineáris modellek dualitásával kapcsolatban mondottak alapján merült fel, hogy az egyes modellek értékfolyamatok alakulását leíró feltételeivel kapcsolatban is, azaz a duális oldalról is megvizsgáljam az indekompozábilitást.

Az (in)dekompozábilitás előzőekben megfogalmazott definíciói, minthogy a termelés alakulását leíró összefüggéseken alapulnak — S. M. *Robinson*[12] terminológiájával — a gazdaság *technológiai (in)dekompozábilitását* írják le. Az indekompozábilitás eme fogalmát érdemes megfogalmazni — a továbbiak könnyebb megértése végett — a korábbival teljesen azonos jelentésben, de eltérő formában. Könnyen megmutatható ugyanis, hogy az alábbi definíció egyenértékű a 3. definícióval.

3'. definíció (technológiai (in)dekompozábilitás):

> A $(\mathbf{C}, \mathbf{B})$ Neumann-gazdaság technológiailag (in)dekompozábilis, ha $\mathbf{Cx} \not> \mathbf{0}$ $(\mathbf{Cx} > \mathbf{0})$ valamely (minden) szemipozitív $\mathbf{x}$ vektorra, amely mellett $\alpha\mathbf{Cx} \leqq \mathbf{Bx}$ és $\alpha > 0$.

A technológiailag indekompozábilis struktúra tehát azt jelenti, hogy egy ilyen gazdaság csak úgy képes működni $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$, ha $\mathbf{Bx} > \mathbf{0}$, azaz minden termékből termelnek. (Vegyük észre, hogy $\mathbf{Bx} > 0$ csak szükséges feltétel.)

Amennyiben az indekompozábilitást az értékáramlások alapján vizsgáljuk, a technológiai (in)dekompozábilitás duálisát, a *gazdasági (in)dekompozábilitás* fogalmát kapjuk meg.

5. definíció (gazdasági (in)dekompozábilitás):

> A $(\mathbf{C}, \mathbf{B})$ Neumann-gazdaság gazdaságilag (in)dekompozábilis, ha $\mathbf{p}'\mathbf{B} \not> \mathbf{0}'$ $(\mathbf{p}'\mathbf{B} > \mathbf{0}')$ valamely (minden) szemipozitív $\mathbf{p}$ vektorra, amely mellett $\mathbf{p}'\mathbf{B} \leqq \beta\mathbf{p}'\mathbf{C}$ és $\beta > 0$.

A gazdaságilag indekompozábilis gazdaságban minden tevékenység pozitív értéket eredményez, mégpedig úgy, hogy valamennyi lehetséges szemipozitív árrendszerhez található olyan pozitív kamattényező, hogy egyetlen tevékenység sem realizál a kamattényező által meghatározottnál nagyobb jövedelmet.

[11] L. [3]-ban 119. oldalon.

[12] Időközben bukkantam rá S. M. Robinson [27] tanulmányára, aki hasonló eredményeket ért el az indekompozábilitás duális kiterjesztésében.

Másként megfogalmazva ez annyit jelent, hogy egy ilyen gazdaságban csak úgy lehet az ún. non-profit feltételeket kielégítő pozitív kamattényezőt és szemipozitív árrendszert megadni, ha minden tevékenység pozitív értéket hoz létre, *vagyis* a gazdaság gazdaságilag dekompozábilis, ha egy lehetséges értékelési rendszerben valamely tevékenység(ek) csak szabad javakat (termékeket) állítanak elő.

A definíciók alapján könnyen belátható, hogy a kétféle indekompozábilitás egymástól független. Dekompozábilis esetben viszont bizonyítható: ha egy gazdaság csak erősen dekomponálható technológiailag, akkor gazdaságilag is dekomponálható (erősen is), és a dualitás szempontjából vice versa; gyengén dekompozábilis esetekben semmi biztosat nem tudunk mondani.

A Neumann-modell speciális eseteire, a Leontief- és a Neumann—Leontief modellekre is értelmezhető a gazdasági indekompozábilitás.

A Neumann-gazdaságok a gazdasági (in)dekompozábilitás szempontjából ugyanolyan típusokba sorolhatók, mint a technológiai (in)dekompozábilitás szempontjából. Az eddig kimondott tételek mindegyike fennáll a gazdasági (in)dekompozábilitás esetére is. Minthogy a következő részben kardinális szerepet kap a 3. tétel, ezért ennek a gazdaságilag indekompozábilis esetre vonatkozó transzformációját bizonyításával együtt megadjuk. (Az analógia megőrzése végett az 5. definícióban szereplő kritériumok transzponáltját veszszük.[13]

9. tétel: (3. tétel duálisa)

A $(\mathbf{C}, \mathbf{B})$ strukturális mátrixokkal megadott Neumann-gazdaság akkor és csak akkor gazdaságilag erősen dekompozábilis, ha vanolyan szemipozitív p vektor és pozitív β valós szám, amelyekre $\beta\mathbf{C}'\mathbf{p} \geq \mathbf{B}'\mathbf{p}$ és $\mathbf{C}'\mathbf{p} \not> \mathbf{0}$.

Bizonyítás: (i) Elégségesség. A $\mathbf{B}$ kibocsátási mátrixra tett kikötés értelmében $\mathbf{1}'\mathbf{B}' > \mathbf{0}$. Ezért egy szemipozitív $\mathbf{p}$ vektorral való szorzata, $\mathbf{B}'\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, amiből figyelembe véve $\beta > 0$ kikötést, a $\mathbf{C}'\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ következik. Legyen $J = \{j \mid \mathbf{c}_j\mathbf{p} > 0\}$, mivel $\mathbf{C}'\mathbf{p} \not> \mathbf{0}$, ezért J és $\bar{J}$ egyike sem üres halmaz. Legyen $I = \{i \mid p_i > 0\}$; feltevésünk miatt $I \neq \emptyset$. Mivel $\sum_{i=1}^{n} b_{ji}\, p_i \leq \beta \sum_{i=1}^{n} c_{ji} p_i$ és $\sum_{i=1}^{n} c_{ji} p_i = 0$, $\forall j \in \bar{J}$, $\beta > 0$, ezért $c_{ji} = b_{ji} = 0$, $\forall j \in I$. Nyilvánvaló, hogy a $\sum_{i=1}^{n} c_{ji} p_i > 0$ összefüggésből következik, hogy $c_{ji} > 0$, $\forall j \in J$ valamely $i \in I$ mellett. Mindezek következtében a $(\mathbf{C}, \mathbf{B})$ gazdaságilag erősen dekompozábilis.

(ii) Szükségesség. Legyen $(\mathbf{C}, \mathbf{B})$ gazdaságilag erősen dekompozábilis; tehát megadható egy független J halmaz, azaz a struktúramátrixok megfelelő átrendezéssel

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}'_{11} & \mathbf{B}'_{21} \\ \mathbf{B}'_{12} & \mathbf{B}'_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{C}'_{11} & \mathbf{C}'_{21} \\ \mathbf{C}'_{12} & \mathbf{C}'_{22} \end{pmatrix}$$

[13] Itt az 5. definíciót olyképpen értelmezzük, hogy a $(\mathbf{C}, \mathbf{B})$ Neumann-gazdaság gazdasági indekompozábilitása a $(\mathbf{B}', \mathbf{C}')$ technológiai indekompozábilitásával ekvivalens.

alakra hozhatók, ahol $\mathbf{B}'_{12} = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}'_{12} = \mathbf{0}$, és $\mathbf{C}'_{11}\mathbf{1} > \mathbf{0}$. Mivel $\mathbf{1}'\mathbf{B}'_{11} > \mathbf{0}'$ és $\mathbf{C}'_{11}\mathbf{1} > \mathbf{0}$, ezért[14] a $(\mathbf{C}_{11}, \mathbf{B}_{11})$ Neumann-algazdaságra $\exists \beta^{(1)} > 0$ és szemipozitív $\mathbf{p}^{(1)}$ vektor, amelyek mellett $\beta^{(1)}\mathbf{C}'_{11}\mathbf{p}^{(1)} \geq \mathbf{B}'_{11}\mathbf{p}^{1}$. Legyen most $\mathbf{p} = [\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{0}]'$ és $\beta = \beta^{(1)}$, ezek nyilván kielégítik a tétel kívánalmait.

Az indekompozábilis és a csak gyengén dekompozábilis gazdaságok modellezésének előnyei

Az előzőekben közgazdaságilag értelmeztük az indekompozábilitást (technológiai és gazdasági), megfogalmaztuk az egyes lineáris gazdasági modellekben az indekompozábilitás kritériumait. Bevezettük mind technológiai, mind gazdasági értelemben az erősen és gyengén dekompozábilis gazdaságok fogalmát és kritériumait. Ebben a részben azt vizsgálom meg, hogy milyen előnyöket nyújthat a gazdaság strukturális összefüggéseit leíró mátrix jellege a fenti modellekkel végzett közgazdasági elemzésekben; rámutatok a technológiailag és a gazdaságilag indekompozábilis, valamint csak gyengén dekompozábilis struktúrának a modellezés eredményességében játszott szerepére.

Mielőtt rátérnénk az egyes modellek vizsgálatára, röviden összefoglalom a többszektoros lineáris modellek elemzésében, illetve megoldásában központi szerepet játszó *Perron-Frobenius tételeket*. Jelen tanulmány szempontjából különös jelentőséggel bírnak azok a tételek, amelyek az indekompozábilitás esetére vonatkoznak. Tekintettel arra, hogy nem célom újabb bizonyításokat adni, ezért a tételek igazolásától eltekintek. (Az érdeklődő Olvasó a bizonyításokat megtalálhatja pl. a [26], [18] könyvekben.)

PF 1. Legyen $\mathbf{A}$ egy nemnegatív kvadratikus mátrix. Ekkor a következőket állítjuk:

(i) $\mathbf{A}$-nak van nemnegatív sajátértéke. Az összes nemnegatív sajátérték közül a legnagyobb λ sajátértékhez nemnegatív sajátvektor is tartozik;
(ii) $\varrho\mathbf{E} - \mathbf{A}$ akkor és csak akkor invertálható nemnegatívan, ha $\varrho > \lambda$;
(iii) ha $\mathbf{Ax} \geq \mu\mathbf{x}$ egy valós μ számra és egy szemipozitív $\mathbf{x}$ vektorra, akkor $\lambda \geq \mu$;
(iv) $\lambda \geq |\omega|$ az $\mathbf{A}$ mátrix bármely ω sajátértékére;
(v) ha az $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ mátrix j-edik oszlopösszegét s_j, az i-edik sor összegét r_i jelöli, akkor

$$\min_{1 \leq j \leq n} s_j \leq \max \lambda \leq \max_{1 \leq i \leq n} s_j$$

illetve
$$\min_{1 \leq i \leq n} r_i \leq \max \lambda \leq \max_{1 \leq i \leq n} r_i.$$

A fentiekben definiált λ sajátértékét az $\mathbf{A}(\geq \mathbf{0})$ mátrix Perron—Frobenius gyökének vagy domináns sajátértékének nevezzük és a továbbiakban $\lambda(\mathbf{A})$-val jelöljük. Bebizonyítható, hogy $\lambda(\mathbf{A})$ *domináns sajátértékre a következő tulajdonságok érvényesek:*

[14] L. később

(i) $\lambda(\mathbf{A}) = \lambda(\mathbf{A}')$
(ii) $\lambda(\alpha\mathbf{A}) = \alpha\lambda(\mathbf{A})$ $\alpha \geq 0$-ra
(iii) $\lambda(\mathbf{A}^k) = (\lambda(\mathbf{A}))^k$ egy tetszőleges pozitív integer k-ra.
(iv) $\lambda(\mathbf{A}) \geq \lambda(\mathbf{B})$, ha $\mathbf{A} \geq \mathbf{B} \geq \mathbf{0}$.
(v) $\lambda(\mathbf{A}) \geq \lambda(\mathbf{C})$, ha $\mathbf{C}$ az $\mathbf{A}$ mátrix tetszőleges főminormátrixa.
(vi) $\lambda(\mathbf{A}) = 0$, akkor és csak akkor, ha $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ valmilyen $k > 0$-ra.

Az eddigiek során $\mathbf{A}$-ról csak azt kötöttük ki, hogy nemnegatív. Ha kikötjük $\mathbf{A}$ indekompozábilitását is, akkor újabb tételeket fogalmazhatunk meg, illetve néhány fenti tétel következőképpen módosul:

PF 2. Legyen $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ indekompozábilis mátrix. Ekkor a következőket állítjuk:

(i) $\lambda(\mathbf{A})$-hoz pozitív sajátvektor tartozik és $\lambda(\mathbf{A}) > 0$;
(ii) $\lambda(\mathbf{A})$-hoz tartozó sajátvektorok tere egydimenziós.
(iii) a $(\varrho\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ összefüggésekből következik a $(\varrho\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \geq \mathbf{0}$;
(iv) $(\varrho\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} > \mathbf{0}$;
(v) $\lambda(\mathbf{A}) > \lambda(\mathbf{B})$, ahol $\mathbf{A} \geq \mathbf{B} \geq \mathbf{0}$ és $\mathbf{A}$ vagy $\mathbf{B}$ egyike indekompozábilis;
(vi) $(\lambda(\mathbf{A})\,\mathbf{E} - \mathbf{A})$ mátrix bármely főminora pozitív;
(vii) $\lambda(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ karakterisztikus egyenletének egyszeres gyöke
(viii) $\min\limits_{1\leq j\leq n} s_j < \lambda(\mathbf{A}) < \max\limits_{1\leq j\leq n} s_j$, ha $\min s_j \neq \max s_j$,

illetve

$$\min_{1\leq i\leq n} r_i < \lambda(\mathbf{A}) < \max_{1\leq i\leq n} r_i, \text{ ha } \min r_i \neq \max r_i.$$

A *zárt input-output* modell vizsgálatánál tekintsük a modell stacioner növekedési változatát: azaz a kibocsátás rögzített ráfordítási arányok mellett az $\alpha(> 0)$ növekedési tényező szerint változatlan arányban nő. A modell termelési volumenekre vonatkozó mérlegegyensúlyi összefüggése következőképpen írható fel: $\alpha\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \geq 0$, $\alpha > 0$. Könnyen belátható, hogy a zárt input-output modell stancioner változata az $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ Neumann-modell[15] (i) feltételi egyenlőtlenségének egy speciális esete, ahol $\mathbf{B} = \mathbf{E}$. (Hasonlóképpen mutatható meg, hogy az értékfolyamatokra felírt mérlegegyensúlyi összefüggés a Neumann-modell (ii) összefüggése, $\mathbf{B} = \mathbf{E}$ esetén.) A modellel végezhető közgazdasági elemzés egyik célkitűzése, olyan maximális α_0 növekedési tényező meghatározása,[16] amely mellett az egyes szektorok kibocsátása megegyezik a szektorok ,,termelői'' felhasználásával; azaz $\mathbf{x}_0 = \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}_0$. Amennyiben átírjuk az egyensúlyi megoldást eredményező fenti egyenletet $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = (1/\alpha_0)\mathbf{x}_0$ alakra, könnyen belátható, hogy az $(1/\alpha_0)$ az $\mathbf{A}$ mátrix egy pozitív sajátértéke, az $\mathbf{x}_0$ pedig a megfelelő nemnegatív sajátvektor. A fenti közgazdasági feladat megoldása tehát az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ sajátérték-problémára vezethető vissza. A megoldás során úgy járunk el, hogy a pozitív sajátértékek közül a legkisebbet választjuk a hozzá tartozó nemnegatív sajátvektorral (-kal), minthogy így kapunk olyan termékstruktúrát, amely maximális növekedés mellett biztosítja az egyensúlyt. A fenti gondolatmenetből is kitűnik, hogy a közgazdasági probléma megoldása ebben a formában nem egyértelmű; nem mindig teljesül az $\mathbf{x}$

[15] L. később
[16] A probléma megoldását és bizonyítását l. [12]-ben 317. old.

vektor pozitivitása sem. A Perron—Frobenius tételek[17] alapján viszont könnyen belátható, hogy ha az **A** mátrix indekompozábilis (az 1. tétel következtében itt a technológiai indekompozábilitás egyúttal gazdasági is), akkor a $\lambda(\mathbf{A})$ domináns sajátérték és a hozzá tartozó sajátvektor is pozitív és egyértelműen meghatározott. (Hasonló eredményt kapunk az értékfolyamatok vizsgálatánál is.)

Itt említjük meg, hogy Marx újratermelési elméletének input-output modell segítségével megadott általánosításai során is jelentős szerepet játszik a gazdasági struktúra indekompozábilitása (L. erről bővebben [3], [14], [22], [23], [24]).

A nyílt statikus input-output modell esetén az alapprobléma a termelési volumenekre úgy fogalmazható meg, hogy egy nemnegatív végső keresletvektor és a szemipozitív **A** inputmátrix segítségével meghatározható-e olyan nemnegatív **x** termelési vektor, amely pontosan fedezi a végső keresletet és a termelő fogyasztást. Közismert a megoldás: a termelési vektort az **A** Leontief inverze[18] és a végső keresletvektor szorzata határozza meg. A nemnegatív **x** vektor biztosítására két lehetőség kínálkozik: 1) ha **A** produktív, azaz ha $\exists$ nemnegatív **x** vektor, amelyre $\mathbf{Ax} < \mathbf{x}$[19]; 2) ha **A** Leontief inverze pozitív. A Perron—Frobenius tételek közül a PF. 2. (iv) alapján belátható: ha **A** indekompozábilis és $\lambda(\mathbf{A}) < 1$ úgy $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ mindig pozitív. A $\lambda(\mathbf{A}) < 1$ mindig teljesül, mivel a nyílt input-output modell **A** mátrixában az oszlopösszegek mindegyike kisebb mint egy, így állításunk a PF 2. (viii) tétel alapján könnyen belátható. A második lehetőséghez elegendő tehát csak az **A** mátrix indekompozábilitását biztosítani, ami egyébként a megoldás egyértelműségét is garantálja. Érdekes megfigyelni, hogy amíg **A** produktivitása nemnegatív kibocsátás-vektor mellett csak nemnegatív végső keresletvektort biztosít, addig **A** indekompozábilitása a határozottan pozitív kibocsátási vektorra szemipozitív keresletvektort eredményez.

(A gazdaság duális oldalára, az értékfolyamatokra vonatkozó modellezésben hasonlóképpen mutatható meg a nemnegatív árvektor létezése.)

A *Neumann-modellt* következőképpen fogalmazhatjuk meg:

i) $(\mathbf{B}-\alpha\mathbf{C})\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

(ii) $\mathbf{p}'(\mathbf{B}-\beta\mathbf{C}) \leq \mathbf{0}'$

(iii) $\mathbf{p}'(\mathbf{B}-\alpha\mathbf{C})\mathbf{x} = 0$

(iv) $\mathbf{p}'(\mathbf{B}-\beta\mathbf{C})\mathbf{x} = 0$

(v) $\mathbf{p}' \geq \mathbf{0}'; \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \alpha > 0, \beta > 0,$

ahol **p** az árvektor, **x** a tevékenységi szintek vektora, β az általános kamattényező és α a növekedési tényező.

A modell egyes kikötéseinek közgazdasági tartalma rendre:

(i) nem lehet egyetlen termékből sem többet fogyasztani, figyelembe véve a bővülést is, mint amennyi rendelkezésre áll;

(ii) egyensúlyi helyzetben egyik tevékenység sem tartalmazhat több nyereséget, mint amennyit az átlagos kamattényező meghatároz;

[17] L. előzőekben PF 2 (*i*) tételét.

[18] Értsd: Leontief—Minkowski-féle mátrix inverze.

[19] Bizonyítását l. [12]-ben 296. oldalon.

(iii) ha fölös termék van, amelyet a modellben nem használnak fel, akkor az szabaddá válik és az ára zérus lesz;

(iv) ha valamely tevékenység nem biztosítja az egész gazdaságra jellemző átlagos kamattényező által meghatározott nyereséget, akkor ez az eljárás ,,veszteségesnek" minősül, tovább nem fogják felhasználni, s így alkalmazási szintje zérus lesz;

(v) megoldásként olyan szemipozitív ár- és tevékenységi szintvektort, valamint pozitív növekedési és kamattényezőt keresünk, amelyek kielégítik a modell összefüggéseit.

Neumann tehát az egyensúlyt mint az egyensúlyba hozott növekedés állapotát határozta meg, amelyben a struktúramátrixok, az árak és a kamatláb az idő függvényében változatlanok, a termelési tevékenységek intenzitása pedig valamennyi tevékenységre ugyanazon arányossági tényező alapján mértani haladvány szerint nő (vagy csökken). Champernowne terminológiája szerint ezt az egyensúlyi állapotot kvázistacioner állapotnak tekinthetjük, mivel a gazdaságban csak a méretek változnak, a strukturális arányok viszont nem.[20].

Neumann tanulmányában[21] a Brouwer-féle fixponttétel általánosítása segítségével bizonyítja be a modell egzisztenciáját. Megmutatta továbbá, hogy bármely $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$ egyensúlyi megoldáshoz tartozó α_0-ra és β_0-ra teljesül az egyenlőség és a megoldás ezekre a változókra egyértelmű (unicitás). A bizonyítás során a következő megszorításokat vezette be a struktúramátrixokra: $\mathbf{C}, \mathbf{B} \geq \mathbf{0}$, és $\mathbf{C} + \mathbf{B} > \mathbf{0}$. Később Kemeny, Morgenstern és Thompson tanulmányukban[22] bebizonyították, hogy ez a feltétel egy gyengébb és közgazdaságilag is jobban értelmezhető feltételpárra cserélhető ki; nevezetesen $\mathbf{C}\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ $\forall \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ és $\mathbf{p}'\mathbf{B} \geq \mathbf{0}'$ $\forall \mathbf{p}' \geq \mathbf{0}'$. Ha viszont ilyen feltételek mellett keressük az egyensúlyi megoldást, akkor az unicitás teljesüléséhez további feltételek bevezetése szükséges. Hosszú ideig az irodalomban (l. például [11], [14], [17], [20], [22]) csak a Gale-től származó technológiai indekompozábilitás feltétele mellett bizonyították az unicitást. Bár tudott volt, hogy az unicitásnak ez csak elégséges, de nem szükséges feltétele. Például Gale a [11] tanulmányában (298—299 oldalakon) egy olyan Neumann-modellt írt fel, amely technológiailag dekompozábilis, mégis meg lehetett mutatni, hogy $\alpha_0 = \beta_0$. Robinson kimutatta, hogy mindezt a modell gazdaságilag indekompozábilis jellege biztosította, és az említett tanulmányában bebizonyította, hogy a gazdaságilag indekompozábilis Neumann-gazdaságok esetében is mindig teljesül az unicitás.

A Neumann-gazdaságok strukturális sajátosságainak az előzőekben kifejtett további specifikációi lehetővé teszik, hogy tovább bővítsük az unicitást biztosító Neumann-gazdaságok körét. Megmutatom ugyanis, hogy a technológiailag vagy gazdaságilag *csak gyengén dekompozábilis* gazdaságok esetében is $\alpha_0 = \beta_0$.

Legyen α_0 a maximális növekedési tényező, azaz azon α-k maximuma, amelyek valamely szemipozitív $\mathbf{x}$ mellett eleget tesznek a $(\mathbf{B} - \alpha\mathbf{C})\,\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ feltételnek. Hasonlóképpen, legyen β_0 a minimális kamattényező, azaz azon β — k minimuma, amelyek valamilyen szemipozitív $\mathbf{p}$ mellett kielégítik a

[20] L. részletesebben [5]-ben.
[21] L. [25].
[22] Ld. [16]

$\mathbf{p}'(\mathbf{B} - \beta\mathbf{C}) \leq \mathbf{0}'$ egyenlőséget. A Neumann-modell egyensúlyi megoldása létezésének bizonyításából ismert[23], hogy a fenti α_0 és β_0 létezik és $0 < \beta_0 \leq \alpha_0$. Ilyen általános esetben bármilyen $\gamma \in [\beta_0, \alpha_0]$ érték mellett létezik a Neumann-modellnek megoldása.[24]

Most bebizonyítjuk, hogy ha a gazdaság (akár technológiailag, akár gazdaságilag) indekompozábilis, vagy csak gyengén dekompozábilis, akkor $\alpha_0 = \beta_0$ és a Neumann-modell minden lehetséges megoldásában $\alpha = \beta$. Mivel ha $\alpha = \beta$, akkor szükségképpen $\beta_0 \leq \beta = \alpha \leq \alpha_0$, ezért a $\beta_0 = \alpha_0$ egyenlőség a kamat- és növekedési tényező unicitását is implikálja.

10. tétel: Ha a gazdaság technológiailag és/vagy gazdaságilag erősen nem dekompozábilis, akkor csak egyetlen $\alpha_0 = \beta_0$ mellett létezik megoldása a Neumann modellnek.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $\beta_0 \leq \alpha_0$, azért az egyenlőség teljesüléséhez elegendő a $\beta_0 \geq \alpha_0$ összefüggést bizonyítani. Legyen $\mathbf{x}_0$ egy olyan szemipozitív vektor, amely mellett

$$\mathbf{B}x_0 \geq \alpha_0 \mathbf{C}\mathbf{x}_0, \tag{1}$$

továbbá $\mathbf{p}_0$ egy olyan szemipozitív vektor, amelyre

$$\mathbf{p}_0'\mathbf{B} \leq \beta_0 \mathbf{p}_0'\mathbf{C} \tag{2}$$

egyenlőtlenség fennáll. Az (1) egyenlőtlenséget $\mathbf{p}_0'$-vel, a (2) egyenlőtlenséget $\mathbf{x}_0$ vektorral megszorozva, majd a kapott egyenlőtlenségket sorbaállítva kapjuk, hogy

$$\alpha_0 \mathbf{p}_0'\mathbf{C}\mathbf{x}_0 \leq \mathbf{p}_0'\mathbf{B}\mathbf{x}_0 \leq \beta_0 \mathbf{p}_0'\mathbf{C}\mathbf{x}_0.$$

Nyilván elegendő most már azt megmutatni az $\alpha_0 \leq \beta_0$ egyenlőtlenség belátásához, hogy $\mathbf{p}_0'\mathbf{C}\mathbf{x}_0$ pozitív, amellyel végigosztva az egyenlőtlenség-sorozat tagjait, a jelzett egyenlőtlenség igazolt. A $\mathbf{p}_0'\mathbf{C}\mathbf{x}_0$ pozitivitását kétféleképpen is beláthatjuk:

(i) Közvetlen eset. A $\mathbf{p}_0'\mathbf{C}\mathbf{x}_0 > 0$ összefüggés $\mathbf{x}_0$ szemipozitivitása miatt fennáll valahányszor $\mathbf{p}_0'\mathbf{C} > \mathbf{0}'$. Ez utóbbi viszont teljesül a gazdaságilag erősen nem dekompozábilis esetben. Ugyanis $\mathbf{p}_0$ szemipozitív, β_0 pozitív és eleget tesznek a (2) feltételnek, ezért a 9. tétel értelmében $\mathbf{p}_0'\mathbf{C} > \mathbf{0}'$ fennáll.

(ii) Közvetett eset. Először a $\mathbf{p}_0'\mathbf{B}\mathbf{x}_0 > 0$ egyenlőtlenséget mutatjuk meg, ami a (2) következtében implikálja a $\mathbf{p}_0'\mathbf{C}\mathbf{x}_0 > 0$ összefüggést. A $\mathbf{p}_0'\mathbf{B}\mathbf{x}_0 > 0$ viszont $\mathbf{p}_0'$ szemipozitivitása miatt fennáll, valahányszor $\mathbf{B}\mathbf{x}_0 > \mathbf{0}$. Ez utóbbit viszont garantálja az a feltevés, hogy a gazdaság technológiailag erősen nem dekompozábilis. Ugyanis $\mathbf{x}_0$ szemipozitív, α_0 pozitív és eleget tesznek az (1) feltételnek, ezért a 3. tétel értelmében $\mathbf{B}\mathbf{x}_0$ szükségképpen pozitív.

Hasonlóképpen bizonyíthatjuk, hogy a Neumann-modell minden lehetséges megoldásában $\alpha = \beta$. Ugyanis a Neumann-modell (iii) és (iv) feltételeiből kö-

[23] L. például [12], [17], [20], [26] illetve magyarul [14].
[24] Bizonyítását l. pl. [26], magyarul [14] könyvekben.

vetkezik, hogy minden lehetséges megoldásban fennáll az

$$\alpha \mathbf{p}'\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{p}'\mathbf{B}\mathbf{x} = \beta \mathbf{p}'\mathbf{C}\mathbf{x}$$

A gazdaság strukturális jellege következtében $\mathbf{p}'\mathbf{B}\mathbf{x} > 0$, valamint $\mathbf{p}'\mathbf{C}\mathbf{x} > 0$ is, ezért $\alpha = \beta = \mathbf{p}'\mathbf{B}\mathbf{x}/\mathbf{p}'\mathbf{C}\mathbf{x}$.

Mivel minden technológiailag erősen nem dekompozábilis Neumann-gazdaságban: $\mathbf{p}'\mathbf{B}\mathbf{x} > \mathbf{0}$, ahol $\mathbf{p}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\alpha > 0$ és $\mathbf{B}\mathbf{x} \geq \alpha\mathbf{C}\mathbf{x}$, valamint minden gazdaságilag erősen nem dekompozábilis Neumann-gazdaságban: $\mathbf{p}'\mathbf{C}\mathbf{x} > \mathbf{0}$, ahol $\mathbf{p}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\beta > 0$ és $\mathbf{p}'\mathbf{B} \leq \beta p'\mathbf{C}$, ezért $\mathbf{p}'\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{p}'\mathbf{B}\mathbf{x} > 0$. Ez utóbbi egyenlőtlenséget átalakítva kapjuk $\mathbf{p}'(\mathbf{C} + \mathbf{B})\mathbf{x} > 0$, ami — figyelembe véve, hogy $\mathbf{p}'$ és $\mathbf{x}$ szemipozitív vektorok — csak úgy teljesülhet, ha $\mathbf{C} + \mathbf{B} > \mathbf{0}$. Ez pedig éppen Neumann eredeti feltétele. Azt kaptuk tehát, hogy minden olyan Neumann-gazdaság, amelynek struktúramátrixai az eredeti Neumann feltevés mellett eleget tesznek az ún. Kemeny—Morgenstern—Thompson feltételeknek is, az erősen nem dekomponálható (akár technológiai, akár gazdasági értelemben) Neumann-gazdaságok egy valódi részhalmazát alkotják.

Eddigi eredményeink alapján, figyelembe véve az (in)dekompozábilitás duális kiterjesztését is, a Kemeny—Morgenstern—Thompson feltételeket kielégítő Neumann-gazdaságok közül 12 specifikus struktúrájú gazdaság egyensúlyi megoldásában teljesül az unicitás. A fennmaradó 4-féle, különböző struktúrájú gazdaságban továbbra is csak a $\beta_0 \leq \alpha_0$ egyenlőtlenség bizonyított. Az alábbi táblázatban egybefoglaltuk az összes, különféle struktúrájú Neumann-gazdaságot, amelyben — korábbi jelöléseinknek megfelelően — $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ ill. $\mathcal{A}'$ és $\mathcal{B}'$ a technológiailag erősen és gyengén ill. gazdaságilag erősen és gyengén dekompozábilis gazdaságokat jelölnek.

G \ T	$\overline{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}$	$\mathcal{B} - \mathcal{A}$	$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$	$\mathcal{A} - \mathcal{B}$
$\overline{\mathcal{A}' \cup \mathcal{B}'}$	$\alpha_0 = \beta_0$	$\alpha_0 = \beta_0$	$\alpha_0 = \beta_0$	$\alpha_0 = \beta_0$
$\mathcal{B}' - \mathcal{A}'$	$\alpha_0 = \beta_0$	$\alpha_0 = \beta_0$	$\alpha_0 = \beta_0$	$\alpha_0 = \beta_0$
$\mathcal{A}' \cap \mathcal{B}'$	$\alpha_0 = \beta_0$	$\alpha_0 = \beta_0$	$\alpha_0 \geqq \beta_0$	$\alpha_0 \geqq \beta_0$
$\mathcal{A}' - \mathcal{B}'$	$\alpha_0 = \beta_0$	$\alpha_0 = \beta_0$	$\alpha_0 \geqq \beta_0$	$\alpha_0 \geqq \beta_0$

Úgy tűnik, hogy a táblázat jobb alsó 2×2-es sarkába tartozó technológiailag, vagy gazdaságilag erősen dekompozábilis gazdaságokra (vagy azok egy részére) az unicitás pusztán csak $\mathbf{C}$ és $\mathbf{B}$ strukturális sajátosságai alapján nem biztosítható. Ezt látszik bizonyítani jó néhány tanulmány, l. például [4], [15], [21], [29], amelyekben az unicitást biztosító szükséges és elégséges feltételekben $\mathbf{C}$ és $\mathbf{B}$ strukturális sajátosságai mellett szerepelnek a gazdasághoz, illetve megfelelően kialakított algazdaságokhoz tartozó maximális növekedési és a minimális kamattényezők, valamint az ezekhez tartozó egyensúlyi intenzitás- és árvektorok. Illusztrációképpen vegyük H. J. *Jaksch* tételét, amely egy szükséges és elégséges feltételrendszer bevezetésével lehetővé teszi az unicitást biztosító erősen dekompozábilis Neumann-gazdaságok kiszűrését.

A tétel megfogalmazása előtt felírunk egy olyan speciális struktúrájú (**C**, **B**) Neumann-gazdaságot, amelyről kimutatható, hogy a $[(\mathcal{A}-\mathcal{B})\cup(\mathcal{A}\cap\mathcal{B})]\cap\cap[(\mathcal{A}'-\mathcal{B}')\cup(\mathcal{A}'\cap\mathcal{B}')]$ strukturális tulajdonságú Neumann-gazdaságok mindegyikét magába foglalja.

Legyen az I_1, I_2, I_3 egy olyan páronként diszjunkt felosztása termékek indexhalmazának, amelyre $I_1\cup I_2\cup I_3=\{1, 2, \ldots, n\}$ és J_1, J_2, J_3 hasonló tulajdonságú felosztása a tevékenységek indexhalmazának. Az I_1, I_3 és a J_1, J_3 részhalmazok legyenek nem üresek; az I_2 és J_2 részhalmazok egymástól függetlenül lehetnek üresek is (lényegében ezektől függően tartozhat (**C**, **B**) a négyféle specifikáció valamelyikébe). Legyen továbbá:

$$c_{ij}=0,\ \forall i\in I_2\cup I_3,\ j\in J_1 \text{ és } b_{ij}=0,\ \forall i\in I_3,\ j\in J_1\cup J_2.$$

A fogyasztási, illetve kibocsátási mátrixok fentieket kielégítő particionálásai következő alakot öltik:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22} & \mathbf{C}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{32} & \mathbf{C}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{33} \end{pmatrix}.$$

Amennyiben eme erősen dekompozábilis Neumann-gazdaságok közül azokat vesszük, amelyekre $\mathbf{B}_{11}\mathbf{1}>0$ és $\mathbf{1}'\mathbf{C}_{33}>\mathbf{0}'$, akkor az így előálló (**C**, **B**) Neumann-gazdaság mellett a $(\mathbf{C}_{11}, \mathbf{B}_{11})$ és a $(\mathbf{C}_{33}, \mathbf{B}_{33})$ algazdaságok is kielégítik a Kemeny—Morgenstern—Thompson feltételeket. Ekkor mindhárom gazdaság esetében meghatározhajuk a maximális növekedési és minimális kamattényezőt és a hozzájuk tartozó intenzitási és árvektorokat. Jelöljük ezeket rendre:

$$(\alpha_0, \mathbf{x}_0; \beta_0, \mathbf{p}_0);\ (\alpha_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(1)}, \beta_0^{(1)}, \mathbf{p}_0^{(1)});\ (\alpha_0^{(3)}, \mathbf{x}_0^{(3)}; \beta_0^{(3)}, \mathbf{p}_0^{(3)})$$

négyesekkel. Ezek után megfogalmazhatjuk Jaksch tételét:[25]

11. tétel:[26] Ha az erősen dekompozábilis (akár technológiailag, akár gazdaságilag) Neumann-gazdaságnak van a fentiekben megadott olyan dekompozíciója, amelyekre $\mathbf{B}_{11}\mathbf{1}>\mathbf{0}$, $\mathbf{1}'\mathbf{C}_{33}>\mathbf{0}'$, és $\alpha_0^{(1)}>\beta_0^{(3)}$, akkor és csak akkor $\alpha_0>\beta_0$.

A bizonyítás eredményeként azt kapjuk, hogy ezekben a Neumann-gazdaságokban $\alpha_0=\alpha_0^{(1)}$, $\beta_0=\beta_0^{(3)}$ és $\mathbf{x}=[\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{0}, \mathbf{0}]'$, $\mathbf{p}'=[\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{p}_0^{(3)}]$.

[25] Ezt a tételt, illetve ezzel egyenértékű tételt levezethetjük *Bromek* [4] tanulmánya alapján is, ahol a szerző az eltérő megoldások előállítására ad algoritmust. Itt jegyzem meg, hogy a dekompozábilitás kiterjesztésével megadható egy olyan dekompozíció, amely több a Bromek által javasoltnál, ez ugyanis képes kimutatni a „finomabb" strukturális sajátosságot, nevezetesen a gyengén dekompozábilis struktúra előnyeit is. Ezt egy következő tanulmányban szándékozom részletesen kifejteni.

[26] Bizonyítást l. [15]-ben.

Következtetések

A fenti vizsgálatok alapján megmutattuk, hogy a gazdaság aggregációját kifejező struktúramátrixok jellegének, azaz dekompozábilis (erősen, gyengén és csak gyengén) illetve indekompozábilis voltának jelentős szerepe van a modellezés eredményeinek közgazdasági értelmezésében. Beláttuk, hogy az egyes émodellekkel meghatározható egyensúlyi növekedési pályák indekompozábilis és csak gyengén dekompozábilis gazdaságok esetén mindig egyértelműen léteznek; a strukturális kikötések mellett egyéb, megfelelő megszorításokkal pedig az erősen dekompozábilis Neumann-gazdaságok közül is kiszűrhetők az unicitást biztosító gazdaságok.

Milyen tanulságokkal, ill. elemzési lehetőségekkel szolgálnak a kapott eredmények? A modellező szakember számára a fenti vizsgálódás legfontosabb mondanivalója az aggregáció jelentősége. A többszektoros termelési modellek struktúramátrixainak kialakítására nemcsak közgazdaági, hanem számítástechnikai szempontból is nagy figyelmet kell fordítani. A gazdaság aggregációs szintje ugyanis olyan hibákat (előnyöket) eredményezhet, amelyek jelentősen befolyásolhatják a modellek segítségével levonható következtetéseket. A struktúramátrixok jellegének feltárásával egy sor elemzési lehetőség kínálkozik: a struktúratervezés számára hasznos információt szolgáltat az ún. autark jellegű algazdaságok feltárása, a növekedés és a fejlesztés tervezése során segítséget jelenthetnek az egyes indekompozábilis algazdaságok növekedési üteme stb.

(Beérkezett: 1979. augusztus 24-én)

IRODALOM

1. Afriat, S. N.: Production Duality and the von Neumann Theory of Growth and Interest. Mathematical Systems in Economics 11, 1974. Verlag Anton Hain Kg — Meisenheim am Glan
2. Allen, R. G. D.: Mathematical Economics. Macmillan, New York, 1960.
3. Bródy A.: Érték és újratermelés. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1968.
4. Bromek, T.: „Consumption-investment Frontier in von Neumann Models" in Mathematical Models in Economics, eds. J. Łoś and M. W. Łoś, North-Holland, Amsterdam, 1974.
5. Champernowne, D. G.: A note on J. v. Neumann's article on „A modell of economic equilibrium" Review of Economic Studies, 13 (1945)
6. Computing Equilibria: How and Why Edited by Jerzy Łoś and Maria W. Łoś North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1976.
7. Debreu, G. and I. N. Herstein: Nonnegative Square Matrices Econometrica, 21 (1953) 597—607.
8. Feller, W.: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.
9. Fréchet, M.: Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités. Vol. 11. Paris: Gauthier—Villars, 1938.
10. Fujimoto, T.: Duality and the uniqueness of growth equilibrium. International Economic Review 16 (1975) 81—91.
11. Gale, D.: „The Closed Linear Model of Production", in Linear Inequalities and Related Systems. ed. by H. W. Kuhn and A. W. Tucker. Annals of Mathematics Study No. 38. Princeton: Princeton University Press 1956.
12. Gale, D.: The Theory of Linear Economic Models. Mc Graw-Hill Book Co. London, 1960.

13. HAMBURGER, M. J.—G. L. THOMPSON—R. L. WEIL: Computation of Expansion Rates for the Generalized von Neumann Model of an Expanding Economy, Econometrica, 35 (1967) 542—547.
14. HEGEDÜS, M.—ZALAI E.: Fixpont és egyensúly a gazdasági modellekben. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó Budapest, 1979.
15. JAKSH, H. J.: A Necessary and Sufficient Condition for the Equality of the Expansion Rates in the von Neumann Growth Model. Journal of Economic Theory 15 (1977) 228—234.
16. KEMENY, J. G.—O. MORGENSTERN—G. L. THOMPSON: A generalization of the von Neumann-model of an expanding economy. Econometrica, 24 (1956) 115—135.
17. KLEIN, E.: Mathematical Methods in Theoretical Economics. Academic Press, New York and London, 1973.
18. KREKÓ B.: Lineáris algebra. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1976.
19. Komplex népgazdasági tervezés. (Szerk. P. FEDORENKO) Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1976.
20. LANCASTER, K.: Mathematical Economics. Macmillan Co. New York, 1969.
21. MORISHIMA, M.: „Consumption-investment Frontier, Wage-profit Frontier and the von Neumann Growth Equilibrium" in Contributions to the von Neumann Growth Model ed. by G. Bruckmann and W. Weber. Springer-Verlag Wien—New York, 1971.
22. MORISHIMA, M.: Equilibrium, Stability and Growth Oxford, 1964.
23. MORISHIMA, M.: Marx in the Light of Modern Economic Theory. Econometrica 42 (1974) 611—632.
24. MORISHIMA, M.: Marx's Economics. Cambridge, Univ. Press, 1973.
25. NEUMANN J.: Válogatott előadások és tanulmányok. Közazdasági és Jogi Könyvkiadó Budapest, 1965.
26. NIKAIDO, H.: Convex Structures and Economic Theory Academic Press, New York and London, 1968.
27. ROBINSON, S. M.: Irreducibility in the von Neumann Model. Econometrica 41 (1973) 569—574.
28. SOLOW, R.: On the Structure of Linear Models. Econometrica, 20 (1952) 29—46.
29. Warsaw Fall Seminars in Mathematical Economics 1975. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 133 Springer-Verlag. Berlin—Heidelberg—New York.

EXTENSION OF DECOMPOSABILITY IN LINEAR MODELS OF THE ECONOMY

The article is aimed at revealing structural particularities of closed and open Leontief, Neumann and Neumann—Leontief models. Starting from the indecomposability of the Neumann-model — as defined by D. *Gale* — the author introduces various specifications of decomposable economies, namely, strongly and weakly decomposable economies. Since the Leontief as well as the Leontief—Neumann models are specific cases of the Neumann model, these new concepts can be extanded also to these models. Since each of the above models describes the economy by dual connections, the (in)decomposability concepts can be extended to the dual: the author analyzes the economic contents of technological and economic (in)decomposability, furthermore examines dual connections between strong and weak types of decomposability. These new specifications of structural connections between the individual models and the inclusion of duality resulted in the formulation of new theorems (cf. theorems 3—9) and in the revealing of new properties of the models.

In Part Two of the study the author examines the advantages that might result from the character of the matrix describing structural connections of the economy with respect to the economic analysis made with the above models; he points to the role of technologically and/or economically indecomposable as well as weakly decomposable structures in the efficiency of modelling. The new specifications of the structural properties of Neumann-economies enable further extension of the sphere of Neumann-economies of special structure ensuring uniqueness of the solution. Finally, it is proved (cf. theorem 10) that uniqueness prevails in strongly non-decomposable economies (both in technological and economic sense); but the sorting out of the uniqueness ensuring economies from the complementary set requires introduction of non-structural conditions.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАЗЛОЖИМОСТИ В ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ

Цель данной статьи заключается во вскрытии структурных особенностей открытых и закрытых моделей Леонтьева, Нейманна и Нейманна-Леонтьева, в которых используется и структура экономики. Исходя из определения неразложимости модели Нейманна, сформулированной Д. Гале, вводятся различные спецификации разложимых экономик, т. е. сильно и слабо разложимых экономик. В связи с тем, что модели Леонтьева и Нейманна—Леонтьева являются специфическими случаями модели Нейманна, то поэтому эти новые понятия могут быть распространены и на эти модели. В связи с тем, что каждая из этих моделей описывает экономику посредством двойственных зависимостей, возможной является двойственное распространение (не)разложимости. Дается экономический анализ технологической и экономической (не)раложимости, изучаются двойственные зависимости слабых и сильных разновидностей разложимости.

Наличие приводимых выше новых спецификаций структурных зависимостей некоторых моделей и подключение двойственности привело к формулировке новых положений (см. теоремы 3—9) и выявлению новых свойств по отдельным моделям.

Во второй части рассматриваемой работы изучается то, что какая выгода может увязываться с характером матрицы, описывающей структурные зависимости экономики в рамках экономического анализа указанных выше моделей; указывается на роль в техническом и/или экономическом аспекте неразложимой, а также слабо разложимой структуры в результативности моделирования. Новые спецификации структурных особенностей экономик типа Нейманна позволяют еще более расширять круг экономик Нейманна, располагающих особой структурой и обеспечивающих уницитичность. В конце работы дается доказательство того, что в отношении сильно неразложимых экономик (как в технологическом, так и в экономическом плане) всегда налицо единственность (см. теорему 10); выделение при этом экономик, обеспечивающих единственность из его дополнения возможно лишь при обеспечении соответствующих неструктурных условий.