Fényes Tamás—Sári József

Gazdasági folyamatok idősorainak elemzése és előrebecslése

Az idősorok elemzésére számos módszer ismeretes a statisztika ill. a matematikai statisztika területén. Ezek közé tartoznak többek között a bázis- és láncviszonyszámok, a különböző típusú trendek, a szezonindexek, a regressziós függvények, az inter- és extrapoláció. A jelenleg alkalmazott eljárások közül kiemelkedő helyet foglal el Box-Jenkins [1] előrebecslési módszere, akik valamely sztochasztikus folyamatot egy autoregresszív és egy mozgóátlagos trend értékeinek összegeként értelmeznek. A jelen cikk keretében az idősorok elemzésének és előrebecslésének egy általunk kialakított sajátos módszerét ismertetjük, ami bizonyos mértékig rokon az [1] szerzőinek elgondolásával. Az itt ismertetésre kerülő eljárás azonban lényegében a szerzők „Periodikusan változó közgazdasági folyamatok" című cikkében megadott feltételekből indul ki [2], amit ezúttal továbbfejlesztettünk és általánosabb megoldást adunk a közgazdaságilag megfogalmazott problémára.

1. A feladat közgazdasági megfogalmazása

A gazdasági folyamatok időben lejátszódó eseménysorozatok eredményei, amelyek számszerűen forgalmi adatok formájában jelennek meg, s a közgazdasági kategóriákat mennyiségileg jellemzik a statisztikai számbavétel osztályozási rendszere szerint. A folyamatok mennyiségben vagy értékben kifejezett nagysága időszakról-időszakra változik, de alapjában véve valamilyen irányba halad, szezonszerűen ingadozik és a véletlenek által befolyásolt kisebb-nagyobb mértékben eltér „szabályos" pályájától. Feladatunk a tendencia fő irányvonalának meghatározása a szezonszerű eltérések és véletlenek „zavaró" hatásának feltárása és az eltérések hipotézisének vizsgálata matematikai-statisztikai módszerekkel.

A gyakorlati tapasztalatok, a közgazdasági elemző munkában rendszeresen alkalmazott számítások általában igazolják azt az egyébként is logikusnak látszó feltevést, hogy egy meghatározott periódushossz elteltével nagyjából azonos ütemű változás következik be, ill. várható. Feltételezhető tehát, hogy a vizsgált kategória egy-egy azonos időtartam alatt megközelítőleg ugyanolyan ütemben nő vagy csökken. Ezért felírható a szerzők fentebb hivatkozott cikkében közölt összefüggés:

$$\frac{F(t)}{F(t-1)} = \alpha(t)\frac{F(t-j)}{F(t-j-1)}, \tag{1}$$

ahol: F = a forgalom nagysága
t = az idő általában ($t = 0, 1, 2.\ldots\ldots$)
j = a periódus hossza, ahol a szezonszerűség ismétlődik (j = pozitív egész)
α = az ütemváltozást befolyásoló együttható ($\alpha = 1$ körül ingadozó érték).

A fenti (1) összefüggés írja le azt a közgazdasági feltételezést, hogy valamely t időszakban lejátszódó gazdasági folyamat nem csupán egy előző, a szezonalitásra jellemző periódus-hosszal van szorosabb kapcsolatban, hanem meghatározója lehet az azt megelőző vagy követő más időszakokból képzett összefüggés is. Ezért a fenti (1) egyenlőségnél általánosabbat írunk fel, és numerikus számításokat végzünk annak megállapítására, hogy a feltételezések érvényesülnek-e a valóságban. A közgazdaságilag felvetett problémát az alábbi egyenlőséggel jellemezzük:

$$F(t) = \left[F(t-1) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \frac{F(t-j)}{F(t-j-1)} \right] v(t), \tag{2}$$

ahol: n = az időeltolással képzett láncviszonyszámok száma $0 \leq \alpha_j \leq 1$, $j = 1, 2, \ldots n$
v = valószínűségi változó, a véletlen nagyságát kifejező tényező, $v(t) \cong 1$.

A tulajdonképpeni feladat az α_j értékek kiszámítása és gyakorlati alkalmazása. Közgazdaságilag elfogadhatónak látszik az a feltételezés, hogy a $(t-j)$ időszakok fejlődését kifejező láncindex-számokból képzett sorban azok határozzák meg legerősebben az $F(t)$ értékét, amelyek között viszonylag legszorosabb a kapcsolat. Statisztikai fogalmak szerint ez azt jelenti, hogy mennél kisebb a $(t-j)$ láncindex-számokból képzett különböző intervallumok között elhelyezkedő adatok szóródása, az összefüggés annál megbízhatóbban fejezi ki az egyes t időszakokra érvényes tényezők tényleges nagyságát, ill. várható értékét.

Az elmondottakból következik az a meggondolás, hogy az α_j értékek sorában ott legyen nagyobb az együttható, vagyis erőteljesebben befolyásoló a súly, ahol a viszonylag legkisebb eltérések mutatkoznak a láncindex-számok nagyságában. Ezt számszerűen oly módon határozhatjuk meg, hogy a szórás, ill. a szórásnégyzet reciprok értékeit állítjuk nagyságrendi sorrendbe. Ily módon egy nullához tartó pozitív számsort kapunk ($j \to n$; $\alpha_n \to 0$) és ha ezek értékeiből megoszlási viszonyszámot számítunk, akkor kielégítjük a fenti feltételt, vagyis az α_j együtthatók összege *1* lesz.

A gyakorlati számításokban természetesen nem szükséges a megoszlási viszonyszámok kialakításánál valamennyi időintervallum-különbözetre vonatkozó szórás reciprok értékét figyelembe venni, hanem csak azokat, amelyek érdemlegesen befolyásolják a numerikus számítások eredményeit. A tapasztalati adatokból végzett számítások szerint ugyanis nem az α_j értékek számossága, hanem az $\frac{F(t-j)}{F(t-j-1)}$ viszonyszámok közötti kapcsolat szorossága a meghatározó. Abban az esetben ti., ha az egyes α_j értékek rendkívül kicsik, elhanyagolható tagokat eredményeznek az egyenlőségben. Azt, hogy az elemzés vagy a becslés során mekkora pontosság indokolt, esetenként kell eldöntenie a feladatot végző szakértőnek. Általában igaz az, hogy előrebecslés esetén sokszor a rendkívüli finomságra való törekvés sem hozza meg azt az eredményjavító többletet, amely arányban állna a számítási műveletek időigényének növekedésével. Ilyen esetekben a gazdaságpolitikai dötések (szervezeti-szerkezeti- és árváltozások) valamint a véletlenek (konjunktúra, időjárás) gyakran erőteljesebben befolyásolják a folyamatok nagyságát, mint az egyes idősorokból kialakított tényezők α_j együtthatóinak zérushoz közelítő értékei.

Az idősorok komponensei additív vagy multiplikatív módon tevődnek össze. Esetünkben a sorok adatairól feltételezzük — amit a gazdasági folyamatok vizsgálatának tapasztalatai is alátámasztanak, — hogy az összetevők szorzótényezőkből állnak. Ezt fejezzük ki az (1) és a (2) egyenlőségekben is. A felírt (2) összefüggés tartalmilag jellemzi az adott idősor alapirányzatát (trend) és — az év meghatározott egyenlő hosszúságú részidőtartamairól lévén szó, — periódikus (szezonjellegű) ingadozását, valamint a véletlen szerepét. A (2) összefüggés a véletlen hatások figyelmen kívül hagyásával (ex-post értelemben) hasonlóság, amit csak a $v(t)$ tényezővel alakíthatunk át egyenlőséggé.

Az egyenlőségektől elvárjuk, fejezzék ki az idősor valamennyi összetevőjét. Ezzel kiterjesztjük elemzésünket, keresve azt a megoldást az $\dfrac{F(t)}{F(t-j)}$ viszonyszámok között fennálló lehetséges összes kapcsolatból, amely a legkisebb $v(t)$ véletlen komponenst adja. (Vagyis $v(t) \cong 1$.) Ezt az egyenlőséget a következőképpen fogalmazzuk meg:

$$F(t) = \left[F(t-m)\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot \frac{F(t-j)}{F(t-j-m)}\right] v(t), \tag{3}$$

ahol m = az idősorban szereplő tag t-től választott távolsága ($m = 1, 2, \ldots$ és $m < n$).

Az elemzett forgalmi folyamatok idősorai között fennálló szoros kapcsolat jó kiindulási pontot képezhet az előrebecslésekhez. Ebben az esetben is általában elfogadható eredményt ad a felírt (3) egyenlőség, ahol a véletlen várható értékét 1-nek tekintjük ($M[v(t)] = 1$). Más a helyzet azonban akkor, ha előreláthatólag nagyobb hatósági árváltozásra, vállalati átszervezésre vagy külföldi konjunkturális ingadozásra lehet számítani. Ebben az esetben érthetően nem jellemezhetik függvényszerűen a múltbeli folyamatok a jövő alakulását. Ezért a becslés pontosságának növelése érdekében — pl. árváltozás esetén — egy $Ip(t)$ index-szel megszorozzuk a (3) egyenlőség jobb oldalát. Valójában tehát $Ip(t)$ lép a $v(t)$ tényező helyébe. A jövő megítélésénél is lehet szerepe azonban $v(t)$-nek, ha pl. a konjunktúra ingadozását megközelítően számszerűsíteni tudjuk, ha a várható hatásokra elfogadható pontosságú, megbízható információkkal rendelkezünk. Ekkor a véletlen hibát tudatosan helyettesítjük be, s „kvázi-tényleges" eltérésnek tekintjük. A véletlen várható értéke ilyenkor nem egyenlő 1-gyel.

Az elmondottakkal — úgy véljük — kellően bemutattuk a közgazdasági folyamatok általunk felvetett elemzési lehetőségeit, egyben utaltunk arra is, hogy a jövő becslése nem egyszerűen az idősor előretolása, extrapolálása, hanem elmélyült közgazdasági munka, szakértői mérlegelés eredménye.

2. A probléma matematikai kifejtése és megoldása

Feladatunknak azt tekintjük, hogy az 1. pontban felírt és közgazdasági oldalról megfogalmazott (3) egyenletet általánosan megoldjuk. Ezt követően vizsgálat tárgyává tesszük $F(t)$ végtelenben való viselkedését, stabilitását.

a) *A feladat általános megoldása*

Tekintsük a (3) sz. egyenlőséget az alábbi $n+m$-ed rendű nemlineáris differencia-egyenletnek:

$$F(t) = F(t-m) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \frac{F(t-j)}{F(t-j-m)} \qquad 0 \leq \alpha_j \leq 1; \; \alpha_n \neq 0 \tag{3}$$

$$m, n \text{ pozitív egészek}, \; t = 0, 1, 2, \ldots .$$

Kikötjük, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 \tag{4}$$

teljesüljön. Ez azt jelenti, hogy a vizsgált folyamat t-re vonatkozó láncviszonyszámát, az azt megelőző n időszak láncviszonyszámainak az adott α_j-kel való súlyozott átlagaként állítjuk elő. Az α_j együtthatók a valóságban időfüggők. E dolgozat matematikai részében azt az idealizált esetet tárgyaljuk, amikor az α_j együtthatók az időtől független állandók. Az így kapott eredmények önmagukban is érdekesek lehetnek, emellett jól közelíthetik a valóságos folyamatot, ha az α_j értékek a középértékeik körül kismértékben ingadoznak. Lásd [2]. Abban az esetben, ha (4) teljesül, a $v(t)$ véletlen tényező értéke *1*. Ezért a továbbiakban eltekintünk szerepétől.

Ha (3) mindkét oldalát $F(t-m)$-mel elosztjuk, és bevezetjük az $X(t)$ függvényt az

$$X(t) = \frac{F(t)}{F(t-m)} \tag{5}$$

definícióval, akkor (3) helyett az alábbi állandó együtthatós, lineáris, homogén, n-ed rendű egyenletet nyerjük.

$$X(t) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X(t-j) = 0. \tag{6}$$

Amennyiben (6)-ból az $X(t)$ függvényt meghatároztuk, úgy $F(t)$ kiszámítására, (5) alapján az

$$F(t) = X(t)\, F(t-m) \tag{7}$$

egyenlet szolgál. Mivel nyilvánvalóan $X(t) > 0$, (7) mindkét oldalának logaritmusát véve és az $Y(t) = \log F(t)$ függvényt bevezetve (7) helyett az alábbi egyszerűbb állandó együtthatós, lineáris inhomogén m-ed rendű egyenletre jutunk:

$$Y(t) - Y(t-m) = \log X(t). \tag{8}$$

Az eredeti feladatot tehát két lineáris állandó együtthatós egyenletre vezettük vissza, amelyeket operátorszámítással fogunk megoldani. (Lásd [3].) Oldjuk meg a (6) egyenletet.

Vezessük be az $X(t)$ függvény diszkrét operátorát

$$\{X(t)\} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{X(\varkappa)}{(1+q)^{\varkappa}}, \tag{9}$$

ahol a konvergencia operátoros értelemben veendő, és triviálisan teljesül bármely $X(t)$ függvényre; q az ún. differenciaoperátor és $\frac{1}{1+q}$ az eltolási operátor. Amennyiben (6)-ot operátoros alakban írjuk fel, akkor adódik, hogy

$$X - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left[\frac{1}{(1+q)^j} X + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{X(i-j)}{(1+q)^i} \right] = 0. \tag{10}$$

Ezt X-re megoldva

$$X = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=0}^{j-1} X(i-j)(1+q)^{n-i}}{(1+q)^n - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (1+q)^{n-j}}. \tag{11}$$

Ezzel előttünk áll X operátora, mint a q differencia-operátor függvénye. A (11) természetesen tartalmazza az $X(-\nu)$ ($\nu = 1, 2, \ldots n$) kezdeti értékeket. Ezek azonban már meghatározottak, ha előírjuk a (3)-hoz tartozó $F(-\varrho)$ ($\varrho = 1, 2, \ldots, n+m$) kezdeti értékeket, mivel

$$X(-\nu) = \frac{F(-\nu)}{F(-\nu-m)} \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{12}$$

Ha (11)-et parciális törtekre bontjuk, könnyen felírhatjuk X-et mint a t-idő függvényét is. A (11)-hez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\xi^n - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi^{n-j} = 0. \tag{13}$$

Mivel $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$, $\xi' = 1$ gyöke (13)-nak, következésképp (13) a

$$(\xi - 1)[\xi^{n-1} + (1-\alpha_1)\xi^{n-2} + (1-\alpha_1-\alpha_2)\xi^{n-3} + \ldots + \\ + (1-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_{n-1})] = 0 \tag{14}$$

alakban is átírható, és látjuk, hogy $\xi' = 1$ egyszeres gyök. A (14) többi különböző gyökeit ξ_k-val, multiplicitásaikat σ_k-val jelölve ($k = 1, 2, \ldots M$; $M \leq n-1$), felírhatjuk a (11) parciális törtekre bontott alakját az

$$X = \gamma \frac{(1+q)}{q+1-\xi'} + (1+q) \sum_{k=1}^{M} \sum_{p=1}^{\sigma_k} \frac{\gamma_{kp}}{(q+1-\xi_k)^p} \tag{15}$$

formában, ahol a γ, γ_{kp} együtthatók ismert elemi módszerekkel határozhatók meg. Az operátorok elméletének elemeiből ismeretes, hogy

$$\frac{1+q}{(q+1-\xi)^p} = \left\{\xi^{t-p+1}\binom{t}{p-1}\right\}.$$

(Lásd [3].)

Ennek alapján (15)-re kapjuk, hogy

$$(16)\qquad X(t) = \gamma\xi'^t + \sum_{k=1}^{M}\sum_{p=1}^{\sigma_k}\gamma_{kp}\,\xi_k^{t-p+1}\binom{t}{p-1},$$

amely egyszeres gyökök esetén átmegy az alábbi formulába:

$$X(t) = \gamma\xi'^t + \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k\,\xi_k^t.$$

Látni fogjuk, hogy egy fontos speciális esetben a folyamat stabilitását a γ értéke dönti el. A (11) parciális törtekre bontásából a γ-ra az alábbi — a ξ_k karakterisztikus gyököktől független — egyszerű formulát nyerjük:

$$(17)\qquad \gamma = \frac{\sum_{j=1}^{n} X(-j)\left(1-\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k\right)}{n-\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\,\alpha_j}.$$

Vegyük észre, hogy $\gamma > 0$. Ezzel a (6)-ot megoldottuk. Térjünk rá (7), (8) megoldására. Felírva (8)-at

$$Y(t) - Y(t-m) = \log X(t).$$

Vezessük be az $Y(t)$ függvény diszkrét operátorát

$$(18)\qquad \{Y(t)\} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{Y(\varkappa)}{(1+q)^{\varkappa}}.$$

Amennyiben (8)-at operátoros alakban írjuk fel, akkor adódik, hogy

$$(19)\qquad Y - \frac{1}{(1+q)^m}Y - \sum_{i=0}^{m-1}\frac{Y(i-m)}{(1+q)^i} = \log X,$$

amit Y-ra megoldva

$$(20)\qquad Y = \frac{(1+q)^m}{(1+q)^m-1}\log X + \frac{\sum_{i=0}^{m-1}Y(i-m)(1+q)^{m-i}}{(1+q)^m-1}.$$

A (20) természetesen tartalmazza az előírt $Y(-\nu) = \log F(-\nu)$; $(\nu = 1, 2, \ldots m)$ kezdeti értékeket, így előttünk áll Y operátora, mint a q differenciaoperátor függvénye. Szeretnénk azonban az Y függvényt is, mint a t idő függvényét meghatározni. Ehhez az alábbi módon jutunk el. Vegyünk figyelembe, hogy

$$(21)\qquad \frac{(1+q)^m}{(1+q)^m-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{(1+q)^m}} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{1}{(1+q)^{\varkappa m}} = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\delta_{m\varkappa}(t)$$

érvényes az operátoros konvergencia értelmében, ahol $\delta_{m\varkappa}$ a jól ismert Kronecker szimbólumot jelöli. Így a (21) függvényre bevezetve az $\{f_m(t)\}$ jelölést, annak komponenseire fennáll, hogy

$$f_m(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t = \varkappa m, \quad \varkappa = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{különben.} \end{cases} \tag{22}$$

Figyelembe véve (20)-at, (21)-et és (22)-t, az $\frac{1}{(1+q)^i}$ operátor eltolási tulajdonságát, továbbá azt, hogy az operátortestben a függvények szorzását az ún. Cauchy-szorzás jelenti (amelyet $*$-gal jelölünk), kapjuk, hogy

$$Y(t) = \log X(t) * f_m(t) + \sum_{i=0}^{m-1} Y(i-m) f_m(t-i), \tag{23}$$

ahol

$$f_m(t-i) = 0, \quad \text{ha } t < i. \tag{24}$$

Ezzel meghatároztuk az $Y(t)$ függvényt, amellyel most már a végső megoldást jelentő $F(t)$ függvény is adódik közvetlenül. Mivel $Y(t) = \log F(t)$, tehát

$$F(t) = \exp\left[\log X(t) * f_m(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \log F(i-m) f_m(t-i)\right]. \tag{25}$$

Ily módon a (3)-at megoldottuk.

Most egyszerűbb alakra hozzuk a (25) formulát a benne szereplő „exp” és „log” jelek eltüntetésével. (25)-ben a t időt felírjuk az alábbi módon

$$t = [t]\, m + T; \quad 0 \leq T < m; \quad [t] = 0, 1, 2, \ldots.$$

Így kapjuk, hogy

$$\log X(t) * f_m(t) = \sum_{k=0}^{t} \log X(t-k) f_m(k) = \sum_{k} \log X(t-k) =$$
$$= \sum_{j=0}^{[t]} \log X(t-mj) = \sum_{j=0}^{[t]} \log X\left[([t]-j)m + T\right] = \sum_{i=0}^{[t]} \log X(mi+T)$$
$$k = 0, m, 2m, \ldots, [t]\, m.$$

Ebből lesz, hogy

$$\exp[\log X(t) * f_m(t)] = \exp\left[\sum_{i=0}^{[t]} \log X(mi+T)\right] = \prod_{i=0}^{[t]} X(mi+T). \tag{26}$$

Másrészt pedig

$$\exp\left[\sum_{i=0}^{m-1} \log F(i-m) f_m(t-i)\right] = \prod_{i=0}^{m-1} \exp[\log F(i-m) f_m(t-i)] =$$
$$= \prod_{i=0}^{m-1} g_{i,m}(t), \tag{27}$$

ahol könnyen belátható, hogy

$$(28)\qquad g_{i,m}(t)=\begin{cases}F(i-m), & \text{ha } t=i+Nm;\ N=0,1,2,\dots,\\ 1, & \text{különben.}\end{cases}$$

A (25)-ből, (26)-ból, (27)-ből és (28)-ból kapjuk, hogy

$$(29)\qquad F(t)=\prod_{i=0}^{m-1} g_{i,m}(t)\prod_{j=0}^{[t]} X(mj+T).$$

A fontos $m=1$ speciális esetre pedig – mivel ekkor $T=0$ és $[t]=t$, adódik, hogy

$$(30)\qquad F(t)=F(-1)\prod_{j=0}^{t} X(j).$$

Megjegyzés. Az olvasó számára nem okozhat zavart a (13) karakterisztikus egyenlet esetleges konjugált komplex gyökeinek fellépése. Az egyszerűség kedvéért az egyszeres gyökök esetére szorítkozva, ha ξ_k és $\xi_{k+1}=\bar{\xi}_k$ jelöl egy konjugált komplex gyökpárt és

$$\xi_k=|\xi_k|\,e^{i\varphi_k},\ \xi_{k+1}=|\xi_k|\,e^{-i\varphi_k},\ \gamma_{k+1}=\bar{\gamma}_k,$$

akkor azt kapjuk, hogy a (16)-ban

$$(31)\qquad \begin{aligned}\gamma_k\xi_k^t+\gamma_{k+1}\xi_{k+1}^t&=\gamma_k\xi_k^t+\bar{\gamma}_k\bar{\xi}_k^t=\gamma_k|\xi_k|^t e^{i\varphi_k t}+\bar{\gamma}_k|\xi_k|^t e^{-i\varphi_k t}=\\&=2Re[\gamma_k|\xi_k|^t e^{i\varphi_k t}]=2(Re\,\gamma_k)|\xi_k|^t\cos\varphi_k t-2(Im\,\gamma_k)|\xi_k|^t\sin\varphi_k t.\end{aligned}$$

Ebből látható, hogy a (26) valós (pozitív) kifejezést állít elő. Épp a konjugált komplex gyökpárok fellépése esetén szerepelnek trigonometrikus függvények a megoldásban.

b) *A megoldások végtelenben való viselkedése, stabilitás*

Vizsgáljuk meg ezek után a (29) végtelenben való viselkedését abban az esetben, amikor a (3)-ban egyetlen α_j együttható sem tűnik el. Az irodalomból ismeretes, hogy a (14) együtthatóinak szigorúan monoton csökkenése miatt annak valamennyi gyöke az egységkör belsejébe esik, kivéve a $\xi'=1$ gyököt. (Lásd pl. [4].) A (16)-ból és a (29)-ből kapjuk, hogy

$$(32)\qquad \begin{aligned}F(t)&=\prod_{i=0}^{m-1} g_{i,m}(t)\prod_{\nu=0}^{[t]}\left[\gamma+\sum_{k=1}^{M}\sum_{p=1}^{\sigma_k}\gamma_{k,p}\,\xi_k^{m\nu+T-p+1}\binom{t}{p-1}\right]=\\&=\prod_{i=0}^{m-1} g_{i,m}(t)\prod_{\nu=0}^{[t]}\gamma\left[1+\sum_{k=1}^{M}\sum_{p=1}^{\sigma_k}\zeta_{k,p}\,\xi_k^{m\nu+T-p+1}\binom{t}{p-1}\right]=\\&=\prod_{i=0}^{m-1} g_{i,m}(t)\,\gamma^{[t]+1}\prod_{\nu=0}^{[t]}\left[1+\sum_{k=1}^{M}\sum_{p=1}^{\sigma_k}\zeta_{k,p}\,\xi_k^{m\nu+T-p+1}\binom{t}{p-1}\right],\end{aligned}$$

ahol

$$\zeta_{k,p}=\frac{\gamma_{k,p}}{\gamma}.$$

Ha $t \to \infty$, akkor a (32) végtelenben való viselkedését a $\gamma^{[t]}$ dönti el, hiszen $\prod_{i=0}^{m} g_{i,m}(t)$ periódikus, a

$$\prod_{\nu=0}^{\infty}\left[1+\sum_{k=1}^{M}\sum_{p=1}^{\sigma_k}\zeta_{k,p}\,\xi_k^{m\nu+T-p+1}\binom{t}{p-1}\right]$$

végtelen szorzat pedig abszolút konvergens minden egyes T-re a $|\xi_k|<1$ miatt, mivel

$$\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{M}\sum_{p=1}^{\sigma_k}\zeta_{k,p}\,\xi_k^{m\nu+T-p+1}\binom{t}{p-1}\right|\le\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{M}\sum_{p=1}^{\sigma_k}\binom{t}{p-1}|\zeta_{k,p}|\,|\xi_k|^{m\nu-p}<\infty.$$

Ebből következik, hogy

$$\prod_{\nu=0}^{[t]}\left[1+\sum_{k=1}^{M}\sum_{p=1}^{\sigma_k}\zeta_{k,p}\,\xi_k^{m\nu+T-p+1}\binom{t}{p-1}\right].$$

korlátos $0\le t<\infty$-ben.

Látjuk tehát, hogy ha $\gamma<1$, akkor az $F(t)\to 0$, ha $\gamma>1$, akkor az $F(t)\to\infty$. A $\gamma=1$ határhelyzetben az $F(t)$ korlátos (nem feltétlen tart egy véges pozitív határértékhez).

Foglalkozzunk most a megoldások stabilitásának kérdésével. Az $F(t)$ megoldást akkor nevezzük stabilisnak, ha az $F(-i)$, $(i=1,2,\ldots,m+n)$ kezdeti értékek kicsiny változásához az $F(t)$ kicsiny változása tartozik a t változó $[0,\infty]$ tartományában, Pontosabban megfogalmazva: tekintsük az $F(-i)$ (pozitív) kezdeti értékek azon halmazát, amelyre a $\gamma<1$ teljesül. Legyenek továbbá $\varepsilon>0$, $\eta_i>0$ tetszőlegesen kicsinyek. Akkor a fenti halmazba eső tetszőleges $F^*(-i)$; $(i=1,2,\ldots,m+n)$ kezdeti értékkészlethez és a hozzátartozó $F^*(t)$ megoldáshoz létezik egy a fenti halmazba eső $F^{**}(-i)$ kezdeti értékkészlet és a hozzátartozó $F^{**}(t)$ megoldás úgy, hogy

$$|F^*(t)-F^{**}(t)|<\varepsilon,\qquad \text{ha}\quad 0\le t<\infty$$

hacsak

$$|F^*(-i)-F^{**}(-i)|<\eta_i,\qquad i=1,2,\ldots,m+n.$$

Egyszerűen kimutatható, hogy az $F(t)$ megoldás (az általunk vizsgált esetekben) éppen akkor stabilis, ha $\gamma<1$. Látható, hogy ha $\gamma\ge1$, akkor a megoldás instabilis, hiszen a kezdeti értékek tetszőlegesen kicsiny változása az $F(t)$ megoldás tetszőlegesen nagy változását is maga után vonhatja. A stabilitás feltétele tehát az, hogy $\gamma<1$ teljesüljön. Ekkor azt mondjuk, hogy a (3) egyenlet is stabil a kezdeti értékeknek abban a tartományában, amelyben $\gamma<1$. Ezt *feltételes stabilitásnak* nevezik az irodalomban, amely a nemlineáris egyenletek egyik jellemző tulajdonsága.

Fennáll tehát az alábbi stabilitási tétel.

Tétel. Tekintsük a (3)-mal és a (4)-gyel megadott nemlineáris differenciaegyenletet. Amennyiben az α_j együtthatók egyike sem nulla, akkor a pozitív kezdeti értékeket kielégítő megoldások stabilitását a

$$\gamma=\frac{\sum_{j=1}^{n}X(-j)\left(1-\sum_{k=1}^{j-1}\alpha_k\right)}{n-\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\,\alpha_j}$$

kritérium dönti el. A stabilitás feltétele: $\gamma < 1$. Ekkor a megoldások a végtelenben eltűnnek. $\gamma = 1$-re a megoldások korlátosak, míg $\gamma > 1$-re a végtelenhez tartanak.

Megjegyzés. A γ kritériumból egyszerűen következik, hogy a rendszer éppen akkor stabil, ha az $X(-j) = \dfrac{F(-j)}{F(-j-m)}$ kezdeti értékek elegendő kicsinyek. Ha az összes $X(-j)$ értékek egyenlőek, $X(-j) = X_0$ minden j-re, akkor a fenti kritériumból adódik, hogy

$$\gamma = X_0$$

és akkor a stabilitás feltétele ekvivalens az $X_0 < 1$ feltétellel.

Látható, hogy $\gamma > 1$*-re egy növekedési modellt kapunk, mivel minden megoldás a végtelenhez tart.* Közgazdaságilag általában ennek a feltételnek kell teljesülnie. A $\gamma = 1$ esetben a megoldások korlátosak. Ennek a határesetnek azonban közgazdaságilag kevés a realitása, mert a kezdeti értékek, vagy akár az α_j együtthatók *tetszőlegesen* kicsiny változásai végtelenhez tartó megoldásokat eredményezhetnek.

Befejezésül szeretnénk újból utalni arra, hogy a stabilitási kritérium arra az esetre vonatkozik, ha az α_j együtthatók egyike sem tűnik el. Amennyiben ilyenek lennének, így a (14) karakterisztikus egyenlet gyökeire már nem áll, hogy azok mind az egységkör belsejébe esnek, ami a stabilitási viszonyok megváltozását vonja maga után. Az $m = 1$ esetre vonatkozóan láttuk [2]-ben, hogy ha $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$, akkor a megoldások végtelenben való viselkedését és a stabilitást az $\dfrac{F(-1)}{F(-n-1)}$ arány dönti el, ellentétben az ebben a dolgozatban a kritériumból fenti együtthatók nulla volta esetén adódó

$$\gamma = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{F(-i)}{F(-i-1)}}{n}$$

mennyiséggel.

A stabilitási viszonyok tárgyalása eltűnő α_j együtthatók esetén egy esetleges későbbi dolgozat tárgyát képezhetné. Tervbe vettük továbbá, hogy a konstans α_j együtthatókat további vizsgálataink során periódikus $\alpha_j(t)$ függvényekkel helyettesítjük, így a valóságot jobban közelítő olyan modellt lehetne kidolgozni, amelynek matematikai diszkussziójában a korszerű operátoros módszerek igen jól alkalmazhatóak.

3. A módszer gyakorlati alkalmazása

A forgalmi folyamatok kategóriái közül sokféle lehetőség adódik az elemzésre kerülő minta kiválasztására. Ez vonatkozik mind az idősorok tartalmára, mind pedig a népgazdaság mikro, -mezo, -vagy makro szintjére. Tárgyunk szempontjából egy olyan gazdasági aggregátum nettó árbevételének elemzését végeztük el, amely terjedelmében és az idősor alakulása tekintetében meglehetősen jól jellemzi a magyar gazdaságot: ez a gépipari ágazat nettó árbevétele. Kiválasztásánál egyik fő szempont az volt, hogy ez a legjelentősebb magyar iparág mind volumenben, mind pedig fejlődési ütemében egyaránt.

Amellett, hogy hosszabb időszakot tekintve a gépipar egyike a legdinamikusabban fejlődő ágazatoknak, meglehetősen jól mutatkozik meg az árbevétel adataiban a szezonszerűség is. A nettó árbevétel folyóáron számított adataiban az árváltozások 1975 év kivételével átlagos színvonalon alakulnak, és így nem zavarják különösebben az időbeli összehasonlítást.

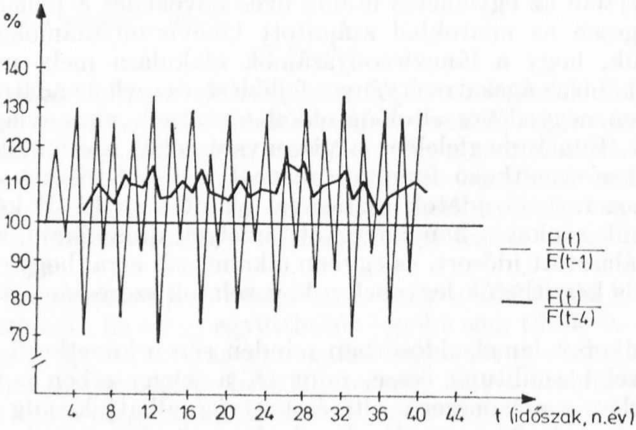
Az adatok 1968. január 1-től 1977. december 31-ig állnak rendelkezésre. A 10 éves adatsor negyedéves ütemezésben mutatja be az ágazat fejlődését, amelyre nagyjából az egyenletes ütemű éves növekedés a jellemző. Az elemzésre elsődlegesen az adatokból számított láncviszonyszámokat használtuk fel. Megnéztük, hogy a láncviszonyszámok alakulása mely negyedévekben jellemzi leginkább az ágazatra érvényes fejlődést, és ezek az adatok ill. viszonyszámok milyen negyedéves eltolódásokkal mutatnak viszonylag állandó fejlődési ütemet. Ennek megfelelően a viszonyszámokat a számlálóban szereplő t-edik időszakra vonatkozó forgalmi adatnak a $t-1$-től a $t-20$-ig terjedő időeltolódáshoz tartozó adatok osztásával alakítottuk ki. E két szélső adat között kerestük azokat a hányadosokat, amelyek dinamikájukban leginkább jellemzik a választott idősort, és egyben alkalmasak arra, hogy segítségükkel előrejelzések is készíthetők legyenek a kapcsolatok szorosságának figyelembevételével.

Akkor, amikor valamely idősorban minden soron következő adatot a közvetlen előzővel hasonlítunk össze, mint pl. a jelen esetben a negyedéveket, akkor elsősorban a szezonszerű eltéréseket vizsgálhatjuk, míg a $t-4$ időeltolással egy év, a $t-20$ negyedévek adatával történő összehasonlítás öt év távlatában jellemzi az időbeli változást, az ágazat fejlődését. A két szélső határon belül természetesen számos lehetőség adódik az idősorokban rejlő törvényszerűségek feltárására, amelyek között különösen nevezetesnek találtuk azt az összefüggést, amikor valamely t-edik időszakra vonatkozó adatot 4 negyedévvel vagy annak többszörösével eltolt adattal hasonlítjuk össze.

A számítások végeredményben arra a következtetésre vezettek, hogy — a lényegében az egész magyar ipart, sőt népgazdaságot jellemző ágazat adataiban — jól látható a termelés ill. a kibocsátás szakaszossága, a negyedéves periodicitás. Ugyanakkor éppen a negyedévekben rejlő szezonszerűség eredményezi azt, hogy az előző évvel, ill. az előző évek azonos negyedéveivel történő összehasonlítás meglehetősen kiegyenlített képet, évről-évre hasonló növekedési ütemet mutat. A vizsgált időtartam alatt a kritériumnak azt a feltételét elégíti ki a folyamat változási iránya tehát, amely megfelel a $\gamma > 1$ összefüggésnek, vagyis a szocialista termelési módra jellemző fejlődő gazdaságnak. A jelenséget az alábbi 1. ábrán mutatjuk be az $\dfrac{F(t)}{F(t-1)}$ és az $\dfrac{F(t)}{F(t-4)}$ adatokból képzett visonyszámokkal.

Az év azonos negyedéveinek összehasonlításából egyértelműen következik a szoros meghatározottság és a viszonylag hosszabb távon (10 év) érvényesülő törvényszerűség. Ezért elemzéseink középpontjába azt a kérdést állítottuk, milyen időeltolódással képzett viszonyszámok között található többé kevésbé szoros kapcsolat. Ezt a feladatot ezúttal a szóródásszámítás segítségével végeztük el, hiszen itt egynemű, azonos tartalmú adatok idősoráról van szó. Esetünkben az autokorreláció kap kitüntetett szerepet, s nem valamely más jellemzővel, kategóriával való kapcsolat szorossága. Feltételeztük, hogy az egyes időeltolódásokkal képzett viszonyszámok idősorában akkor a legnagyobb az autokorreláció foka, ha minél kisebb a szóródás nagysága.

A 10 év 40 negyedévre vonatkozó adat felhasználásával érdekes, de az idősorok tulajdonságai figyelembevételével egyáltalán nem meglepő eredményre jutottunk. Számításaink szerint a szóródás nagysága legkisebb a 4 negyedév ill. annak többszöröseivel eltolt viszonyszámok között, majd ezt követi a 2 negyedévvel eltolt dinamikus viszonyszámok sora. Ebből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a gépipari ágazatban, de joggal állíthatjuk, hogy az

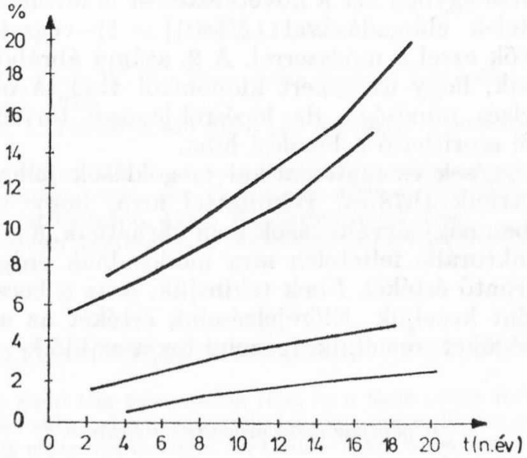


1. ábra A gépipar nettó árbevételének szezonszerű ingadozásai

egész magyar iparban, az éves és a féléves periodicitások nagyjában-egészében ismétlődnek és viszonylag kiegyenlített képet mutatnak. Ugyanakkor az egynegyedévvel és a háromnegyedévvel eltolt adatokból képzett hasonló viszonyszámok szóródása az előbbi kettőnél jóval nagyobb. Emellett jellemző a gépipar viszonyszámaira az is, hogy az éves és a féléves periodicitások szórásnégyzetei logaritmikus (vagyis csökkenő növekedést mutató) függvénnyel, míg az 1/4 és a 3/4 évvel eltolt viszonyszámok szóródása exponenciálisan növekvő görbével ábrázolhatók. (L. 2. ábrát.)

Ebből a feltételből következik az is, hogy előrebecslések esetén elsősorban azok az időeltolódással számított értékek használhatók leginkább, amelyek éves periodicitáson alapulnak. Ezt egyébként az ex-post becslések is alátámasztották. Az elemzések és az előrebecslések kiinduló képlete a cikkben közölt (3) egyenlőség. Ebben az összefüggésben ismertnek tételezhetők fel a múltra vonatkozó forgalmi adatok. A feladat ezért az α_j együtthatók értékének kiszámítása. A 2. számú ábra magától kínálja azt a megoldást, hogy az elemzéseknél ill. a becsléseknél szereplő α_j együtthatók olyan súlyozást tegyenek lehetővé, ahol azok az összefüggések kapnak meghatározó szerepet, amelyek szoros autokorrelációt mutatnak; vagyis azok, ahol a dinamikus viszonyszámok viszonylag legkisebb szóródása tapasztalható. Ezért tehát az α_j-k nagyságának megállapításánál azt választottuk, hogy értékük legyen az egyes viszonyszámsorok szórásnégyzetének reciprok értékéből adódó megoszlási viszonyszám. Ebben az esetben ugyanis mindenkor biztosítható az a követelmény, hogy az α_j együtthatók összege *1*, és ugyanakkor a legkisebb szórást mutató viszonyszám-sorhoz kapcsolódik a legnagyobb súlyt szolgáltató α_j érték.

A gyakorlati számítások[1] arra az eredményre vezettek, hogy hosszabb idősor ismeretében az elemzés vagy a becslés minőségét nem a felhasznált viszonyszámok számossága, hanem a bennük rejlő kapcsolat szorossága határozza meg. Ebből az adottságból, de a számítások egyszerűsítése érdekében is felvetődik az a gondolat, hogy nem szükséges valamennyi lehetséges α_j alkalmazása, hanem azok tudatos kiválasztásával, szelektálásával kell felírni a



2. ábra A szórásnégyzetek alakulása (m = 1, 2, 3, 4 esetén)

megadott (3) számú egyenlőséget. Ez annál inkább indokolt, mert a láncviszonyszámok tulajdonságaiban rejlő autokorreláció miatt az α_j-k számának bővítése nem javítaná az eredményt, hanem éppen ellenkezőleg eltéríti azt a törvényszerűen mutatkozó fejlődés vonalától, és ily módon megbízhatatlanná válhatnak a becslések. Így pl. a 4 negyedéves eltolással az 1977. IV. n. évére készített ex-post becsléseink szerint, amikor az α_j-k közül a legszorosabb kapcsolatot mutató 4 negyedévvel eltolt éves periodicitást vettük figyelembe ($j = 1, 2, \ldots 5$), az eltérés csupán 0,5%. Ha az éves periodicitást a viszonylag legkisebb szórást mutató féléves periodicitás 2 adatával kiegészítjük, a számítás 0,8%-kal különbözik a tényszámtól. Amikor az α_j-k számát 10-re növeltük, vagyis az éves és a féléves periodicitást is teljesen számításba vettük, akkor a becslési hiba 1,2%. Ezek a számok egyértelműen arra hívják fel a figyelmet, hogy ha az α_j-k száma eltér az optimálisan szükségestől, akkor már nem javítható az előrejelzések minősége.

A fenti 2. ábra egyben azt is jelzi, hogy az α_j-k elmondottak szerinti meghatározása a legutolsó év azonos negyedévéhez viszonyított fejlődési mutatójának ad előnyt, s ettől távolodva mind kisebb lesz az együtthatók nagysága. Ily módon az időben közelebb álló adatok erősebben determinálják a becslés eredményét, mert nagyobb súlyt kapnak a mérlegelésnél. A gépipari ágazat példájában a 4 negyedéves időeltoláshoz tartozó szórásnégyzetek reciprok

[1] A számításokat *Fehér* Kálmán matematikus, a MNB főelőadója végezte a Bank Honeywell 66/20 elektronikus gépén. Munkájáért ezúton mondunk köszönetet.

értékeiből számított megoszlási viszonyszámok, vagyis az α_j értékek a következők: $\alpha_1 = 0{,}4848$; $\alpha_2 = 0{,}1994$;; $\alpha_3 = 0{,}1258$; $\alpha_4 = 0{,}0991$; $\alpha_5 = 0{,}0909$. Amíg tehát az egy évvel előbbi fejlődés csaknem 50%-ban meghatározó, a két évvel előbbi már csak 1/5-del, a 4 évvel megelőző 1/10-del. Úgy véljük, a változó és időben távolodva csökkenő súlyokra épülő számítási módszer hasznos eszköze lehet a gazdasági előrejelzéseknek.

Az éves periodicitás és a gépipari ágazatra, de általában a magyar iparra jellemző szezonalitás egyben azt a következtetést is levonatja velünk, hogy a változatlan feltételek elfogadásával ($M[v(t)] = 1$) végzett becslések több évre is elkészíthetők ezzel a módszerrel. A 2. számú ábrából tudniillik egyértelműen következik, hogy az ismert időponttól való távolság miatt romlik ugyan az előrejelzés minősége, de lépésről-lépésre történő helyettesítéssel szűk határok közé szorítható a becslési hiba.

A felírt összefüggések és matematikai megoldások felhasználásával előrejelzéseket készítettünk 1978-ra. Tekintettel arra, hogy 1978-ban 1977-hez képest különösebben nagy árváltozások nem várhatóak, a gépipari termékekre vonatkozó konjunkturális feltételek sem módosulnak érdemlegesen, ezért a véletlen hatás várható értékét *1*-nek tekintjük, azaz a becsléseket nem befolyásoló tényezőként kezeljük. Előrejelzéseink értékét az alábbi táblázatban közöljük. Helyességüket, reméljük, igazolni fogja az idő.[2]

A gépipar nettó árbevétele folyóáron

Mrd Ft

Időszak	1977		1978
	Tényszám	Ex-post becsült	Ex-ante becsült
I. n. év	42,6	42,2	45,9
II. n. év	54,7	53,8	60,6
III. n. év	48,4	48,5	53,5
IV. n. év	62,8	62,5	69,0

*

A vezetés állandó igénye, hogy operatív információkkal rendelkezzék a gazdasági folyamatokról. A korszerű gazdaságirányításnak nélkülözhetetlen eszköze az elmélyült elemzés, az összefüggések, törvényszerűségek feltárása és a jövőben várható értékek lehetőleg pontos előrebecslése. Ehhez kívántunk hozzájárulni a jelen cikk megírásával. Ha a javasolt eljárás — esetleg annak javított, továbbfejlesztett változata — beválik a gyakorlatban is, amit az ex-post becslési eredmények igazolni látszanak, akkor célszerű lehet hasonló módon végezni vizsgálatot az állapotidősorokra is, mint pl. a készletek állománya, a forgalomban levő pénz mennyisége. Az azonos kategóriák mozgását kifejező forgalmi folyamatok és pillanatnyi állapotát rögzítő állományadatok közötti híd a forgási sebesség mutatója. E mutatók időbeli alakulásának, vál-

[2] Az időközben ismertté vált tényadatok 1978. I.—III. nv. évi összege 158,9 mrd Ft (a becslés 160 mrd Ft), amelynek n. évenkénti megoszlása sorra: 44,8; 59,7; 54,4 mrd Ft.

tozásának eddigieknél mélyebb elemzése, előrebecslése nagyban hozzájárulhat a közgazdasági és üzemgazdasági folyamatok és jelenségek megismeréséhez, s ennek segítségével a vezetés és a végrehajtás munkája hatékonyságának növeléséhez.

(Beérkezett: 1978. június 18-án)

IRODALOM

1. BOX, G. E. P.—JENKINS, W. M.: *Time series analysis forecasting and control.* Holden Day. San Francisco, 1976.
2. FÉNYES, T.—SÁRI, J.: *Periódikusan változó közgazdasági folyamatok.* Szigma 1977/1—2. sz.
3. BUTZER, P. L.—SCHULTE, H.: *Ein Operatorenkalkül zur Lösung gewöhnlicher und partieller Differenzengleichungssysteme von Funktionen diskreter Veränderlicher und seine Anwendungen.* Köln und Opladen, 1965. Westdeutscher Verlag.
4. JURY, E. I.: *Theory and application of the transform method.* New York—London, 1964. John Wiley — Sons

ANALYSIS AND FORECAST OF TIME SERIES OF ECONOMIC PROCESSES

The authors start from the assumption that in a time series formed by chain index numbers the expected value of a process will be more strongly determined by those data which are in relatively closer connection. And this is there to be found where the dispersion is minimum among the chain index numbers computed from the original data with various time interval shifts. The value of coefficients can be determined from the reciprocal of variances, since it is right to give more weight to the index number which shows the smallest dispersion, i.e. where autoregression is the highest.

The general solution of the economically formulated problem is obtained by operator calculus when the asymptotical behaviour of the solution, the condition of stability is analyzed. At the same time it is determined, too, under which conditions a growth model will be valid. Practical computations made with this method support that e.g. in the chosen branch of engineering, in a chain index system formed from a quarterly time series for 10 years, the closest autoregression can be observed with a time-lag of t–4 (one year) and t–2 (half a year), respectively. Although the dispersions increase as we move away from the moment chosen, this results in a decreasing (logarithmic) rate of growth. Considerably higher dispersion can be experienced in chain indices with a time-lag of 1 and 3 quarters, respectively. Ex-post and ex-ante forecasts made are promising, since deviations remained within acceptable margin of error.

АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ТРЕНДОВ ВРЕМЕНИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Авторы исходят из той предпосылки, что в тренде времени, образованному из характеризующих развитие цепных индексов, предполалаемое значение какого-либо процесса в болшеймере определяют те, между которыми связь является относительно более тесной. Это налицо там, где наименьшим является рассматривание между числами цепного индекса, расчитанного с неодинаковой разницей различных интервалов времени первоначальных членов. Значение коэффициентов может устанавливаться на основании обратных значений квадратов рассеивания, так-как в ходе расчетов — обоснованно — больший вес должен приобретать тот индекс, который дает наименьшее рассеивание, т. е. в отношении которого авторегрессия наибольшая.

Общее решение этого экономически сформулированного задания происходит посредством операторных расчетов и при этом предметом изучения являются поведение получаемого результата в бесконечности, предпосылки стабильности. Вместе с тем определяет-

ся то, что при каких условиях будет снраведливой какая-либо модель роста. Практические расчеты, выполняемые с помощью этого метода подтверждают, что по выбранным отраслям машиностроения, например, в системе увязанных отсительных значений, образованных из квартальных трендов за десять лет наиболее тесная авторегрессия сказывается со сдвигом времени по t-4 (год) и t-2 (полугодие), когда при удалении от выделенного времени увеличивается величина рассеивания, однако это приводит к (логаритмическому) уменьшению роста. В то же бремя при сдвиге времени на один и три квартала в отношении относительных увязываемых значений рассеивание является значительно большим. Прогнозы, выполняемы на прошедшее время или же на будущее являются обнаруживающими, т. к. расхождения находятся в пределах приемлемых погрешностей.