Fényes Tamás — Sári József

A pénzmennyiség összetételének differenciaegyenlet-rendszeréről

A Szigma hasábjain megjelent előző cikkünkben [1] a pénz és a hitel mozgását egyenlegváltozásában vizsgáltuk, s lényegében az országos hitelmérleget fogalmaztuk meg időeltolódásos modell formájában. Ezúttal pontosabban követjük a valóságos pénzfolyamatokat, és nem csupán a teljes pénzállomány, hanem a belső összetétele változását is megfigyeljük és ábrázoljuk. A pénz mozgása állandó változások sorozata, ami a pénz forgalomba hozása (nyomás) és a forgalomból való kivonása (szívás) intenzitásának megfelelően forgalmi folyamatok révén, de végeredményben állományváltozások formájában mutatkozik meg a mérési időpontokban. A pénzállomány — mobilitását tekintve — az elköltés vagy megtakarítás céljától függően legalább két nagy csoportra osztható. Az első csoportba tartozik az a mennyiség, amely a fizetési forgalom lebonyolítására, az ügyletek kiegyenlítésére szolgál (aktív pénz); a másodikba pedig az, amely egy adott egységnyi időszakban (általában egy év) nem vesz részt a kötelezettségek teljesítésében, hanem mozdulatlanul hever megtakarítások formájában a bankszámlákon, takarékbetétben vagy akár készpénzben (inaktív pénz) [2]. A jelen cikkben kísérletet teszünk a pénz összetételváltozásának modellszerű bemutatására, megfogalmazva azokat a feltételeket, amelyek elengedhetetlenek a pénzügyi egyensúly fennmaradása vagy létrehozása érdekében. Végül pedig számításokat végzünk a matematikailag leírt modell segítségével a gyakorlati felhasználás lehetőségének igazolására.

I. A pénzfolyamatok közgazdasági összefügései

A fizetési forgalom a pénztulajdonosok egymás közötti kapcsolataiban mindig egy adott t-edik időpontban meglevő pénzmennyiség felhasználásával bonyolódik le. A bővített újratermelés által igényelt további pénzmennyiséget a jegybank hozza forgalomba bankhitel folyósításával vagy devizavétellel (döntően export miatt). Az anyagi folyamatok körforgásában a pénzmennyiség egy része — a végső felhasználás következtében — visszaáramlik a jegybankba, s megszűnik pénz lenni, mégpedig hiteltörlesztés vagy devizaeladás (import) miatt. A megfigyelési időtartam záró pontjában ismét mérhetővé válik a pénzállomány. Az elmondottakat az alábbi egyszerű összefüggéssel írjuk le:

$$P(t-1) + N(t) - V(t) = P(t), \tag{1}$$

ahol: $P(t)$ = a pénzállomány a t-edik időszak végén

$N(t)$ = a t-edik időszak alatt forgalomba hozott (nyomott) új pénz mennyisége

$V(t)$ = a t-edik időszakban a forgalomból visszavont (szívott) pénz összege.

A továbbiakban a

t forgalmi adatoknál (flow) az adott időszakot, állományi adatoknál (stock) pedig az időszak végpontját jelöli.

A *pénzállomány mobilitása* szempontjából két fő összetevőre oszlik: a forgalom lebonyolításában ténylegesen résztvevő *aktív (mozgó) pénzre,* és a forgalomból kicsapódott, megtakarított *inaktív (heverő) pénzre.* Azaz:

(2) $$P(t) = P_A(t) + P_I(t).$$

A (2)-ben felírt egyenlőség egy adott t-edik időszak végén fennálló statikus összefüggést fejez ki (stock). A pénz teljes mennyisége és ezen belül a mozgó és a heverő pénz nagysága azonban állandóan változik; hol növekszik, hol csökken, a szükségletek szerint. Az a változási folyamat, ami két időpont között lebonyolódik, felszíni megjelenési formájában a pénzforgalom (flow). Az aktív és az inaktív pénz közötti változás is csökkenés és növekedés formájában megy végbe, ami végeredményben állandó szerkezeti változást hoz létre a pénz mobilitásában, összetételében. Az új kibocsátású pénz $N(t)$ mindig aktív pénzként kerül a forgalomba, de meghatározott idő után inaktívvá válhat, ha a forgalomnak már nincs rá szüksége. Az inaktívvá válás történhet a pénztulajdonos saját elhatározásából (betétben helyezi el), vagy pedig jogszabályok írják elő a megtakarítást (pl. a vállalati tartalékalap képzése). A heverő pénz egyik része tudatos emberi cselekvés eredményeként jön létre, másik része viszont automatikusan válik inaktívvá azáltal, hogy tulajdonosa számára elkölthetetlen lesz egy adott időpontban, illetve időszakban. A pénzállomány alakulására vonatkozó (1)-ben szereplő három adat mint változó, szoros összefüggésben van egymással. A nyomás és a visszaszívás különbsége ugyanis nemcsak a teljes pénzmennyiség nagyságát változtatja meg, hanem az aktív pénzét is; a belső szerkezeti változás pedig olyan komplementere egymásnak, hogy amennyivel nő vagy csökken az inaktív pénz állománya, ugyanannyival csökken vagy nő a mozgó pénzé. Képletbe foglalva ezt a változási folyamatot, az alábbi két egyenlőséget írhatjuk fel:

(3) $$P_A(t) = P_A(t-1) + [N(t) - V(t)] - [\alpha P_A(t - T_I) - \beta P_I(t - T_A)]$$

(4) $$P_I(t) = P_I(t-1) + [\alpha P_A(t - T_I) - \beta P_I(t - T_A)],$$

ahol α = az inaktívvá váló pénz aránya az inktív pénz állományára vonatkoztatva

β = az aktívvá váló pénz aránya az inaktív pénz állományára vonatkoztatva

T_I = az aktív pénz inaktívvá válásának időtartama ($T_I = 1$ év a gyakorlatban)

T_A = az inaktív pénz aktívvá válásának időtartama években.

A (3)-ban és a (4)-ben megadott két egyenlőség összevonásával az (1) és a (2) eredményét kapjuk, számunkra azzal a fontos megállapítással, hogy a t-edik időpontban fennálló pénzmennyiség összetétele a T_I és a T_A időszakokkal előbb végbement változásoktól meghatározott, míg az állományban bekövetkezett tényleges változás független a meglevő pénzkészlettől. A nyomás és a szívás nagysága és a pénzmennyiségre gyakorolt hatása a népgazdaság adott színvonalától, fejlődésétől, a lebonyolításra váró vagy kerülő fizetések összességétől és a pénz forgási sebességétől függ. Azaz:

(5) $$N(t) - V(t) = P(t) = \Theta[K(t), f(t)],$$

ahol K = a pénzkeresleti tényezők nagysága (árucsere-forgalom + jövedelemelosztás miatti pénzforgalom),
f = a pénz forgási sebessége.

A továbbiakban a nyomás és a szívás különbségében nem vesszük figyelembe annak a pénzkeresleti tényezőktől és a pénz forgási sebességétől való függését, hanem azt közvetlenül az idő függvényében fejezzük ki:

(6) $$N(t) - V(t) = \Phi(t).$$

Az állomány összetételének változása akkor is végbemehet, ha a teljes pénzmennyiség nem változik meg egyik időszakról a másikra. Térjünk ezért vissza a (3) összefüggésre, amiből következik, hogy bár az aktív pénz mennyisége közvetlenül a nyomás és a szívás különbségével változik, ezen túlmenően azonban csökken azzal az értékkel, amely meghatározott egységnyi időszak alatt ebből inaktívvá válik, illetve növekszik azzal a mennyiséggel, amely ugyanazon időszak alatt egy T_A időponttal megelőzően fennálló inaktív pénzből aktívvá lesz. Az aktív pénz átalakulási folyamata a (4) szerint ugyanekkora összegű módosulást idéz elő az inaktív pénzben fordított előjellel. Az elmondottakból számunkra két igen fontos feltétel adódik:

- az első annak meghatározása és törvényszerűségének tanulmányozása, hogy az aktív pénz *mekkora hányada* alakul át inaktívvá és fordítva;
- másodszor pedig annak meghatározása, hogy az átalakulás *mekkora időeltolódással* megy végbe.

A pénzforgalom zavartalan lebonyolításának feltétele, hogy elegendő aktív pénz álljon a népgazdaság rendelkezésére a fizetési kötelezettségek kiegyenlítésére. A szocialista népgazdaságban a jegybank tervszerű pénzkibocsátással biztosítja a gazdaság zavartalan működését. Ebből azonban még nem következik, hogy a pénz mennyiségi változása és mobilitás szerinti összetétele csak a fejlődés által megszabott ütemben és arányokban módosulhat. Az inaktivizálódás mértéke széles határok között mozoghat a megtermelt jövedelemhez és a fogyasztáshoz viszonyítva; így pl. ha az átalakulás üteme túl nagy, akkor kevés lesz a pénz az ügyletek lebonyolítására, a jövedelem elosztására és újraelosztására, vagy pedig akarva nem akarva új pénz kibocsátásával kell pótolni a hiányt. Abban az esetben viszont, ha a megtakarítási hajlam csökken, az inaktivizálódás lassú ütemű az adott jövedelempolitikai és közgazdasági-pénzügyi szabályozók feltételei között, akkor változatlan arányú pénzkibocsátás esetén is túlzottan nagy lesz a fizetőképes kereslet, ami feszültségeket okozhat a gazdaságban. Ebben az esetben tehát a jegybanknak korlátoznia kell a pénzkibocsátást, elsősorban a hitelnyújtást. Megfordítva is igaz ez az állítás. Abban az esetben ugyanis, ha a heverő pénz túl gyorsan halmozódik fel, akkor ez nemcsak a megtakarítási hajlam növekedésének tulajdonítható, hanem annak is, hogy a pénz nem használható fel célszerűen tulajdonosaik részéről, s az árrendszer sem elég rugalmas a fizetőképes kereslet és az árualap egyensúlyának létrehozására.

A jól megválasztott bázisidőszak adatairól feltételezhető, hogy a jövőben is hasonló arányú N (nyomás) és V (visszaszívás) lesz elegendő a forgalom lebonyolítására, mert a gazdasági fejlődés fő arányai (rövid és közép távon) nem módosulnak érdemlegesen. Ha azonban a pénz összetételében nemkívánatos változások mennek végbe, akkor az összes pénz ugyan elegendőnek látszik, de a tranzakciók lebonyolítására szolgáló mozgó pénz mennyisége több vagy kevesebb lesz a szükségesnél. Ez pedig vagy túlzott fizetőképes keresletet eredményez, vagy pedig ennek ellenkezője következik be és fizetési zavarok keletkeznek. A helyes cselekvés az lehet, hogy

- az inaktív pénz növekedésével arányosan több pénzt nyomnak a forgalomba, mint az az eredeti feltételek szerint történnék; vagy fordított esetben:
- az inaktív pénz mobilizálódásából felszabaduló pénzmennyiséggel csökkentik a kibocsátást.

A pénzmennyiség fentiekben körvonalazott szabályozása azt célozza, hogy a forgalom lebonyolításához mindig elegendő mennyiségű pénz álljon rendelkezésre. Ezt olyan mechanizmussal érhetjük el, ami lényegében a *pénzforgalom marxi törvényében* megfogalmazott számszerű összefüggéshez szabja az új pénz kibocsátását. A befolyásoló tényezők által kiváltott impulzusokat a különféle forgalmi és pénzállományi adatokból származtatott mutatószámok segítségével lehet ábrázolni és elemezni. Ezek közül elsősorban a pénz forgási sebességének mutatói, az aktív és az inaktív pénz mozgásának, működésének jellemzői kapnak kitüntetett szerepet. Az [1]-ben elsősorban a pénz forgási sebességének mutatóival foglalkoztunk a pénzmennyiség szabályozását leíró modellben. Ezúttal a *szerkezeti változásokat jellemző paraméterekre* helyezzük a fő súlyt. A (3)-ban és (4)-ben szereplő α és β paraméterek meghatározása csak akkor ad reális eredményt, ha lehetőleg azoknak az időszakoknak az arányait vesszük figyelembe, amikor a népgazdaság a viszonylagos egyensúly állapotában volt, éspedig minél több ilyen időszakét. Ebből következik, hogy olyan feltételeket kell előirányozni, amelyek képesek optimális arányt létrehozni a pénzkibocsátás és a visszaszívás, valamint az aktivizálódás és az inaktivizálódás között. A III. fejezetben éppen ezért szimulációs eljárással keressük a paraméterek gyakorlatilag elfogadható értékeit annak érdekében, hogy tudatosan közelítsük a tranzakciók lebonyolítására szükséges pénz mennyiségét, illetve a teljes állományon belüli részarányát.

A paraméterek szerepére néhány alapfeltételt ismertetünk. *Feltételezve*, hogy a teljes pénzállomány $t = 0, 1, 2, \ldots$ időszakokban egyenlő, akkor az α és a β együtthatók csak abban az esetben hozhatnak létre állandó arányt az aktív és az inaktív pénz mennyisége között, ha a gazdaság *egyszerű újratermelést* folytat (stacionárius). Ekkor ugyanis – ha a pénz forgási sebessége sem változik – állandóan ugyanannyi mozgó pénzre lesz szüksége a népgazdaságnak a forgalom lebonyolítására, következésképpen az inaktív pénz állománya is állandó marad. Bővített újratermelés esetén viszont megnövekszik az aktív pénz iránti igény is, amit – új pénz kibocsátása hiányában – csak a heverő pénzből lehet pótolni. Ebből következik, hogy ilyen esetben szükségszerűen csökken az α és nő a β értéke. A változásnak azonban *korlátot szab* az a körülmény, hogy az aktív pénz inaktívvá alakulása fokozatosan megszűnik ($\alpha = 0$), és szélső esetben elfogy az inaktív pénz az aktívvá való visszaalakulás miatt ($\beta = 1$). Ekkor az átalakulási folyamat megáll, amit csak új pénz kibocsátásával lehet ismét megindítani. A valóságban persze stacionárius gazdaság nem létezik; igaz marad viszont az az állításunk, hogy az átalakulás üteme viszonylag szűk határok között ingadozhat. Rendkívüli helyzetektől eltekintve, a gazdaság tervszerű tudatos irányításával mindig létrehozható a pénzállományok olyan nagysága és szerkezeti összetétele, ami egy adott időszakban megfelel a szükségleteknek és képes korlátok között tartani a fizetőképes keresletet.

A pénz aktivizálódása és inaktívvá válása meghatározott *időkésedelemmel* történik egy adott, választott időponthoz képest. A banki üzleti szokások világszerte azt a felfogást vallják — és ez a mi gyakorlatunkban is elfogadható, — hogy a *legalább 1 évig mozdulatlanul heverő pénz* mennyiségét tekintik inaktívnak. Ennek a pénzmennyiségnek a tényleges számbavétele számos nehézséggel járna, ezért mind a tőkés államokban, mind Magyarországon azt a megoldást választjuk, hogy a bankszámla jellegéből és a betétek lekötési időtartamából határozzuk meg az összeget. Az inaktív pénz aktívvá válása viszont nem csupán a bankszámlákon fennálló követelések minősítésének kérdése, hanem attól is függ, mennyi idő telik el, amíg a pénz ténylegesen ismét felhasználásra kerül, vagyis újból részt vesz a forgalomban. Erre vonatkozóan rendelkezésre állnak a bankszámla forgalmi adatok, amelyek segítségével meghatározható az aktivizálódás mérete. Egy adott t időszak forgalmi adata és az átlagos inaktív pénzállomány hányadosa megfelel az *inaktív pénz egy speciális forgási sebességének*, amiből számszerűen következik az időeltolódás hossza is.

A jelen cikkben elsődlegesen a pénz szerkezeti összefüggéseit, átalakulását vizsgáljuk abból a szempontból, hogy a modell feltételrendszeréből milyen következmények adódnak a pénzügyi egyensúly fenntartására, a stabilitás figyelembevételével. Az általunk felállított modellből lényegében kettős összefüggést kapunk abból kifolyólag, hogy a teljes pénzmennyiséget

— egyrészt *aktív* (mozgó = tranzakciós) és *inaktív* (heverő = tartós) pénz szerint különböztetjük meg,

— másrészt különbséget teszünk a rendszerben *gerjesztett* pénz (amely megváltoztatja a teljes pénzállomány nagyságát is) és a *spontán*, szabad átalakulással végbemenő pénzkészlet változása között (amely utóbbi csupán a pénzállomány szerkezeti összetételét módosítja).

Ez az utóbbi alapján

$$P(t) = P_s(t) + P_g(t). \tag{7}$$

A továbbiakban megfogalmazzuk a pénzmozgások matematikai modelljét, megoldjuk az egyenleteket, és megvizsgáljuk a rendszer stabilitását.

II. A pénzfolyamatok matematikai leírása

A pénzfolyamatok állandó változásokat idéznek elő az állományokban, mind összvolumenüket, mind pedig szerkezeti összetételüket tekintve. E folyamatokat matematikailag differenciaegyenlet-rendszerrel írjuk le, bemutatva a gerjesztett és a spontán pénzmozgások hatását is a népgazdaság pénzellátására, annak elégséges vagy nem megfelelő mértékére, a pénz mobilitásából következő működőképes, stabilis helyzetekre, és az ebből adódó szabályozási lehetőségekre.

1. *A pénzátalakulás differenciaegyenlet-rendszere, gerjesztett és spontán pénzmozgások*

A modell matematikai megfogalmazásánál az I. fejezetben felírt (3) és (4) sz. összefüggésekből indulunk ki. A pénzállományok mobilitási összetételére és időbeli alakulására tekintsük az alábbi kétismeretlenes differenciaegyenlet-rendszert:

$$\Delta P_A(t) = \Phi(t) - \alpha P_A(t - T_I) + \beta P_I(t - T_A) \tag{8}$$

$$\Delta P_I(t) = \alpha P_A(t - T_I) - \beta P_I(t - T_A) \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

$$T_I; T_A = \text{pozitív egészek}$$

$$0 < \alpha < 1; \quad 0 < \beta < 1.$$

A (8)-ban megadott két egyenlőség a valóságos pénzmozgások, ill. pénzátalakulások folyamatának egy matematikai modellje, amelyet az előző pontban közgazdaságilag megindokoltunk. Az α, β együtthatókat a modellben állandóknak tekintjük; a $\Phi(t)$ ismert függvényt, amely a pénzkibocsátás és a pénzvisszaszívás különbsége, a rendszer gerjesztésének fogjuk nevezni. Kikötjük, hogy teljesül a következő feltétel, amely közgazdaságilag – normális gazdasági körülmények között – nyilvánvaló:

$$T_A > T_I \geq 1. \tag{9}$$

A (8)-at operátorszámítással fogjuk megoldani. Ennek lényege, hogy a (8)-at a diszkrét operátortestben algebrai egyenletrendszerré alakítjuk át, amelynek megoldása közvetlenül előállítja az aktív és az inaktív pénzmennyiségek operátorait. Az operátorok elméletét illetőleg [3]-ra utalunk. Ebben a dolgozatban feltételezzük a diszkrét operátorszámítás alapjainak és az abban alkalmazott jelöléseknek az ismeretét.

A (8) két egyenletének összevonásából kapjuk, hogy

$$\Delta P_A(t) + \Delta P_I(t) = \Phi(t), \tag{10}$$

amely azt az egyszerű tényt fejezi ki, hogy a teljes pénzmennyiség változása megegyezik a kibocsátott és a visszaszívott pénz különbségével. Ezért a (8) helyett a következő formálisan egyszerűbb differenciaegyenlet-rendszert vizsgáljuk:

$$\Delta P_A(t) = \Phi(t) - \alpha P_A(t - T_I) + \beta P_I(t - T_A) \tag{11}$$

$$\Delta P_A(t) + \Delta P_I(t) = \Phi(t).$$

Tekintsük az aktív és az inaktív pénzmennyiségeket a diszkrét operátortest elemeinek az alábbi alakban:

$$(12) \qquad P_A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{P_A(j)}{(1+q)^j}$$

$$P_I = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{P_I(j)}{(1+q)^j},$$

ahol az absztrakt q elem az ún. differenciaoperátor, $\frac{1}{1+q}$ pedig az eltolási operátor. A konvergencia operátoros értelemben triválisan teljesül. Az eltolási operátor alaptulajdonságának és a (12) figyelembevételével a (11) átírható az alábbi operátoros alakra:

$$(13) \quad P_A - \frac{1}{1+q} P_A - P_A(-1) = \Phi - \frac{\alpha}{(1+q)^{T_I}} P_A - \alpha \sum_{k=1}^{T_I} \frac{P_A(-k)}{(1+q)^{T_I-k}} +$$

$$+ \beta P_I \frac{1}{(1+q)^{T_A}} + \beta \sum_{k=1}^{T_A} \frac{P_I(-k)}{(1+q)^{T_A-k}}$$

$$P_A - \frac{1}{1+q} P_A - P_A(-1) + P_I - \frac{1}{1+q} P_I - P_I(-1) = \Phi$$

Rendezve a fenti kifejezést nyerjük, hogy

$$(14) \qquad \frac{q(1+q)^{T_I-1} + \alpha}{(1+q)^{T_I}} P_A - \frac{\beta}{(1+q)^{T_A}} P_I = \Phi +$$

$$+ P_A(-1) - \alpha \sum_{k=1}^{T_I} \frac{P_A(-k)}{(1+q)^{T_I-k}} + \beta \sum_{k=1}^{T_A} \frac{P_I(-k)}{(1+q)^{T_A-k}}$$

$$P_A + P_I = \frac{1+q}{q} \Phi + \frac{1+q}{q} [P_A(-1) + P_I(-1)],$$

amely az ismeretlen pénzmennyiségekre nézve kétismeretlenes algebrai egyenletrendszer. Ezt megoldva megkapjuk a pénzmennyiségek operátorait:

$$(15) \qquad P_A = \Phi \frac{\beta(q+1) + q(1+q)^{T_A}}{qZ} +$$

$$+ \frac{\beta(1+q)[P_A(-1) + P_I(-1)] + P_A(-1)\, q(1+q)^{T_A}}{qZ}$$

$$- \frac{\alpha q \sum_{k=1}^{T_I} P_A(-k)(1+q)^{T_A-T_I+k} + \beta q \sum_{k=1}^{T_A} P_I(-k)(1+q)^k}{qZ}$$

$$P_I = \Phi\left[\frac{1+q}{q} - \frac{\beta(1+q)+q(1+q)^{T_A}}{qZ}\right] + \frac{q+1}{q}[P_A(-1)+P_I(-1)] -$$

$$-\frac{\beta(1+q)[P_A(-1)+P_I(-1)]}{qZ} +$$

$$+\frac{P_A(-1)q(1+q)^{T_A} - \alpha q\sum_{k=1}^{T_I} P_A(-k)(1+q)^{T_A-T_I+k} + \beta q\sum_{k=1}^{T_A} P_I(-k)(1+q)^k}{qZ}.$$

Fentiekben:

(16) $$Z = (1+q)^{T_A} - (1+q)^{T_A-1} + \alpha(1+q)^{T_A-T_I} + \beta$$

a (11) ún. karakterisztikus polinomja.

Feladatunkat elvileg megoldottuk, megkaptuk a keresett pénzmennyiségek operátorait. Hátra van még, hogy az absztrakt operátoros jelölések elhagyásával a kapott (15) kifejezéseket, mint a *t idő függvényeit* is felírjuk.

Bevezetjük az aktív pénzmennyiséggel kapcsolatban a gerjesztett pénzmennyiség (P_{gA}) és a spontán pénzmennyiség (P_{sA}) fogalmát. Definíciószerűen legyen

(17) $$P_A = P_{gA} + P_{sA},$$

ahol (15)-ből

(18) $$P_{gA} = \Phi\frac{\beta(q+1)+q(1+q)^{T_A}}{qZ}$$

(19) $$P_{sA} = \frac{\beta(1+q)[P_A(-1)+P_I(-1)] + P_A(-1)q(1+q)^{T_A}}{qZ} -$$

$$-\frac{\alpha q\sum_{k=1}^{T_I} P_A(-k)(1+q)^{T_A-T_I+k} + \beta q\sum_{k=1}^{T_A} P_I(-k)(1+q)^k}{qZ}.$$

A gerjesztett pénzmennyiség a teljes aktív pénzmennyiségnek az a komponense, amely csupán a rendszer Φ gerjesztésétől függ, és független az aktív és az inaktív pénzmennyiségeknek a bázisintervallumon előírt kezdeti értékeitől. Matematikailag P_{gA} az inhomogén (11) rendszer megoldásának operátora, nulla kezdeti feltételek mellett. Így ez az aktív pénz külső vagy gerjesztett mozgását írja le (nulla kezdeti feltételek mellett).

A spontán keletkező aktív pénz a teljes aktív pénzmennyiségnek az a komponense, amely csupán az aktív és az inaktív pénzmennyiségnek a bázisintervallumon előírt kezdeti értékeitől függ, és független a rendszer gerjesztésétől. Matematikailag P_{sA} a (11)-hez tartozó homogén rendszer megoldásának operátora tetszőleges kezdeti feltételek mellett, ahol $\Phi = 0$. Így ez az aktív pénz belső vagy spontán mozgását írja le; a teljes (aktív) pénz pedig a gerjesztett (aktív) és a spontán (aktív) pénz összege. Teljesen hasonló módon lehet definiálni és képletszerűen felírni a gerjesztett inaktív és a spontán inaktív pénzmennyiséget is. Itt ti. fennáll, hogy

$$P_I = P_{gI} + P_{sI}.$$

Értelmezhető az összes gerjesztett és az összes spontán pénzmennyiség is, melyekre érvényesek az alábbi közgazdaságilag nyilvánvaló triviális összefüggések:

$$P_g(t) = P_{gA}(t) + P_{gI}(t) = \sum_{i=0}^{t} \Phi(i)$$

$$P_s(t) = P_{sA}(t) + P_{sI}(t) = P_A(-1) + P_I(-1) = \text{konstans}.$$

Parciális törtekre bontással (18) és (19) könnyen felírható, mint a t idő függvénye.

Tekintsük a (16)-ban megadott polinom karakterisztikus egyenletét:

$$\xi^{T_A} - \xi^{T_A - 1} + \alpha \xi^{T_A - T_I} + \beta = 0. \tag{20}$$

Jelöljük ennek különböző gyökeit ξ_k-val, multiplicitásaikat pedig σ_k-val. Mivel a (18)-ban szereplő

$$\frac{\beta(q+1) + q(1+q)^{T_A}}{qZ}$$

operátor felírható, mint az $(1+q)$ racionális törtfüggvénye, amelynek számlálója és nevezője is $T_A + 1$-edfokú, ezért az egy függvényt állít elő, amely az alábbi parciális törtekre bontott alakban fejezhető ki:

$$\frac{\beta(q+1) + q(1+q)^{T_A}}{qZ} = \gamma \frac{(1+q)}{q} + (1+q) \sum_{k=1}^{M} \sum_{p=1}^{\sigma_k} \frac{\gamma_{k,p}}{(q+1-\xi_k)^p}, \tag{21}$$

ahol: $M \leq T_A$ és a γ, $\gamma_{k,p}$ együtthatók ismert elemi módszerekkel nyerhetők.

Az operátorszámítás elemeiből ismeretes, hogy

$$\frac{1+q}{(q+1-\xi)^p} = \left\{ \xi^{t-p+1} \binom{t}{p-1} \right\},$$

Így (21)-gyel a gerjesztett aktív pénzmennyiség végső alakja az alábbi:

$$P_{gA}(t) = \gamma \sum_{i=0}^{t} \Phi(i) + \sum_{i=0}^{t} \Phi(i) \sum_{k=1}^{M} \sum_{p=1}^{\sigma_k} \gamma_{k,p} \, \xi_k^{t-i-p+1} \binom{t-i}{p-1}. \tag{22}$$

A (19) könnyen felírható, mint az $1+q$ operátor racionális törtfüggvénye, ahol a nevező $T_A + 1$-ed fokú, a számláló legfeljebb $T_A + 1$-ed fokú. Ennek megfelelően a parciális törtekre bontott alakja

$$P_{sA} = \frac{\vartheta(1+q)}{q} + (1+q) \sum_{k=1}^{M} \sum_{p=1}^{\sigma_k} \frac{\vartheta_{k,p}}{(q+1-\xi_k)^p}, \tag{23}$$

ha a számláló fokszáma $T_A + 1$. A ϑ és $\vartheta_{k,p}$ szintén elemien adódnak.

A (19)-ből könnyen belátható, hogy az az eset, amikor a számláló fokszáma kisebb, mint $T_A + 1$, előfordulhat, ha teljesül, hogy

$$P_A(-1) - \alpha P_A(-T_I) + \beta P_I(-T_A) = 0. \tag{24}$$

Ez azonban közgazdasági megfontolások alapján figyelmen kívül hagyható, mert ekkor $P_{sA}(0) = 0$. Így az aktív spontán pénz végső alakja:

$$(25)\qquad P_{sA}(t) = \vartheta + \sum_{k=1}^{M} \sum_{p=1}^{\sigma_k} \vartheta_{k,p}\, \xi_k^{t-p+1} \binom{t}{p-1} \qquad (t \geq 0),$$

ha (19) számlálója $T_A + 1$-ed fokú. Megjegyezzük, hogy a γ, δ együtthatók

a ξ_k karakterisztikus gyököktől függetlenek és

$$(26)\qquad \gamma = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,; \quad \vartheta = \frac{\beta}{\beta+\alpha}[P_A(-1) + P_I(-1)].$$

A ϑ a további vizsgálataink során igen fontos szerepet fog játszani.

A (22), (23) alapján a (15)-ben szereplő P inaktív pénz spontán és gerjesztett komponensei is egyszerűen felírhatók a t idő függvényeiként.

Megjegyzés: A (22) és a (25) kifejezések igen leegyszerűsödnek, ha a karakterisztikus egyenlet összes gyökei különbözőek. Továbbá lomplex gyökök fellépése esetén ezek a kifejezések értelemszerűen valós értékű függvényeket állítanak elő, amelyekben már trigonometrikus kifejezések is szerepelnek, ekkor a spontán mozgások rezgéseket tartalmazhatnak. (Ezzel kapcsolatban lásd szerzők [1] dolgozatát.)

2. *A modell működőképessége, stabilitás, a pénzmozgások egyensúlyi helyei*

A (11)-gyel leírt modellt akkor nevezzük működőképesnek, ha $P_{sA}(t) > 0$, $P_{sI}(t) > 0$; $P_{gA}(t) > 0$, $P_{gI}(t) > 0$, ha $0 \leq t < \infty$ és ha van az α és β értékeknek egy olyan $\alpha_0 < \alpha < \alpha_1$, $\beta_0 < \beta < \beta_1$ környezete, melyekből választott tetszőleges $\tilde{\alpha}$ és $\tilde{\beta}$ együtthatók mellett is teljesülnek a pozitivitási feltételek. Negatív pénzmennyiségeknek közgazdasági értelmük nincs.

Az irodalomban a (11) típusú állandó együtthatós rendszereket akkor nevezik stabilisnak, ha karakterisztikus egyenletük összes gyökei a komplex sík egységkörének belsejébe esnek, tehát akkor, ha $|\xi_k| < 1$. Ekkor azt is mondják, hogy a (16) karakterisztikus polinom stabilis. A stabilis megoldás lehet negatív is. Kimutatjuk, hogy ha a (11) működőképes, akkor a (11) rendszer stabilis. Ez igen nagy jelentőségű, mert a stabilitás kritériumai egyszerűen megadhatók, a működőképességet pedig a kapott eredmények igazolják.

Ha a (20) karakterisztikus egyenletnek van 1-nél nagyobb abszolút értékű gyöke, akkor α és β tetszőleges kicsi környezetéből választható olyan $\bar{\alpha}$ és $\bar{\beta}$, melyeknél a (25) alapján világos, hogy P_{sA} minden határon túl növekedik (vagy csökken). Ekkor azonban az inaktív spontán pénznek is minden határon túl csökkennie (növekednie) kell. Ebben az esetben tehát a modell nem működőképes, hiszen negatív értékű pénzmennyiségeknek ebben az összefüggésben nincs értelmük. Megemlítjük, hogy a (20) karakterisztikus egyenlet esetlegesen előforduló pontosan *1* abszolút értékű gyökei sem indukálhatnak stabilis és közgazdaságilag értelmezhető folyamatokat. Ezek közül az egyszereseknek a (25)-ben tiszta periodikus összetevők felelnek meg ugyan, de a (20)-ban α; β együtthatók tetszőleges kis változása a gyököket az egységkör külsejébe viheti át..

Tehát ha a modell működő képes, akkor a karakterisztikus gyökök abszolút értéke egynél kisebb, és a (25) formulából azonnal következik, hogy

$$\lim_{t\to\infty} P_{sA}(t) = \vartheta = \frac{\beta}{\beta+\alpha}[P_A(-1) + P_I(-1)], \tag{27}$$

és az aktív spontán pénz megközelíti egyensúlyi helyét, amelynek értéke ϑ. Minden számítás nélkül is azonnal következik, hogy ekkor az inaktív pénzmennyiség spontán komponense is megközelíti egyensúlyi helyét, amelynek értéke

$$\varrho = \frac{\alpha}{\beta+\alpha}[P_A(-1) + P_I(-1)]. \tag{28}$$

A (27)-ben és a (28)-ban megadott ϑ-ban és ϱ-ban az aktív és az inaktív pénzállományoknak a $t = -1$ helyen felvett értékei szerepelnek, és fennáll, hogy

$$\vartheta + \varrho = P_A(-1) + P_I(-1).$$

Láthatjuk, hogy az egyensúlyi értékek csak a teljes pénzállomány $t = -1$ helyen felvett értékétől függenek és függetlenek a pénzállományoknak a bázisintervallum $t < -1$ helyein felvett értékeitől, vagyis függetlenek a $t < -1$ helyeken előírt kezdeti feltételektől.

A pénzmennyiség spontán mozgását *tranziens folyamatnak* tekintjük. Hosszú távon a tranziens folyamat „lecseng", beáll az egyensúlyi értéke, és ettől kezdve a folyamat stacionáriussá válik. Ez azt jelenti, hogy a $t < -1$-re vonatkozó kezdeti feltételek hatása többé nem érvényesül. A $\frac{\vartheta}{\varrho} = \frac{\beta}{\alpha}$ arány a spontán aktív és a spontán inaktív pénz viszonyára jellemző mennyiség. Mivel a (16) karakterisztikus polinom általában nem stabilis, alapvető annak eldöntése, hogy konkrét adott esetben a (16) stabilis-e, vagy sem. Erre vonatkozólag az irodalomban számos eljárást dolgoztak ki. Igen egyszerű az ún. osztási módszer, amellyel egy adott polinom stabilitása viszonylag gyorsan eldönthető. (Lásd pl. [4].) Itt ezt nem ismertetjük, hanem megmutatjuk, hogy ha $T_A = 2$, akkor a (16) mindig stabilis, míg $T_A = 3$-ra megadjuk a stabilitási kritériumokat.

Ha $T_A = 2$, akkor (16) stabilis. Valóban ekkor $T_I = 1$ és a (20) karaktrisztikus egyenlet az alábbi alakú:

$$\xi^2 - (1-\alpha)\xi + \beta = 0 \tag{29}$$

Ha a gyökök komplexek, akkor egyenlő abszolút értékűek, és mivel

$$\xi_1\xi_2 = \beta < 1,$$

evidens, hogy $|\xi_1| < 1$, $|\xi_2| < 1$. Ha a gyökök valósak, akkor (29)-et megoldva

$$\xi_{1,2} = \frac{1-\alpha \pm \sqrt{(1-\alpha)^2 - 4\beta}}{2},$$

amiből könnyen belátható, hogy mindkét gyök pozitív és egynél kisebb. A (16) tehát stabilis.

Ha $T_A = 3$ és $T_I = 1$, a (16) akkor, és csak akkor stabilis, ha

$$\frac{\beta(1-\alpha)}{1-\beta^2} < 1. \tag{30}$$

Ha $T_A = 3$ és $T_I = 2$, a (16) akkor, és csak akkor stabilis, ha

$$\frac{\alpha+\beta}{1-\beta^2} < 1. \tag{31}$$

Végül a $T_A = 2$ esetben megadjuk annak feltételét, hogy a spontán aktív pénzmennyiség (és ekkor a spontán inaktív pénzmennyiség is) az egyensúlyi értéke körül csillapított rezgőmozgással legyen leírható. Ez akkor következik be, ha a (29) gyökei komplexek. A (29) diszkriminánsa

$$D = (1-\alpha)^2 - 4\beta. \tag{32}$$

A diszkrimináns akkor negatív, ha

$$\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 < \beta, \tag{33}$$

amely a spontán pénzmozgás rezgési kritériuma.

Térjünk rá a gerjesztett pénzmozgásokra. Belátjuk, hogy a (16) karakterisztikus polinom stabilitása a gerjesztett pénzmozgások pozitivitása szempontjából is alapvető. Mint tudjuk, a gerjesztett pénzmennyiséget a Φ kibocsátás határozza meg. Ha a (16) nem stabilis, akkor α és β tetszőlegesen kicsiny környezetéből választható olyan $\bar{\alpha}$ és $\bar{\beta}$, melyek mellett (22)-ből látható, hogy a legcsekélyebb kibocsátás is olyan végtelenhez növekvő vagy mínusz végtelenhez csökkenő gerjesztett aktív pénzmennyiséget, és ennek megfelelően olyan mínusz végtelenhez csökkenő, vagy végtelenhez tartó gerjesztett inaktív pénzt eredményez, amelyeket a $|\xi_k| > 1$ gyökök determinálnak. Így negatív értékű gerjesztett pénzmennyiséghez jutunk, amely közgazdaságilag értelmetlen. Szemléltessük ezt egyszerű példával. Legyen $\Phi(0) = 1$ és $\Phi(t) = 0$, ha $t > 0$. Az egyszerűség kedvéért legyenek a ξ_k gyökök egyszeresek és valósak. Ekkor a (22) átmegy az alábbi alakba:

$$P_{gA}(t) = \gamma + \sum_{k=1}^{T_A} \gamma_{k,1}\, \xi_k^t .$$

Továbbá:

$$P_{gI}(t) = P_g(t) - P_{gA}(t) = 1 - \gamma - \sum_{k=1}^{T_A} \gamma_{k,1}\, \xi_k^t .$$

Ha a ζ_k gyökök közül csak egy olyan van, amely egynél nagyobb abszolút értékű, akkor a $\gamma_{k,1}$ együtthatóktól függően az egyik gerjesztett pénznek $+\infty$, a másiknak $-\infty$-hez kell tartania, ha $t \to \infty$.

E pont eredményeit foglaljuk össze az alábbi *I. tételben.*

Ha a (11) rendszer működőképes, akkor a

$$Z(q+1) = (q+1)^{T_A} - (1+q)^{T_A-1} + \alpha(1+q)^{T_A-T_I} + \beta \tag{34}$$

polinom stabilis, vagyis a karakterisztikus gyökök a komplex egységkör belsejébe esnek. Ekkor a spontán pénzmennyiségek a

$$\vartheta = \frac{\beta}{\beta+\alpha}[P_A(-1) + P_I(-1)]$$

$$\varrho = \frac{\alpha}{\beta+\alpha}[P_A(-1) + P_I(-1)]$$

egyensúlyi értékeikhez tartanak, ha $t \to \infty$. Továbbá ha $T_A = 2$, akkor (34) mindig stabilis. Ha $T_A = 3$, $T_I = 1$, akkor a (34) stabilitásának szükséges és elégséges feltétele:

$$\frac{\beta(1-\alpha)}{1+\beta^2} < 1 .$$

Ha $T_A = 3$, $T_I = 2$, akkor a (34) stabilitásának szükséges és elégséges feltétele:

$$\frac{\alpha+\beta}{1+\beta^2} < 1.$$

Végül $T_A = 2$ esetben a spontán pénzmozgás rezgésének szükséges és elégséges kritériuma az

$$\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2 < \beta$$

feltétel.

3. *Exponenciális gerjesztésű rendszerek*

A népgazdaság egyenlő ütemű (átlagos) fejlődése esetén a $\Phi(t)$ kibocsátás és a teljes $P_A(t) + P_I(t)$ pénzállomány között a gyakorlatban fennáll, hogy

$$\Phi(t) = \varphi(t)\,[P_A(t-1) + P_I(t-1)], \tag{35}$$

ahol: $0 < \varphi(t) < 1$, és $\varphi(t)$ kis ingadozású függvény.

A matematikai leírhatóság érdekében $\varphi(t)$-t állandónak tekintve érdekes további eredményekhez juthatunk, amelyek a gerjesztett pénzmennyiségekkel kapcsolatosak. Legyen tehát:

$$\Phi(t) = \varphi[P_A(t-1) + P_I(t-1)], \quad \varphi = \text{állandó}. \tag{36}$$

A (10) figyelembevételével adódik, hogy

$$\Delta[P_A(t) + P_I(t)] = \Phi(t) = \varphi[P_A(t-1) + P_I(t-1)]. \tag{37}$$

Az így kapott egyenletünk a teljes pénzállományra nézve egy elsőrendű differenciaegyenlet, amelynek megoldása

$$P_A(t) + P_I(t) = [P_A(-1) + P_I(-1)]\,(1+\varphi)^{t+1} \qquad t \geq 0, \tag{38}$$

és (37) alapján

$$\Phi(t) = \varphi[P_A(-1) + P_I(-1)]\,(1+\varphi)^t \qquad t \geq 0. \tag{39}$$

A t időszak alatt gerjesztett összes pénz pedig

$$(40)\qquad P_g = \sum_{i=0}^{t} \Phi(i) = [P_A(-1) + P_I(-1)]\,[(1+\varphi)^{t+1} - 1].$$

Határozzuk meg a P_g összetételét a (39) *exponenciális gerjesztése* esetén. Érvényes az alábbi *II. tétel.*

Legyen (11) működőképes. Ha a gerjesztés a (39)-cel megadott exponenciális alakú, akkor a P_{gA}, P_{gI} gerjesztett pénzek aszimptotikusan szintén exponenciális függvényekkel írhatók le az alábbi alakban:

$$(41)\qquad \tilde{P}_{gA} = \gamma_1(1+\varphi)^t, \quad \tilde{P}_{gI} = \gamma_2(1+\varphi)^t,$$

ha $t \to \infty$. γ_1, γ_2 pozitív konstansok.

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy a (41) egy partikuláris megoldása (11)-nek. A (41)-et (11)-be helyettesítve, (39) figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\gamma_1(1+\varphi)^t - \gamma_1(1+\varphi)^{t-1} = \varphi[P_A(-1) + P_I(-1)](1+\varphi)^t - $$
$$- \alpha\gamma_1(1+\varphi)^{t-T_I} + \beta\gamma_2(1+\varphi)^{t-T_A}$$

$$\gamma_1(1+\varphi)^t - \gamma_1(1+\varphi)^{t-1} + \gamma_2(1+\varphi)^t - \gamma_2(1+\varphi)^{t-1} =$$
$$= \varphi\,[P_A(-1) + P_I(-1)]\,(1+\varphi)^t.$$

$(1+\varphi)^t$-vel egyszerűsítve γ_1, γ_2-re kapunk egy kétismeretlenes egyenletrendszert, amelynek megoldása:

$$(42)\qquad \gamma_1 = [P_A(-1) + P_I(-1)]\,\frac{\varphi(1+\varphi)^{T_A} + \beta(1+\varphi)}{(1+\varphi)^{T_A} - (1+\varphi)^{T_A-1} + \alpha(1+\varphi)^{T_A-T_I} + \beta}$$

$$\gamma_2 = [P_A(-1) + P_I(-1)]\,\frac{\alpha(1+\varphi)^{T_A-T_I+1}}{(1+\varphi)^{T_A} - (1+\varphi)^{T_A-1} + \alpha(1+\varphi)^{T_A-T_I} + \beta}.$$

Könnyen belátható, hogy $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

A tényleges gerjesztett pénzmennyiségek felírhatók úgy, hogy

$$(43)\qquad \begin{aligned} P_{gA}(t) &= \eta_1(t) + \gamma_1(1+\varphi)^t \\ P_{gI}(t) &= \eta_2(t) + \gamma_2(1+\varphi)^t, \end{aligned}$$

ahol η_1, η_2 a (11)-hez tartozó homogén egyenletrendszer egy megoldása. Mivel a (11) működőképes, az $\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ függvények korlátosak — ahogy az előzőekben láttuk, — így a gerjesztett pénzmennyiségek aszimptotikusan (41) alakúak. Az η_1, η_2 függvények jelentik az exponenciális gerjesztés esetén fellépő tranziens folyamatokat, amelyek hosszú távon az exponenciális növekedésű tagok mellett elhanyagolhatóvá válnak. A

$$(44)\qquad \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\varphi(1+\varphi)^{T_A-1} + \beta}{\alpha(1+\varphi)^{T_A-T_I}}$$

arány a gerjesztett aktív és a gerjesztett inaktív pénz viszonyára jellemző mennyiség.

A következőkben az áll vizsgálataink középpontjában, hogy a gerjesztett és a spontán aktív pénz mennyisége együttesen milyen arányú lehet az összes pénzállományon belül, különböző α és β értékek fennállása esetén.

III. A modell gyakorlati alkalmazása

Az elemző és előrejelző munkánál két alappillérre építünk:

— a közgazdaságilag helyesnek bizonyult tapasztalatokra és
— a modellből kapott stabilis helyzetekre.

Az ügyletek lebonyolításához szükséges aktív pénz és a megtakarítások pénzformában történő felhalmozásával létrejött inaktív pénz objektív közgazdasági kategóriák. A pénz lényegéből, funkcióiból következik ez a kettős megjelenési forma. A *forgalmi és a fizetési funkció*, valamint a *megtakarítási funkció* olyan minőségi meghatározottság, amely nélkül a pénz nem működhet, ill. mennyiségileg számba vehető értéktömegként nem létezhet. A minőségileg meghatározott pénzkategóriák mennyiségileg bizonyos határok között helyezkednek el a gyakorlatban. A két forma közötti arány a következő változások alapján jön létre:

— a már meglevő aktív és inaktív pénz bázisidőpontban fennálló állományaiból,
— egy adott t időszakban kibocsátott és visszaszívott pénzmennyiség különbözeteként mutatkozó növekedési ütemből,
— az aktív pénz inaktív pénzzé történő átalakulásának üteméből és
— az inaktív pénz aktív pénzzé történő visszaalakulásának üteméből.

A vizsgálat célja az, hogy a pénzügyi szabályozás során miként hozható létre az egyensúlyi helyzet az általunk felállított modell szerint, és mi módon tartható fenn az a leírt rendszerben. Az egyensúlyon azt értjük, hogy

— a népgazdaság elegendő aktív pénzzel rendelkezik a tranzakciók lebonyolításához, vagyis a gazdasági növekedéssel arányos pénzkibocsátás történik, és ennek eredményeként a gazdálkodó szervezeteknek általában nincsenek fizetési nehézségeik;
— a megtakarításból eredő pénzfelhalmozás, valamint ennek folyamatos felhasználása egy későbbi időszakban, nem bontja meg azt a feltételt, ami biztosítja a fizetési forgalom zavartalan lebonyolítását;
— az elköltésre kerülő jövedelmek nagysága megegyezik a végső felhasználásra szolgáló termékek piaci kínálatának árösszegével. Meg kell valósulnia tehát a fizetőképes kereslet és az árukínálat egyensúlyának.

A matematikai kifejtésben feltételeztük az α, a β és a φ paraméterek pontos ismeretét, illetve előrejelezhető értékeit. A valóságban azonban igen bonyolult összefüggések állnak fenn ezek között az arányszámok között, amelyek a fizetési forgalom és a megtakarítások alakulásának jellemzői. Lényegében forgalmi folyamatokat számszerűsítenek, amikor a pénz teljes mennyiségének és mobilitási összetételének változására adnak feleletet. Magát az összetételt az aktív pénz arányával (Ψ) fejezzük ki a teljes pénzállományra vonatkoztatva.

A modellben szereplő három paraméter meglehetősen determinált. Mégpedig:

- a φ, vagyis a pénzkibocsátás üteme közgazdaságilag meghatározott és lényegében a gazdaság fejlődésével arányosan változik, illetve a tervszerű arányosság betartása posztulátum a pénzügyi vezetés számára;
- az α a modellben a φ-től, a β-tól és a Ψ-től függő tényező, a gazdaságban viszont a pénzügyi szabályozó rendszertől meghatározott a szocialista szektor szervezeteinél és sok millió egyedi döntés eredménye a lakosságnál. Ebből következik, hogy alakulása részben determinált, részben sztochasztikus. A továbbiakban az α-t a modell alapján számított endogén paraméternek tekintjük;
- a β csak a modell szerint meghatározott, s így közgazdaságilag kvázi determináltságú mutatószám, és azt jelzi, hogy az inaktív pénz felhasználásának, azaz aktívvá válásának milyen az üteme. Ez a mutatószám a rendkívül sok pénztulajdonos szabad vagy legalábbis nagymértékben szabad elhatározásából alakul ki, és válik a fizetési forgalom egyik jellemzőjévé.

A pénzkibocsátás ütemét meghatározó *bruttó nemzeti termelés értéke* jelenleg és előre láthatóan a VI. ötéves terv időszakában is, volumenében 4–5%-kal, az általános árszínvonal indexe pedig kb. 3–5%-kal növekszik évenként. Mivel a folyó fizetéseknél a pénz forgási sebessége hosszú évek óta nagyjából állandó, ezért a tranzakciók pénzszükséglete évenként 7–10%-kal növekszik. Ezen túlmenően azonban a megtakarításoknak is van pénzigényük (autonom, forgalomból független pénzkeresleti tényező), amelyet részben pótolni kell, különben zavarok keletkeznének a forgalom lebonyolításában. A jövőbeni fejlődés ütemét leginkább meghatározó mai beruházások is bizonyos mértékű pénzügyi megelőlegezést kívánnak. Téves nézet tehát az, hogyha befagyasztjuk a jövedelmek elköltését, akkor azzal ugyanolyan mértékben automatikusan javul a pénzügyi egyensúly. A modellel végzett számításokból levonható tanulságok arra engednek következtetni, hogy ez nemcsak globális értelemben vett mennyiségi kérdés, hanem a pénzjövedelmek elosztásának helyes volta is a népgazdasági szektorok (beleértve a lakosságot is) között, ami elsősorban allokációs probléma. Másszóval így is mondhatnánk, hogy mennyiségi kérdés általában az egész népgazdaságra értelmezve, ugyanakkor elosztási kérdés parciálisan. A tapasztalatok szerint annak biztosítása, hogy a pénz mindig kellő mennyiségben álljon rendelkezésre azoknál a szektoroknál, ill. gazdálkodó szerveknél, lakosságnál, amelyek azt felhasználják, kb. 2–3% kibocsátási többletet igényel a keresleti tényezők (forgalmi folyamatok) növekedési üteméhez képest. A szimulációs számítások és azok eredményeire épülő szélesebb körű elemzés céljából ennél tágabb, $\pm 5\%$-os határt állapítottunk meg vizsgálataink során.

A meghatározottság szempontjából felvett β paraméter az inaktív pénz aktívvá válásának ütemét jellemzi. Ha közvetlenül a statisztikai és a tervezési feltételeket vesszük figyelembe, akkor a tartós pénz forgási sebességének alakulása ad elsődlegesen tájékoztatást a β nagyságáról. Vizsgálataink során azonban nemcsak azt nézzük, hogy mi történik a pénzforma átalakulását illetően, hanem azt is, hogy *mennyi idővel előbb elhelyezett betétet*, azaz inaktív pénzt használnak fel tulajdonosaik a jelen időszakban. Ezeknek az időeltolódásoknak a közgazdasági jelentősége abban rejlik, hogy pl. az azonos t-edik időszak pénzforgalma és a hozzá tartozó átlagos pénzállomány összefüggéséből 2,5–3 év alatti felhasználást kapunk az inaktív pénzre vonatkozóan; a fentebb megfogalmazott időeltolás szerint viszont ez az időtartam kereken 2 évre redukálódik. Ebből pedig az következik, hogy az inaktív pénz felhasználása lényegesen gyorsabb, mint azt az időegyezéssel az általános szokás szerint számított forgási sebesség alapján várnánk. Ennek oka az, hogy a 70-es években viszonylag gyors volt a pénzfelhalmozás (megtakarítás) üteme, s a növekvő állományok a forgási sebesség lassulását eredményezték. A matematikai kifejtésben a tapasztalati számoknak megfelelően $T_A = 2$ és $T_A = 3$ időszakokkal foglalkozunk a stabilitás kérdésénél. Mivel pedig a β paraméter nagysága az időtényezőtől függ, ezért a $T_A = 2$-ből az időtartam hosszának reciprok értéke, azaz $1/2$ adódik a β-ra.

Az elvégzett szimulációs számításoknál azonban az 1,5–3 év forgási idő figyelembevételével az $1/3$; $2/3$ határok között elhelyezkedő értékekre végeztünk számításokat. A vizsgálat célja mindenekelőtt az, hogy a φ és β közgazdasági értelemben elfogadható és a gyakorlat számára is alkalmazható fent megadott értékei között mennyi lesz — pontosabban fogalmazva mennyi lehet — a pénzfolyamatok lebonyolításához szükséges aktív pénz aránya a teljes pénzmennyiségen belül, és azt, hogy milyen ütemben alakulhat át az aktív pénz inaktívvá (α).

Mielőtt erre a kérdésre érdemleges választ adnánk, még egy fogalommal kell megismerkednünk. Ez pedig az *aktív pénz aránya* a teljes pénzmennyiségen belül. Ezt az értéket jelöljük Ψ-vel. Azaz:

$$\Psi = \frac{P_A}{P_A + P_I}\,.$$

Az $\alpha = 1/3$ és a $\beta = 1/2$ tényszámainak segítségével, amikor a $T_I = 1$ és a $T_A = 2$, azt kaptuk a modell alapján, hogy egyszerű újratermelést folytató (stacionárius) gazdaságra ($\varphi = 0$) az aktív pénz aránya az összes pénzállományon belül 0,6 körül ingadozik. Ezt az eredményt támasztja alá a *spontán* változásokat az időben leíró (25)-ből számított alábbi összefüggés is:

$$P_{sA}(t) = 60 - (0{,}707)^t (0{,}17 \cos 1{,}08t + 6{,}986 \sin 1{,}08t).$$

Elvégezve a műveleteket, az 1975–76 bázisévekből kiindulva eredményül azt kaptuk, hogy a $t = 2$-től $\pm$ 1%-os, a $t = 5$-től kezdődően pedig $\pm 0{,}2$%-os eltéréssel (rezgéssel) 60% körül alakul az aktív pénz aránya a teljes pénzmennyiséghez.

A szocialista népgazdaságra azonban a fejlődés a jellemző. Abból kiindulva, hogy a gazdaság növekedéséhez szükségelt pénz a kibocsátáskor minden esetben működő pénz, s csak később — egy vagy több év eltelte után — alakul át részben vagy egészben heverő pénzzé, az aktív pénz aránya a 0,6-nál csak nagyobb lehet.

A (22)-ből — fenti paraméterek mellett — *a gerjesztett aktív pénzre* az alábbi összefüggés adódik:

$$P_{gA}(t) = 0{,}6 \sum_{i=0}^{t} \Phi(i) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{t} \Phi(i)\,(0{,}707)^{t-i}.\,[0{,}4 \cos 1{,}08\,(t-i) - 0{,}1067 \sin 1{,}08\,(t-i].$$

Exponenciális gerjesztést feltételezve $\varphi = 0{,}1$ esetén kapjuk, hogy

$$
\begin{array}{ll}
t = 0 \text{ időszakban } \psi_g & = 1{,}00 \\
t = 1 \text{ időszakban } & = 0{,}84 \\
t = 2 \text{ időszakban } & = 0{,}72 \\
t = 3 \text{ időszakban } & = 0{,}665 \\
\vdots & \vdots \\
t = 10 \text{ időszakban } & = 0{,}637 \\
\vdots & \vdots \\
t = \infty \text{ időszakban } & = 0{,}624
\end{array}
$$

Az utolsó 0,624-es arány természetesen egyenlő $\dfrac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}$-vel.

Az adatok azt jelzik, hogy a gerjesztett aktív pénz aránya az összes gerjesztett pénzben közeledik a spontán aktív pénznek az összes spontán pénzben elfoglalt arányához, a 0,6-hez. A gerjesztett és a spontán aktív pénz együttes aránya (Ψ) a teljes pénzállományon belül tehát elméletileg 0,6–0,624 között helyezkedik el a végtelenben ($\varphi = 0{,}1$, $\alpha = {}^1/_3$ és $\beta = {}^1/_2$ esetén). A gyakorlatban azonban a pénzfolyamatok lejátszódásánál a T_A időtartam a meghatározó, ami 2–3 évnél nem hosszabb. Ily módon a modell szerint számított adatok alapján az összes aktív pénz aránya a teljes pénzmennyiség 60–72%-a közé esik. A tényleges és a számított értékek alapján az aktív pénz részaránya, azaz a Ψ értékének alsó és felső határa ténylegesen 0,63–0,73 között volt a 70-es években. Ezért számításainknál a Ψ-re nézve 0,6–0,75 értékeket fogadtunk el.

A pénzkibocsátás ütemére (φ) a már definiált pénzkeresleti tényezőkön kívül bizonyos mértékig meghatározó az α és a β nagysága is. Bár elvileg

α számított értékei

φ	β \ ψ	0,60	0,675	0,750
0,05	0,33	0,250	0,185	0,133
	0,5	0,375	0,278	0,200
	0,67	0,500	0,371	0,267
0,10	0,33	0,278	0,210	0,156
	0,5	0,417	0,315	0,233
	0,67	0,556	0,420	0,311
0,15	0,33	0,306	0,235	0,178
	0,5	0,458	0,352	0,267
	0,67	0,611	0,469	0,355

mindkettőre felírható, hogy a [0; 1] intervallumban mozoghatnak, a valóságban azonban sokkal kisebb korlátok között alakul nagyságuk. Ennek igazolására mellékeljük az alábbi – rendkívül leszűkített – táblázatot.

Következik a táblázat adataiból, hogy – azonos ütemű pénzkibocsátás (φ) esetén – a nagyobb α érték általában nagyobb β-t tételez fel és fordítva, és mindkettő egyenes arányban változik a φ-hez képest is, míg az aktív pénz részaránya (Ψ) fordítottan arányos az α-val. Az α mozgási sávja végsősoron azért nem lehet a gyakorlatban sem 0, sem 1 környezetében, mert az egyrészt lehetetlenülést eredményezne a tranzakciók lebonyolításában, másrészt nem biztosítana kellő mennyiségű pénzfelhalmozást a reális felhalmozások (beruházások) finanszírozására, illetve állandóan új (gerjesztett) pénzt kellene pumpálni a népgazdaságba a forgalom zökkenőmentes lebonyolítása érdekében. A számítások közvetlen eredménye az, hogy az α lehetséges értékeinek, vagyis az aktív pénz inaktívvá történő átalakulása ütemének, a megtakarítási hajlamot jellemző eme mutatónak is megvannak a gyakorlatban még elfogadható határai.

A β és a Ψ meghatározzák az α nagyságát, amely utóbbi visszahat azok értékére és befolyásolja nagyságukat, azaz a három paraméter között kölcsönös összefüggés áll fenn. Ez a megállapítás egyben azt is jelenti, hogy a matematikai modellben megszabott α; β nagyságrendi viszony a gyakorlatban nem tekinthető szigorú követelménynek, amiből viszont következik, hogy az α értékeire elfogadható nagyságok sem feltétlenül esnek egybe a β és a Ψ értékek tényleges tűrési határaival. Miután a szimulációs számítások erre vonatkozóan is tájékoztatást adnak, az egyes paraméterekre vonatkozó eredményeket úgy foglaltuk táblázatba, hogy azok lehetőleg útmutatást adjanak a gyakorlati szakemberek számára a pénzügyi irányítás és szabályozás végrehajtásához. Így pl. az utóbbi évek aktív pénzarányának fenntartása a reálisnak mutatkozó $\Psi = 67{,}5\%$-kal csak abban az estben lehetséges a még elfogadható 5–15%-os évenkénti pénzkibocsátási ütem mellett, ha fennáll a

$$0{,}25 \leq \alpha \leq 0{,}475 \quad \text{és} \quad 0{,}4 \leq \beta \leq 0{,}67$$

összefüggés. Ha az aktív pénz részaránya 75%-ot választunk, ami már maximálisnak tekinthető a jelenlegi pénzgazdálkodás feltételei között, akkor

$$0{,}25 \leq \alpha \leq 0{,}35 \quad \text{és} \quad 0{,}5 \leq \beta \leq 0{,}67$$

közé esik az átalakulások üteme. Ebben az esetben azonban rendkívül leszűkül a pénzügyi vezetés intézkedésének a szabadságfoka. Jellemzésül álljon itt az alábbi táblázat a pénzkibocsátás ütemére (φ-re) vonatkozóan.

φ értékei, ha $\psi = 0{,}75$

α \ β	0,500	0,667
0,250	0,125	0,031
0,275	0,162	0,059
0,300	0,200	0,087
0,325	0,238	0,115
0,350	0,275	0,144

Abban az esetben tehát, ha a népgazdaság tranzakciós pénzállománya az összes pénzmennyiség $^3/_4$ részét teszi ki, az egyensúly fenntartásához a bekeretezett részben elhelyezkedő 5,9–14,4%-os pénzkibocsátási ütem tartozik, feltéve, hogy az inaktív pénzt 1,5–2 év alatt elköltik a tulajdonosaik. Ekkor a tartalékolásra kerülő pénz évenként az aktív pénz 25–35%-a, ami meglehetősen magas arány, de nem kevésbé az a heverő pénzek felhasználását jellemző β-é sem. Megjegyezzük, hogyha $\beta = {}^1/_3$, vagyis három év alatt történnék az inaktív pénz forgalomba kerülése, akkor a pénzkibocsátás üteme 30% felett lenne 0,25-ös α és 0,75-ös Ψ érték esetén, ami már inflatorikus gazdaságra utal.

A népgazdaság jelenlegi növekedési ütemének figyelembevételével gyakorlatilag a *10–12,5%-os pénzkibocsátási ütem látszik reálisnak.* A fizetőképes kereslet szabályozása tehát – ebből következően is – nagy körültekintést és megfontolt intézkedéseket indokol. Különösen meggondoltan kell bánni a vállalati alapok képzésével és a szabad rendelkezésű pénzek tartalékolásával vagy zárolásával. Általában levonható az a tanulság, hogy mennél nagyobb az aktív pénz iránti igény, annál inkább csökken a szabad cselekvés lehetősége – ha tartani akarjuk magunkat a népgazdaság fejlődése által indokolt pénzkibocsátás mértékéhez, a pénzforgalom törvényéhez.

A modell gyakorlati alkalmazhatósága két területen máris lehetséges:

- *elemzések végezhetők* a tapasztalati adatok felhasználásával;
- *döntési változatok készíthetők* a paraméterek előre becslésével szimulációs számítások alapján.

Célunk az volt, hogy rámutassunk az összefüggések kölcsönhatására a pénzkibocsátás, a megtakarítás és azok felhasználásának determináltságára. A modell eszközül szolgálhat a monetáris politika megalapozottabbá tételére annak ismeretében, hogy adott gazdasági feltételek között – nevezetesen a pénzügyi szabályozó rendszer, valamint a lakosság megtakarítási hajlamának változása miatt – milyen szabadságfokkal rendelkezik a vezetés a pénzkibocsátás ütemének eldöntésénél. A népgazdaság tervszerű pénzellátása, különösen pedig a fizetési forgalom zavartalan lebonyolításához szükséges aktív pénz helyes mennyiségi arányának fenntartása az, ami a monetáris szervek, elsősorban a szocialista állam központi bankjának a feladata, s egyben lehetősége is. Ehhez kívántunk segítséget nyújtani a megadott differenciaegyenletrendszerrel.

(Beérkezett: 1979. agusztus 31-én)

IRODALOM

1. FÉNYES T.–SÁRI J.: Az országos hitelmérleg egy pénzegyensúlyi modellje. Szigma, 1975. 1. sz.
2. SÁRI J.: A pénz mennyisége és keresleti tényezői I–II. MNB Közgazdasági Főosztály Közleményei, 77. és 84. sz.
3. BUTZER, P. L.–SCHULTE, H.: Ein Operatorenkalkül zur Lösung gewöhnlicher und partieller Differenzengleichungssysteme von Funktionen diskreter Veränderlicher und seine Anwendungen. Köln und Opladen, 1965. Westdeutscher Verlag.
4. JURY, E.: Theory and Application of the z-Transform Method. New-York, 1964. Wiley and Sons.

ON THE DIFFERENCE EQUATION SYSTEM OF THE COMPOSITION OF THE AMOUNT OF MONEY

Concerning its mobility money stock can be devided at least into two major groups according to the spending or saving purpose, respectively, namely, active (mobile) money really participating in the realization of circulation and inactive (idle) money laid by, withdrawn from circulation. The full amount of money and within this the stock of mobile and idle money, respectively are steadily changing; the outward form of appearance of this process between two dates is the flow of money. The problem to be solved is to determine which share of active money will turn into inactive and vice-versa; furthermore, how long is the time-lag in this transformation.

The mathematical description of these processes is a system of difference equations indicating also the effect of induced and spontaneous money movements on the supply with money of the national economy, on its sufficient or insufficient volume, on viable, and stable situations following the mobility of money and on resulting regulation possibilities.

In the socialist national economy the issuing bank ensures the undisturbed functioning of the economy by planned emission of money. A condition of the smooth realization of money circulation is that there should always be enough active money available for the national economy to fulfil payment liabilities. Therefore, the investigation is aimed at determining how the state of equilibrium can be established in the course of financial regulation according to the model set up by the authors and how it can be maintained in the system described. Which is the degree of freedom under the given economic conditions for the management when deciding the rate of money emission? Practical application seems to be possible in two fields, namely, analyses can be made with the utilization of empirical data; decision variants can be elaborated by forecasting parameters on the basis of simulation computations.

О СИСТЕМЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНЫХ ДЕНЕЖНОЙ МАССЫ

С точки зрения мобильности в зависимости от целей траты или экономии денежная масса может быть подразделена на две большие группы: активные деньги, фактически принимающие участие в обеспечении оборота (мобильные) и пассивные сэкономленные деньги, не участвующие в обороте (неподвижные). Вся масса денег и, в рамках этого, величина (stock) мобильных и неподвижных денег постоянно меняется. Внешей формой проявления этого процесса в какой-то определенный период является денежный оборот (flow). Задача состоит в определении того, какая доля активных денег становится пассивной и наоборот; далее, при каком сдвиге по времени осуществляется такое преобразование.

Математическое описание этих процессов осуществляется с помощью системы разностных уравнений и при этом указывается воздействие искусственного и стихийного движения денег на обеспечение народного хозяйства деньгами, удовлетворительность или же недостаточность этого, эффективные стабильные ситуации, связанные с мобильностью денег и вытекающие из этого возможности регулирования.

В социалистическом народном хозяйстве бесперебойность функционирования экономики государственный банк обеспечивает путем планомерной эмиссии денег. Условием бесперебойности денежного оборота является то, чтобы в распоряжении народного хозяйства всегда имелось достаточное количество активных денег для покрытия обязательств по платежам. Поэтому цель обследования заключалась в установлении того, что в ходе финансового регулирования каким образом может обеспечиваться равновесие с учетом модели, разработанной авторами, и каким образом в рамках данной системы можно поддерживать, т. е. в аспекте сложившихся экономических условий какой степенью свободы располагает руководство при решении вопроса темпов эмиссии денег. Практическое использование представляется возможным в двух аспектах:

— анализ может выполняться с использованием эмпирических данных,
— могут разрабатываться варианты решений путем прогнозирования параметров на базе симуляционных расчетов.