FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

HUNYADI LÁSZLÓ

Megosztott késleltetésű ökonometriai modellek

Bevezetés

Az ökonometriában már a 30-as évektől kezdve vizsgálták azt a problémát, hogy hogyan lehet egy ok rövid és hosszú távú hatását szétválasztani, illetve a hosszú távú reakció időbeli lefolyását becsülni. A DL modellek[1] tételes és rendszeres tárgyalására azonban csak az 50-es évektől kezdve, elsősorban *Koyck* [5] és *Nerlove* [7] munkái alapján került sor. Azóta a tőkés országok modellezési gyakorlatában igen nagy szerepet kaptak a DL modellek és az utóbbi években egyes szocialista országokban is (elsősorban Lengyelországban és Csehszlovákiában) sikeres kísérleteket folytattak alkalmazásukkal.

A Magyarországon készült ökonometriai modellekben ez ideig a DL koncepciót nem alkalmazták, holott a gazdaság egyes szférái rugalmasságának, alkalmazkodóképességének vizsgálatakor, főként most, amikor a gyorsan változó feltételekhez való igazodás szinte gazdasági létkérdéssé vált, hasznos elemző eszköznek bizonyulhat. Ebben az ismertetésben természetesen nem részletezhetők a DL modelleknek még csak a legfontosabb problémái sem, csupán azokat kívánom kiragadni, amelyek a módszer megértése és főként gyakorlati alkalmazása szempontjából érdekesnek tűnnek. Mivel a DL modellek főbb elméleti kérdései a magyar nyelvű szakirodalomban is hozzáférhetők [6], itt a legfontosabb alapkérdések áttekintése mellett csupán a két legfontosabb hagyományos modellt, illetve becslési eljárást, majd a gyakorlat számára igen gyümölcsözőnek ígérkező egyik modern megközelítési módot mutatom be.

1. Osztott késleltetésű modellek megalapozása

Tekintsük az alábbi, egyszerű regressziós egyenletet:

$$y_t = w_0 x_t + w_1 x_{t-1} + w_2 x_{t-2} + \ldots + w_\lambda x_{t-\lambda} + u_t \tag{1}$$

amelyet DL modellnek nevezünk, ha a $w_0, w_1, \ldots w_\lambda$ paraméterek valamiféle szabályszerűség szerint alakulnak. Ez a definíció így természetesen meglehetősen általános és semmitmondónak tűnik, de ennél pontosabb meghatározás — éppen a később bemutatandó modern irányzatok miatt — aligha adható. Korábban — és innen származik az elnevezés is — azt feltételezték, hogy a w_i paraméterek, vagy súlyok egy normalizáló faktortól eltekintve valamely (ismert) valószínűségeloszlást határoznak meg, de ez a definíció idővel túlságosan merevnek bizonyult.

[1] A megosztott késleltetésű modelleket az angol nyelvű szakirodalomban distributed lag modelleknek nevezik. A továbbiakban a leírás során ezt az elnevezést az angol kifejezés rövidítésével (DL) helyettesítem.

Az (1) egyenlet természetesen a legegyszerűbb DL modell, hiszen csak egy változót tartalmaz, véges késleltetéssel, lineáris formában. Tekintve azonban, hogy a DL modellek problémái ilyen egyszerűsítés mellett is jól vizsgálhatók, ezt tekintjük kiindulásnak és ahol általánosabb kezelési mód szükséges, ott arra külön utalunk.

A modell interpretációja minden különösebb elvi megfontolás nélkül is világos: az x változó az y változóra csak bizonyos idő után fejti ki a teljes hatását. A késleltetett értékek együtthatóira — elméleti, közgazdasági megfontolásokból — a priori feltételezéseket állítunk fel, hiszen kézenfekvőnek látszik, hogy a súlyrendszernek valamiféle regularitást kell mutatnia. Ez azonban — elsősorban az idősoros becslések problémái (multikollinearitás) miatt — korlátozás nélküli becslések esetében általában nem teljesül. Ebben a megfogalmazásban a w_0 paraméter által leírt közvetlen hatást rövidtávúnak nevezik, a $\sum_{i=1}^{\lambda} w_i$ fejezi ki az összes késleltetett hatást, míg a rövidtávú és a késleltetett hatások összege, azaz $\sum_{i=0}^{\lambda} w_i$ a teljes hatást kifejező együttható.

Bár úgy vélem, hogy a DL modellek tartalma és lényege a fenti igen rövid bevezető alapján is megérthető, nem tartom érdektelennek bemutatni azt, hogy elméletileg hogyan származtathatók ezek a modellek.

Cagan[2] adaptív elvárási modellje bizonyos mezőgazdasági árak meghatározására szolgált az alábbi formában:

$$p_{t+1}^* - p_t^* = \beta(p_t - p_t^*) \qquad 0 < \beta < 1$$

ahol a *-gal jelölt mennyiségek várt értékeket jelölnek. A modell azt az egyszerű termelői magatartást kívánja leírni, miszerint a jövőben elérhető árakra vonatkozó elvárások arányosak a korábbi elvárások megvalósulásával. Könnyen belátható, hogy ez a kiinduló feltevés DL modellhez vezet, hiszen:

$$\begin{aligned} p_{t+1}^* &= \beta p_t + (1-\beta)\, p_t^* \\ p_t^* &= \beta p_{t-1} + (1-\beta)\, p_{t-1}^* \\ p_{t-1}^* &= \beta p_{t-2} + (1-\beta)\, p_{t-2}^* \\ &\vdots \end{aligned}$$

majd a megfelelő kifejezéseket fokozatosan egymásba helyettesítve

$$p_{t+1}^* = \beta p_t + \beta(1-\beta)\, p_{t-1} + \beta(1-\beta)^2 p_{t-2} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \beta(1-\beta)^i p_{t-i}$$

adódik, ami nyilvánvalóan egy végtelen késleltetéseket tartalmazó DL forma.

A másik hasonló és immár klasszikusnak számító DL modellt *Nerlove* készítette [7], ez részleges alkalmazkodási modell néven ismert. Nerlove először feltételezi, hogy valamely növény vetésterülete az előző évben elért árszinttől függ, azaz:

$$\tilde{y}_t = \beta p_{t-1};$$

[2] Idézi *Griliches* [3].

majd feltételezi, hogy a termelők megpróbáltak igazodni, alkalmazkodni az árak által meghatározott szinthez, de ez az alkalmazkodás általában nem lehet tökéletes. Ezt a magatartást írja le az

$$y_t - y_{t-1} = \gamma(\tilde{y}_t - y_{t-1})$$

egyenlet. A két egyenletet kombinálva

$$y_t = \gamma\beta p_{t-1} + (1-\gamma)y_{t-1}$$

alak kapható, majd ismét képezve a megfelelő késleltetett egyenleteket

$$y_{t-1} = \gamma\beta p_{t-2} + (1-\gamma)y_{t-2}$$

$$y_{t-2} = \gamma\beta p_{t-3} + (1-\gamma)y_{t-3}$$

és fokozatos behelyettesítés után

$$y_t = \gamma\beta p_{t-1} + (1-\gamma)\gamma\beta p_{t-2} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma\beta(1-\gamma)^{i-1} p_{t-i}$$

alakú DL modell adódik.

Ezeknél a modelleknél szándékosan tekintettünk el a véletlen változótól, utalva ezzel is arra, hogy ezek — és még több hasonlót lehetne említeni — csak elvi modellek. Bizonyos racionálisnak tekintett termelői vagy fogyasztói magatartás feltételezésével jutnak el hasonló formájú redukált egyenletre. Bár a szocialista gazdaságelmélet nem ezt a mikro-megközelítést alkalmazza, nyilvánvalónak tűnik, hogy a foggyasztók a szocialista gazdaságban is bizonyos mértékig konzervatívak, a termelői (vállalati) döntéseket nagymértékben befolyásolják bizonyos — elsősorban a múlt tapasztalatain alapuló — elvárások, a változó piaci (külpiaci!) feltételekhez való alkalmazkodás csak tökéletlenül és számottevő késéssel valósul meg, a tervhez való alkalmazkodás is csak részleges lehet. Így — úgy vélem — a DL koncepció alkalmazása a szocialista modellezési gyakorlatban feltétlenül indokolt. Ennek azonban feltétele, hoy rendelkezésünkre álljanak azok az eszközök, amelyek ökonometriai — becslési oldalról kezelhetővé teszik az említett modelleket. Ezek közül mutatok most be néhányat.

2. Két hagyományos DL becslési eljárás

Mint a fenti elvi modellekből is láttuk, a végtelen késleltetéssel rendelkező modellek paraméterei gyakran csökkenő geometriai sorozat szerint alakulnak (eltekintve a sorösszeg normálásától, azt mondhatjuk, hogy geometriai eloszlásúak). Vizsgáljuk meg először ezt a DL modelltípust!

Alakítsuk át az (1) egyenletet úgy, hogy feltételezzük az alábbi összefüggések teljesülését

$$w_i = w_0\beta^i \qquad (i = 1, 2\ldots).$$

Ekkor a kiinduló egyenlet az alábbi formát ölti:

$$y_t = w_0 x_t + w_0\beta x_{t-1} + w_0\beta^2 x_{t-2} + \ldots + u_t = \sum_{i=0}^{\infty} w_0\beta^i x_{t-i} + u_t, \tag{2}$$

ahol az u_t véletlen változóra a klasszikus feltételezések érvényesek. Ahhoz, hogy jól kezelhető becslő formát nyerjünk, írjuk fel a (2) egyenletet egy időszakkal késleltetve, és szorozzuk meg mindkét oldalát β-val:

$$\beta y_{t-1} = w_0 \beta x_{t-1} + w_0 \beta^2 x_{t-2} + \cdots + \beta u_{t-1}, \tag{3}$$

majd vonjuk ki (2)-ből (3)-at és a lehetséges egyszerűsítések után:

$$y_t = \beta y_{t-1} + w_0 x_t + u_t - \beta u_{t-1} \tag{4}$$

adódik. Ez az eljárás az ún. Koyck transzformáció [9], melynek eredményeképpen egy jól kezelhető, kétváltozós formát kapunk, amelynek becslése technikailag nem okoz gondot. Mindazonáltal (4)-nek a klasszikus legkisebb négyzetekkel (OLS) történő becslése korántsem problémamentes. A nehézségek abból adódnak, hogy az egyenlet jobb oldalán (késleltetett) endogén változó áll, s ebből következik az, hogy (4) maradékváltozója nem mentes az autokorrelációtól még akkor sem, ha u_t-re ezt feltételeztük. Hiszen:

$$E[(u_{t+1} - \beta u_t)'(u_t - \beta u_{t-1})] = E[u'_{t+1} u_t - \beta u'_{t+1} u_{t-1} - \beta u'_t u_t + \beta^2 u'_t u_{t-1}] =$$
$$= E(-\beta u' u_t) = -\beta \sigma_u^2 \neq 0,$$

s így az OLS a paraméterek szórásának torzított becsléséhez vezet.

Emellett azonban a (4) egyenletben a magyarázó változó és a véletlen változó sem tekinthető függetlennek, hiszen:

$$E[y'_{t-1}(u_t - \beta u_{t-1})] = E[y'_{t-1} u_t - \beta y'_{t-1} u_{t-1}] = E[u'_{t-1} u_t - \beta u'_{t-1} u_{t-1}] =$$
$$= -\beta E(u'_{t-1} u_{t-1}) = -\beta \sigma_u^2$$

ez pedig azt jelenti, hogy az OLS torzított becslést ad a paraméterek értékére is.

A gyakorlatban ezek a nehézségek azonban nem ilyen súlyosak. Főként nagyobb minták, valamint az alapmodell reziduumainak 0-tól eltérő autokorrelációja (vö. *Theil* [9]) általában odavezetnek, hogy a kapott becslések elfogadhatók lesznek. Ez az oka annak, hogy ökonometriai modellekben gyakran találkozunk azzal a specifikációval, amelyben a magyarázó változók közt a megfelelő folyó exogén változók mellett az endogén változó késleltetett értéke is szerepel, ami tehát egy végtelen késésű, geometriai eloszlású DL modell implicit formája.

A végtelen sok késést tartalmazó DL modellek irodalma igen gazdag (erről jó áttekintést nyújt Griliches tanulmánya [3]), de gyakorlati jelentőségük egyrészt bonyolultságuk, másrészt pedig a becslésükhöz szükséges nagyobb minták miatt viszonylag kicsi. Gyakorlati becslési szempontból a véges sok késleltetést tartalmazó modellek szerepe nagyobb, ezek közül most a legáltalánosabban alkalmazott Almon módszert mutatom be.

Almon [1] feltételezte, hogy az előre meghatározott számú késést tartalmazó modell paraméterei (súlyai) ugyancsak előre megadott fokszámú polinom szerint alakulnak. Az előzetes információk, azaz a késések száma (λ) és a polinom fokszáma (g) gazdaságelméleti megfontolásokból kaphatók, hiszen a modellező a priori tudja, hogy a gazdaságban egy adott jelenség vizsgálatánál kb. milyen maximális késéssel számolhat, és arra nézve is vannak ismeretei, hogy az eloszlás alakja milyen lehet. Ilyen kiinduló feltételezésekből Almon interpolációs polinomok felhasználásával jut el egy meglehetősen bonyolult becslő formához. Kimutatható azonban, hogy az alábbi, igen egyszerű becslési módszer az eredeti Almon technikával numerikusan egyenértékű megoldáshoz vezet. Tekintsük ugyanis az

$$y_t = w_0 x_t + w_1 x_{t-1} + \dots + w_\lambda x_{t-\lambda} + u_t$$

alakú modellt és a legegyszerűbb esetben tételezzük fel, hogy a w_i súlyok lineáris függvény szerint alakulnak, azaz

$$w_0 = a + b$$

$$w_1 = a + 2b$$

$$\vdots$$

$$w_\lambda = a + (\lambda + 1)b.$$

Behelyettesítve az eredeti egyenletbe ezeket az összefüggéseket:

$$y_t = (a + b)\, x_t + (a + 2b)\, x_{t-1} + \dots + [a + (\lambda + 1)\, b]\, x_{t-\lambda} + u_t =$$

$$= a \sum_{i=0}^{\lambda} x_{t-i} + b \sum_{i=0}^{\lambda} (i + 1)\, x_{t-i} + u_t$$

adódik, ahonnan a becslési eljárás kézenfekvő. Képezzük az

$$S_1 = \sum_{i=0}^{\lambda} x_{t-i}, \quad S_2 = \sum_{i=1}^{\lambda} (i + 1)\, x_{t-i}$$

új változókat, ezek segítségével becsüljük $\hat{a}$ és $\hat{b}$ értékeit, majd a w_i értékek egyszerűen kiszámíthatók. Természetesen hasonlóképpen lehet becsülni magasabb fokszámú polinomok feltételezésével is a súlyok értékét. Megjegyezzük, hogy a Magyarországon is meglevő ökonometriai programcsomagok (AUTO, TSP), amelyekben standard utasításként szerepel a DL modellek Almon-becslése, ezt az algoritmust használják.

A módszerrel kapcsolatban még egy megjegyzést kívánok tenni. Míg a korábban ismertetett módszer az exponenciális függvény tulajdonságaiból következően eleve biztosította, hogy a paraméterek pozitívak, monoton csökkenők legyenek és 0-hoz konvergáljanak, polinomok esetében ez általában nem igaz. Ezért különböző addicionális feltevésekkel szoktak élni, melyek közül a leggyakoribb a végpont (vagy esetleg végpontok) rögzítése. Ennek tipikus esete az, amikor a modellező rögzíti a késleltetések maximális számát, feltételezve, hogy pl. a λ-edik késés már nem, de a $(\lambda - 1)$-edik még releváns tényező. A fenti lineáris példában ez a

$$w_\lambda = 0 = a + (\lambda + 1)\, b$$

pótlólagos feltétel beépítésével valósítható meg, ami természetesen oda vezet, hogy a és b paraméterek a becslés során már nem lesznek függetlenek.

A fent vázolt Almon-módszer rendkívül elterjedt, egyszerűsége mellett fő előnye az, hogy csökkenti a becsülendő paraméterek számát, növelve ezáltal a becslés szabadságfokát, és az, hogy „reguláris" súlyrendszert határoz meg. Alkalmazásával kapcsolatban a legfőbb probléma, hogy általában nincs elég elméleti alapunk azt állítani, hogy egy DL súlyrendszer *éppen* egy polinom szerint alakul; azaz bizonyos mértékig önkényes, nem kellően megalapozott hipotéziseket visz a becslésbe. Ugyanezzel a problémával kapcsolatos a módszer merevsége is, hiszen a paraméterekre erőszakolt függvény viszonylag kis teret enged a mintában levő információk kihasználásának. Mindezek a hátrányos tulajdonságok ösztökélték a kutatókat arra, hogy reálisabb és rugalmasabb módszereket fejlesszenek ki; ezekről a modern irányzatokról számol be a következő rész.

3. A DL modellek becslésének újabb irányai

A DL modellek becslésének modern módszerei azzal jellemezhetők, hogy igyekszenek a modellek a priori információigényét reálissá tenni, azaz nem igényelnek több feltételezést, mint amennyit a gazdaságelmélet valóban megenged. Így a két legfontosabb irányzat közös vonása, hogy nem kötik meg mereven a súlyrendszert leíró függvénytípust, ha nem csak az eloszlás „regularitását", „simaságát" feltételezik és ebből vezetik le a megfelelő becslő formulát. *Shiller* [8] a bayesi elmélet felhasználásával, az ún. *spline* függvényen alapuló megközelítés [2] pedig — lényegileg hasonló kiindulópontból — szakaszosan polinominális függvények alkalmazásával jut becslő formulákhoz. E két megközelítésből az elsővel foglalkozunk, mert egyfelől maga az eljárás igen szellemes és gyakorlatilag kényelmesen alkalmazható végeredményre vezet, másfelől ez a módszer már részben a gyakorlatba is bevonult, míg a másik még csak a kísérletezés stádiumában van.

Shiller abból indul ki, hogy a sima függvények differenciái 0 körül szóródnak normális eloszlás szerint. Az ismeretes, hogy a g-ed fokú polinomok $g+1$-edik differenciái 0-val egyenlők, így ha kiindulásul azt tekintjük, hogy egy ismeretlen függvény g-edik differenciái 0 várható értékű és kívülről megadható (ismeretlen) szórású normális eloszlást követnek, akkor ezt a feltételt egy $g-1$ fokú polinomhoz „közel álló" függvény elégíti ki. Ez az eljárás tehát „polinom-közeli" függvényeket preferál, de az is belátható, hogy ezek a függvények — a szórás megfelelő megválasztása esetén — kellőképpen rugalmasak.

Shiller alapmodellje $y = Xw + u$ alakú, ahol y és X T számú megfigyelési értékből áll, míg w $(\lambda + 1)$ elemből áll (azaz a folyó értékek mellett λ számú késleltetett változót specifikál). A véletlen változóra az $E(u) = 0$ és az $E(uu') = \sigma_u^2 I$ klasszikus feltevéssel él, emellett feltételezi a véletlen változók normális eloszlását is[3]:

$$f(u) \propto \left(\frac{1}{\sigma_u}\right)^T \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_u^2}u'u\right).$$

A súlyok eloszlásának simaságához szükséges a differenciaképző mátrix, amelynek tetszőleges sora a

$$(-1)^{(g-1+k)}\binom{g-1}{k}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots g-1$$

formából adódó előjeles binomegyütthatókból és megfelelően elhelyezett 0 elemekből állítható elő. Példaként bemutatjuk a $g = 2$ és a $g = 3$ esetekhez

[3] A formulában (és a későbbiekben is) szereplő $\propto$ jel a bayesi elméletben általánosan használt arányossági reláció szimbóluma.

tartozó — a gyakorlati alkalmazások szempontjából leglényegesebb — mátrixokat:

$$R_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

ahol az oszlopok száma $r = \lambda + 1$, míg a soroké $p = \lambda + 1 - g$. Belátható, hogy egy tetszőleges vektort (például az ismeretlen w paramétervektort) a megfelelő R mátrixszal szorozva, annak g-edik differenciáját kapjuk, így a $v = Rw$, $E(v) = 0$, $E(vv') = \sigma_v^2 I$ specifikáció, kiegészítve az eloszlás normalitására tett feltétellel:

$$f(v \mid \sigma_v^2) \propto \left(\frac{1}{\sigma_v}\right)^p \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_v^2} v' v\right),$$

valóban azt jelenti, hogy az ismeretlen w paramétervektornak simának kell lennie. (Megjegyezzük, hogy σ_v paraméter ismeretlen és mint látni fogjuk, éppen ennek változtatásával lehet megadni a simaság kívánt mértékét.)

A becslés a bayesi elmélet alkalmazásával adódik, amely szerint a paraméterek *a posteriori* (becsült) eloszlása arányos a paraméterekre feltételezett a priori eloszlással és a minta likelihood függvényével,[4] azaz esetünkben:

$$f(w \mid y, \sigma_{\mathrm{v}}^2) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_v^2}(w' RRw)\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{\mathrm{u}}^2}(y - Xw)'(y - Xw)\right]$$

Bevezetve a $k = \sigma_{\mathrm{u}}/\sigma_{\mathrm{v}}$ helyettesítést és kiemelve $1/\sigma_{\mathrm{u}}^2$-t:

$$f(w \mid y, \sigma_{\mathrm{v}}^2) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{\mathrm{u}}^2}\{(y - Xw)'(y - Xw) + k^2(Rw)'(Rw)\}\right]$$

adódik, majd a megfelelő méretű $\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{y}$ és $\begin{pmatrix} X \\ kR \end{pmatrix} = \tilde{X}$ helyettesítés után

$$f(w \mid y, \sigma_{\mathrm{v}}^2) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{\mathrm{u}}^2}(\tilde{y} - \tilde{X}w)'(\tilde{y} - \tilde{X}w)\right]$$

kapható. A kifejezés egyszerűbbé tétele érdekében a kitevőből egy konstans mennyiséget $(\hat{\tilde{u}}' \hat{\tilde{u}})$ levonunk (ezt az $\propto$ arányossági reláció megengedi). Kihasználva, hogy $\hat{\tilde{u}} = M\tilde{y}$ és hogy $M = I - \tilde{X}(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'$ idempotens mátrix, belátható, hogy algebrai átalakítások után a kapcsos zárójelben levő kifejezés:

$$\{[(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'y - w]'(\tilde{X}'\tilde{X})[(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'y - w]\}$$

[4] A bayesi elmélet, amely az ökonometria egyik modern területe, feltételezi, hogy a modellezőnek a priori ismeretei vannak a becsülendő paraméterek eloszlására vonatkozóan. Az így specifikált *a priori* eloszlásnak és a mintának az egybevetése ad lehetőséget a paraméterek *a posteriori* (becsült) elosztásának meghatározására. Így a becslés outputjaként — ellentétben a hagyományos ökonometriával, amely „csak" a paraméterek várható értékét és szórását adja meg — jelentős többletinformációként a paraméterek teljes eloszlását kapjuk meg. A bayesi elmélet alapfogalmainak részletes leírása magyar nyelven is megtalálható *Malinvaud* könyvében [6].

alakra hozható, és az *a posteriori* sűrűségfüggvény a következő lesz:

$$f(w \mid y, \sigma_v^2) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_u^2}(\hat{w}-w)'(\tilde{X}'\tilde{X})(\hat{w}-w)\right].$$

Ebből a formából jól látható, hogy az *a posteriori* eloszlás normális, várható értéke $\hat{w} = (\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}\tilde{X}'\tilde{y}$, szórásnégyzete pedig $D^2(\hat{w}) = \sigma_u^2(\tilde{X}'\tilde{X})^{-1}$, azaz a becslő formula megegyezik a $\sim$-val jelölt transzformált változókra alkalmazott OLS becsléssel.

A módszer alkalmazása tehát rendkívül egyszerű: az eredeti y és X változókból képezni kell $\tilde{y}$-t és $\tilde{X}$-t úgy, hogy y-t megfelelő számú 0-val, az eredeti x-ből és a saját késleltetett idősorából kialakított X mátrixot pedig a kR „dummy" részmátrixszal egészítjük ki, majd az így kapott új változókra egyszerű OLS becslést készítünk. A becslés során központi szerepe van a k vezérlő paraméternek, amelynek nagysága arányos a simasági követelmény szigorúságával. Mielőtt azonban a módszer számítási tapasztalatait ennél részletesebben ismertetném, röviden bemutatom Shiller módszerének a hagyományos ökonometriai eszközöket felhasználó újabb interpretációját [10], amely egyben lehetőséget ad a paraméterekre, vagy azok lineáris kombinációira vonatkozó további *a priori* korlátok figyelembevételére. Érdemes megjegyezni, hogy a módszer ilyen interpretációja nem más, mint amit Theil [9] külső információt felhasználó kevert becslési eljárásnak nevez.

Induljunk ki most is az $y = Xw + u$ modellből, ahol a véletlen változóra a korábbi feltételek érvényesek. Írjuk fel a „simasági" feltételt $0 = Rw + v$ alakban, ismét a korábbiakhoz hasonló tulajdonságú véletlen változót feltételezve. (Megjegyezzük, hogy ebben az egyszerű modellben is csak a megoldás alapelvét mutatjuk be, de vele a legáltalánosabb DL modellek is jól kezelhetők). A rendszer felírható a következő alakban:

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ R \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{avagy} \quad \tilde{y} = \tilde{X}w + \tilde{u}.$$

A becslés egyetlen problémája, hogy az $\tilde{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ véletlen változó kovariancia mátrixa nem ún. skalár kovariancia mátrix, hiszen:

$$E\left[(uv)'\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 I & \operatorname{cov}(uv) \\ \operatorname{cov}(uv) & \sigma_v^2 I \end{pmatrix} = \Sigma \neq \sigma^2 I.$$

Az viszont feltételezhető, hogy $\operatorname{cov}(uv) = 0$, így Σ legalább diagonális lesz. Ezért w becslésére az ún. súlyozott legkisebb négyzetek módszere (WLS) ad konzisztens becslést:

$$\hat{w} = (\tilde{X}'\Sigma^{-1}\tilde{X})^{-1}\tilde{X}\Sigma^{-1}\tilde{y} \text{ ahol } \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sigma_u^2} I & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sigma_v^2} I \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Könnyen belátható, hogy $\hat{w}$ invariáns Σ^{-1}-nek skalárral való szorzására, így a továbbiakban Σ^{-1} helyett $\tilde{\Sigma}^{-1}$-t használjuk, amely definíciója:

$$\tilde{\Sigma}^{-1} = \sigma_u^2\,\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \dfrac{\sigma_u^2}{\sigma_v^2} I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & k^2 I \end{pmatrix}.$$

Így már az is könnyen kimutatható, hogy az (5) becslés ekvivalens a következő formulával.

$$\tilde{w} = [(\tilde{X}'\,\tilde{\Sigma}^{-\frac{1}{2}})\,(\tilde{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\tilde{X})]^{-1}\,(\tilde{X}'\,\tilde{\Sigma}^{-\frac{1}{2}})\,(\tilde{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\tilde{y}),$$

amelyből rögtön látható, hogy $\tilde{\tilde{y}} = \tilde{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\tilde{y}$ és $\tilde{\tilde{X}} = \tilde{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\tilde{X}$ helyettesítéssel OLS becslésről van szó, ahol a reziduumok kovariancia mátrixa:

$$E(\tilde{\tilde{u}}\tilde{\tilde{u}}' = E(\tilde{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\tilde{u}\cdot\tilde{u}'\,\tilde{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}) = \tilde{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}E(\tilde{u}\,\tilde{u}')\,\tilde{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} = \tilde{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}.\Sigma.\,\tilde{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} = \sigma_u^2 I.$$

Az is azonnal látszik, hogy $\approx$-el jelölt változók, amelyek közt OLS becslést kell végezni, az eredeti változókból igen egyszerűen származtathatók, hiszen

$$\tilde{\tilde{y}} = \tilde{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\tilde{y} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & kI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\tilde{X}} = \tilde{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\tilde{X} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & kI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ kR \end{pmatrix},$$

azaz az eljárás ekvivalens a bayesi úton kapott becsléssel. Míg az első – eredeti – megoldás jobban összhangban van az elgondolás szellemével, ez utóbbi kényelmes kezelhetőségéből kifolyólag bonyolultabb gyakorlati esetek kezelésénél válhat hasznossá. Ezt azért érdemes hangsúlyozni, mivel az itt tárgyalt eset a lehető legegyszerűbb, legspeciálisabb. Gyakorlati feladatokban több változó szerepelhet késéssel, vagy késés nélkül, korlátozások lehetnek az egyes paraméterekre (pl. végkorlát), vagy a paraméterek lineáris kombinációjára (pl. két késleltetett változó paramétereinek összege, azaz az endogén változóra kifejtett hosszútávú hatásuk egyenlő), esetleg a véletlen változó autokorrelációjával is számolni akarunk stb. Ez utóbbi megközelítés meglehetősen egyszerűvé teszi a fent említett és hasonló problémák kezelését egy DL modellen belül (vö. [10]).

4. A becslések néhány tulajdonsága, számítási tapasztalatok

Mivel e rövid ismertetés fő célja, hogy a DL modellek gyakorlati felhasználásához adjon kiindulópontot, befejezésül célszerű tézisszerűen összefoglalni – elsősorban a Shiller módszerre vonatkozóan – azokat a főbb tudnivalókat, amelyek a numerikus becslésnél elengedhetetlenek.

a) A véges sok késést tartalmazó DL modellek speciális problémái az egyes változók késleltetett idősorai közt fennálló multikollinearitásból adódnak. Ez a multikollinearitás zavarja a paraméterbecsléseket és nem engedi meg, hogy az egyszerű, korlátozás nélküli (OLS) becslések pontosan tükrözzék a megfelelő eloszlások elméleti értékeit. Ezért addicionális korlátozások formájában külső információt kell bevinni a becslésbe.

b) Almon módszere ezt a problémát úgy oldja meg, hogy új mesterséges változók bevezetésével csökkenti a becsülendő paraméterek számát, csökkenti a változók közti multikollinearitást és növeli a becslés szabadságfokát.

c) Shiller módszere — technikáját tekintve — éppen fordítva, az idősorok hosszát növeli meg, csökkentve ezáltal a sorok közti multikollinearitást és növelve természetesen a becslés szabadságfokát.

d) Belátható, hogy Shiller módszere — rugalmasságából kifolyólag — speciális esetként magában foglalja mind a korlátozás nélküli (OLS) becslést, mind pedig az Almon módszert. Ha ugyanis k értékét 0-nak választjuk, azaz a differenciák szórását végtelenre növeljük, semmi addicionális információt nem viszünk be a rendszerbe, és formailag is könnyen belátható, hogy az egyszerű OLS becsléshez jutunk. Ha viszont k értékét elegendően nagynak választjuk ($k \to \infty$), azaz a differenciák szórásával 0-hoz tartunk, a $g-1$ fokú Almon becsléshez jutunk. Shiller módszere tehát k értékének változtatásával folytonos átmenetet teremt a teljes információhiány és a teljesen megkötött eloszlástípus között.

e) Általában igaz az, hogy minél több a priori korlátozást vezetünk be egy egyenlet becslésébe, annál rosszabbak lesznek az illeszkedést jellemző hibamutatók. Nyilvánvaló, hogy a paramétereiben nem korlátozott OLS becslés hibamutatói jobbak, mint az erősen korlátozott Almon becslésé, ezzel szemben az Almon módszer — a maga módján — biztosítja a paraméterek regularitását és a kiindulásul szolgáló közgazdasági elméletekkel való konformitásukat. Shiller módszere e téren is előnyös átmenetet képez; k megfelelő megválasztásával elérhető egy közgazdaságilag megfelelő paraméterstruktúra, melynek statisztikai jellemzői is kielégítőek.

f) Shiller módszere esetén jól megfigyelhető a korlátozások „szorításának" hibanövelő hatása, amit az alábbi táblázat is mutat[5].

k értékei	Standard hiba	R^2
0,1	0,1757	0,9926
0,2	0,1763	0,9926
0,3	0,1768	0,9925
0,4	0,1774	0,9918
0,5	0,1784	0,9909
1,0	0,1788	0,9908

A hibák viszonylagos stabilitása, amit e példán tapasztalhatunk, arra utal, hogy a paraméterek eloszlására vonatkozó addicionális korlátozó feltevés nagymértékben egybevág a mintával, azaz valójában nem jelent számottevő korlátozást.

[5] A becslés az olasz nemzetgazdaság Bologna Modelljének export egyenletére vonatkozik. Az egyenletben az endogén változó az export volumenének logaritmusa, az osztott késésű változó pedig (amire a Shiller módszert alkalmaztuk) a kapacitáskihasználással korrigált relatív exportárindex logaritmusa volt. A negyedéves bázisú egyenletnél maximálisan 5 időszakos késést specifikáltunk, az 5. időszak paraméterét 0-ra korlátoztuk (végpont). A becslés „célfüggvénye" a második differenciák simasága volt. A becsléssel kapcsolatos további részleteket egy kéziratos munkaanyag [4] tartalmazza.

g) A Shiller módszer alkalmazásának kulcskérdése k helyes megválasztása. Erre nézve általános eljárás vagy szabály nem konstruálható, hiszen ez a feladat természetétől, az *a priori* ismeretek megbízhatóságától és az adatok, valamint a becsülendő paraméterek nagyságrendjétől függ. Meghatározásához olyan eljárás látszik célszerűnek, amely a $k = 0$ becslésből (OLS) indul ki, majd (próbálkozással) meghatározza k azon reális értékét, amely gyakorlatilag már polinomot eredményez, végül a két kritikus érték között, meghatározott lépésközzel próbálkozva, lokalizálja k azon értékeit, amelyek mind a paraméterek közgazdasági tartalma, mind pedig azok statisztikai mutatói szempontjából elfogadható becslésre vezetnek. A szerző numerikus tapasztalatai arra engedtek következtetni, hogy amennyiben az egyenlet valamennyi változójára logaritmikus transzformációt alkalmazunk, azaz mind a megfigyelési adatok, mind pedig a paraméterek (elaszticitások) nagyságrendjét szinte „standardizáljuk", k megfelelő értékei az esetek jó részében 0,3 és 0,7 között adódtak.

h) Mind az Almon, mind pedig a Shiller módszer alkalmazásánál fontos kérdés a megfelelő polinom fokszámának *a priori* meghatározása, amelynél mindenekelőtt a becslés szabadságfokára kell tekintettel lenni. Éves szintű makromodellek esetében tehát, ahol 4 késleltetésnél többet aligha lehet feltételezni, első-vagy legfeljebb másodfokú polinom alkalmazása lehet indokolt, természetesen az adott probléma függvényében.

i) Érdekes összefüggés mutatható ki az alapegyenlet reziduumában meglevő esetleges autokorreláció és a megfelelő polinom fokszáma között. Egyszerűen belátható [8], hogy amennyiben az u_t sorában 1-hez közelálló autokorreláció van, Shiller módszere automatikusan az eredetileg specifikált polinomnál eggyel magasabb fokszámú polinomhoz „közeli" függvényt eredményez.

j) Végül, ami a becslések számítástechnikai megvalósítását illeti, már említettük, hogy az ökonometriai programok standard utasításként tartalmazzák az Almon módszerrel történő becslést. Újabb változataik már a Shiller módszer becslésre is alkalmasak, de a módszer egyszerűségénél fogva még csekély gyakorlattal rendelkező programozó is igen rövid idő alatt képes jól működő programot készíteni.[6] Befejezésképpen csak annyit tartok szükségesnek megemlíteni, hogy bár egy ilyen rövid ismertetőben valóban csak a legfontosabbnak tartott problémák exponálására lehetett vállalkozni, remélhető, hogy ez az áttekintés felkelti a figyelmet e módszerek iránt. Az érdeklődők a DL modellek igen gazdag elméleti irodalmából, valamint az ezeket a módszereket széles körben használó modellek leírásából bőséges további ismereteket és gyakorlati tapasztalatokat meríthetnek. Talán ez is hozzájárul a magyar ökonometriai kutatások szintjének emeléséhez, és olyan modellek kidolgozásához, amelyek a jelenleginél nagyobb mértékben képesek gyakorlati segítséget nyújtani az aktuális gazdaságpolitikai kérdések elemzéséhez és megválaszolásához.

(Beérkezett: 1979. augusztus 17-én)

[6] A szerző az AUTO nevű ökonometriai programcsomaghoz készített standard szubrutint a Shiller módszerre; ez a SZÁMKI Ökonometriai Főosztályán hozzáférhető.

IRODALOM

1. ALMON, S.: The distributed lag between capital appropriations and expenditures· Econometrica, 33. (1965) 178–196 pp.
2. CORRADI, C.—GAMBETTA, G.: The estimation of distributed lags by spline functions. Empirical Economics, 1. (1978) 41–51 pp.
3. GRILICHES, Z.: Distributed lags: A survey, Econometrica, 35. (1967) 16–49 pp.
4. HUNYADI, L.: Reestimation of the Foreign Trade Equations of the Bologna Model Using Shiller's Method. 1979. (Kézirat).
5. KOYCK, L.: Distributed lags and investment analysis. North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1954.
6. MALINVAUD, E.: Az ökonometriai statisztika módszerei. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1974.
7. NERLOVE, M.: Estimates of the elasticities of supply of selected agricultural commodities. Journal of Farm Economics, 38(2), (1956).
8. SHILLER, R.: A distributed lag estimator derived from smoothness priors. Econometrica, 41. (1973) 775–788 pp.
9. THEIL, H.: Principles of econometrics, J. Wiley et Sons Inc. New York, 1971.
10. WILSON, J. F.—TAKÁCS, W. E.: Differential responses to price and exchange rate influences in the foreign trade of selected industrial countries. International Discussion Papers No. 104. I. M. F. 1977.