Subicz Péter

Ökonometriai modell megoldása matematikai programozással

Bevezetés

Ismeretes, hogy a szocialista gazdaság irányítását, szabályozását elsősorban különböző időszakokat átölelő népgazdasági tervekkel végzik. Ebből is következik, hogy a népgazdasági szintű gazdasági számítások között a tervezés területén terjedtek el leginkább a korszerű módszerek, melyek a gazdaságmatematika legújabb eredményeit és a modern számítógépek nyújtotta számítástechnikai lehetőségeket egyaránt felhasználják. E korszerű módszerek elsősorban a távlati tervezésben és az ötéves tervezésben terjedtek el, és különösen az távlati tervezésről mondható el, hogy azok a tervezés rendszerébe beépültek, annak szerves részét képezik.

A modern módszerek alkalmazása az éves (rövidtávú) tervezésben azonban messze elmaradt a távlati és középtávú alkalmazásokhoz képest, amit csak részben indokolhat az a tény, hogy e tervek részletezettségüknél és „operativitásuknál" fogva nehezebben modellezhetők, illetve e modellek nehezebben kezelhetők. Ami az alkalmazott módszereket illeti, a tervezés területén a legnagyobb hagyományai az ágazati kapcsolatok elemzésének, a különböző népgazdasági mérlegek elemzésének és a különböző matematikai programozáson alapuló tervezési modelleknek voltak. Ez elsősorban abból következett, hogy e módszerek voltak leginkább alkalmasak arra, hogy a tervezés koordináló és erőforrás allokáló funkcióját elősegítsék.

Ezen a területen 1968 után érezhető változások következtek be. Amellett, hogy a népgazdasági tervezés e két funkciója továbbra is elsőrendű fontosságú maradt, a gazdaságirányítási rendszer megváltoztatása nagymértékben megnövelte a determinisztikus modelleken kívül a sztochasztikus és így az ökonometriai modellek szerepét is a tervezés területén, hiszen e modellek különösen alkalmasak a döntően sztochasztikus elemeket tartalmazó gazdasági folyamatok modellezésére.

A következőkben ismertetendő modell elsősorban azzal a céllal készült, hogy a rövidtávú és a középtávú tervek közötti összhang megteremtése mellett választ adjon az éves tervezés során felvetendő néhány fontos kérdésre. Azok a problémák, amelyeket a cikk megvizsgál bizonyos szempontból optimálási problémák. Megválaszolásukra az ökonometriai modellnek egy matematikai programozási eljáráson alapuló megoldási lehetőségét mutatja be.

Itt szeretném megjegyezni, hogy ökonometriai modellek optimálása az utóbbi időben egyre inkább előtérbe kerül. Ezzel kapcsolatban hivatkoznék pl. [1]-, [2]-, [4]-re.

A cikk második részében az ismertetett módszernek egy konkrét alkalmazását mutatjuk be a népgazdaság egy kisméretű ökonometriai modelljére.

1. A programozási modell származtatása ökonometriai modellből

Induljunk ki egy lineáris, dinamikus (késleltetett változókat is tartalmazó) szimultán egyenletekből álló ökonometriai modell strukturális alakjából:

$$Bx + \Gamma y = u, \tag{1}$$

ahol x az endogén változók, y a predeterminált változók vektora. B és Γ az endogén, illetve predeterminált változók paramétereiből alkotott mátrixok; u a reziduumok vektora.

Helyettesítsük $u = 0$-t, vagyis a reziduumok várható értékét (1)-be, így meghatározhatjuk a modell redukált formáját:

$$x = -B^{-1}\Gamma y, \tag{2}$$

Vizsgáljuk meg most kissé részletesebben a modell késleltetett időbeli kapcsolatait, dinamikus sajátosságait. Ennek érdekében célszerű lesz a hagyományos (1) és (2) jelölésrendszert az alábbiak szerint módosítani:

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{3}$$

és

$$S = [B; \Gamma]. \tag{4}$$

Ezeknek megfelelően az (1) alatti összefüggés új alakja:

$$Sz = 0. \tag{5}$$

Az S paramétermátrix és a z vektor a modell dinamikus sajátosságait, késleltetett kapcsolatait figyelembe véve az alábbi módon bontható fel:

$$\begin{aligned} Sz &= S_0 z_0 + S_{-1} z_{-1} + \ldots + S_{-n} z_{-n} + S_e z_e = \\ &= [S_0; S_{-1}; \ldots S_{-n}; S_e] \begin{bmatrix} z_0 \\ z_{-1} \\ \vdots \\ z_{-n} \\ z_e \end{bmatrix} = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

ahol z_0 a folyó endogén változók vektora, S_0 e változók paramétermátrixa, $z_{-1} \ldots z_{-n}$ a késleltetett endogén változók vektora, $S_{-1} \ldots S_{-n}$ az e változókhoz tartozó paramétermátrixok, z_e a folyó és késleltetett exogén változók vektora, míg S_e a hozzájuk tartozó megfelelő méretű paramétermátrix, n pedig a figyelembe vett maximális késleltetés.

Amennyiben S_0 nem szinguláris, a jelölésrendszerünknek megfelelően részletezett redukált forma az alábbiak szerint alakul:

$$z_0 = -S_0^{-1} [S_{-1}; \ldots S_{-n}; S_e] \begin{bmatrix} z_0 \\ z_{-1} \\ \vdots \\ z_{-n} \\ z_e \end{bmatrix}. \tag{7}$$

A (7) alatti redukált forma segítségével ezután lépésenként végezhető el szokásos módon az időszakonkénti előrejelzés, illetve határozhatók meg a modell endogén változóinak előrebecsült értékei az alábbiak szerint:

$$z_1 = -S_0^{-1}[S_{-1}; S_{-2}; \ldots S_{-n}; S_e]\begin{bmatrix} z_0 \\ z_{-1} \\ \vdots \\ z_{-n+1} \\ z_e \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\vdots$$

$$z_n = -S_0^{-1}[S_{-1}; S_{-2}; \ldots S_{-n}; S_e]\begin{bmatrix} z_{n-1} \\ z_{n-2} \\ \vdots \\ z_0 \\ z_e \end{bmatrix}. \tag{9}$$

A (8) és (9) összefüggésekből látható, hogy a redukált forma mátrixa az előrejelzés során változatlan marad. (Ez a megállapítás természetesen a 0-ik időpontban végzett n számú előrejelzésre érvényes. Az ökonometriai gyakorlatban a strukturális forma paramétermátrixát időről időre újra szokás becsülni és az előrejelzéseket az új paramétermátrixnak megfelelő redukált forma segítségével elvégezni).

A $z_0 \ldots z_n$ endogén változók meghatározása ilyen módon azonban csak akkor lehetséges, ha az S_0 mátrix invertálható, aminek viszont szükséges feltétele az, hogy a modell folyó endogén változóinak száma megegyezzék a modell egyenleteinek számával.

A következőkben nem tételezzük fel az endogén változók számának és a modellegyenletek számának egyezését és így S inverzének létezését sem. Vizsgáljuk meg, hogyan alakul a fenti összefüggésrendszer ebben az esetben:

$$\begin{aligned} S_0 z_0 &= -S_{-1}z_{-1} - S_{-2}z_{-2} - \ldots - S_{-n}z_{-n} - S_e z_e \\ S_0 z_1 &= -S_{-1}z_0 - S_{-2}z_{-1} - \ldots - S_{-n}z_{-n+1} - S_e z_e \\ &\;\;\vdots \\ S_0 z_n &= -S_{-1}z_{n-1} - S_{-2}z_{n-2} - \ldots - S_{-n}z_0 - S_e z_e\,, \end{aligned} \tag{10}$$

vagy számunkra célszerűbb felírással:

$$\begin{bmatrix} S_0 & & & \\ S_{-1}; S_0 & & & \\ S_{-2}; S_{-1}; S_0 & & & \\ \vdots & & & \\ S_{-n}; \ldots S_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{-1}; S_{-2}; \ldots S_n; S_e \\ S_{-2}; S_{-3}; \ldots O\,; S_e \\ S_{-3}; S_{-4}; \ldots O\,; S_e \\ \vdots \\ O\,;\; O\,; \ldots O\,; S_e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_{-1} \\ z_{-2} \\ z_{-3} \\ \vdots \\ z_{-n} \\ z_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{11}$$

A (11) alatti összefüggésrendszer felfogható egy olyan programozási feladat feltételrendszereként, ahol a feladat változói az ökonometriai modell folyó és előrejelzett endogén változói, a koefficiensek mátrixa a strukturális modell mátrixából származtatott mátrix; korlátvektora pedig az ökonometriai modell predeterminált változóinak értékeiből meghatározható vektor.

A (11) és a (8)—(9) összefüggésrendszerek összevetésével belátható, hogy S_0 inverzének létezése esetén a (11) alatti programozási feladathoz bármilyen célfüggvényt is rendelünk, e feladat megoldása a redukált forma segítségével meghatározott előrejelzésekkel azonos, mivel rögzített predeterminált változók mellett (11)-nek egyetlen lehetséges megoldása van.

Vizsgáljuk meg ezután, hogy milyen körülmények indokolhatják azt, hogy egy ökonometriai modellnek a hagyományos redukált formán alapuló megoldása helyett a matematikai programozáson alapuló megoldását válasszuk. Ezt alapvetően két körülmény indokolhatja:

a) valamelyik változót, vagy változócsoportot egy előre meghatározott értékhez kívánunk *szabályozni;*

b) valamelyik endogén változóra vagy előrebecsült értékeire *külső információ* áll rendelkezésünkre.

Vizsgáljuk meg először az a) esetet kissé részletesebben. Anélkül, hogy a kérdés közgazdasági részleteibe mennénk, megjegyezzük, hogy a népgazdasági tervnek és a gazdasági szabályozásnak az összhangját a tervezés során biztosítani kell. Ez a tervezésnek egyik igen fontos feladata. A modellezés szempontjából azt a feladatot jelenti, hogy szabályozó rendszernek a gazdasági folyamatokra gyakorolt hatását figyelembe kell venni.

E ponton kell megemlítenünk a népgazdasági tervek különböző lejáratait is. A modell az éves tervezés megalapozására szolgál, és bizonyos szempontból a középtávú tervezés és éves tervezés között kíván kapcsolatot teremteni. A modell kidolgozása során az egyik legfontosabb kérdésnek azt tekintettük, hogy a középtávú és rövidtávú tervezés közötti kapcsolatot megteremtsük, pontosabban annak modellezési lehetőségét vizsgáljuk, hogy egy elfogadott középtávú népgazdasági terv az éves terveken keresztül hogyan valósítható meg, figyelemmel arra, hogy a konkrét szabályozási rendszert, vagy annak legalábbis mennyiségi ismérveit a középtávú terv időszakaiban módunkban áll meghatározni.

Az éves, rövidtávú tervezés fontos feladata a népgazdaság egyensúlyi helyzetének lehetőség szerinti biztosítása. A továbbiakban ez alatt azt értjük, hogy elfogadjuk a középtávú tervet a maga kevéssé részletezett formájában, azonban a legfontosabb népgazdasági folyamatokat meghatározó tervszámokkal. Ezután e tervszámokból kiindulva kíséreljük meg az éves tervek olyan meghatározását, amely a népgazdaság bizonyos értelemben vett egyensúlyi helyzetét biztosítja, illetve a gazdasági folyamatokat megfelelően szabályozva a középtávú tervből levezethető egyensúlyi helyzethez közelíti. Ahhoz, hogy ezt megtegyük, rendelkezésünkre állnak az ún. szabályozó típusú változók, amelyeknek az egész rendszerre gyakorolt hatását az ökonometriai modell megfelelő viselkedési egyenleteiből ismerjük, és amelyek konkrét nagyságának meghatározásától és érvényesíttetésétől azt várjuk, hogy a modell endogén változói az előre kitűzött értékekhez a lehető legközelebb essenek. Vagyis a szabályozó típusú változóknak egy olyan optimális struktúráját keressük, amelyek biztosítják a modell egyéb változóinak előre rögzített célértékeihez (a középtávú terv évekre lebontott tervszámaihoz) való legjobb közelítését.

E problémáknak megfelelő programozási modell megfogalmazása érdekében a (11) alatti összefüggésből induljunk ki. A jobb áttekinthetőség kedvéért vonjuk össze a késleltetett endogén változókat és jelöljük z_{-t}-vel, hozzá tartozó megfelelő méretű paramétermátrixot S_{-t}-vel, a folyó és előrejelzett endogén változók vektorát z-vel, és a paramétereiket tartalmazó mátrixot S-vel. Így a (11) alatti összefüggésrendszer az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$S z = -S_{-t} z_{-t} - S_e z_e = b. \tag{12}$$

Bontsuk fel az exogén változók vektorát és a hozzájuk tartozó paramétermátrixokat két részre, valódi exogén változókra z_{ve} és szabályozó típusú gazdaságpolitikai változókra z_c, valamint az S_e mátrixot az ezeknek megfelelő S_{ve} és S_c mátrixokra. Ezeknek megfelelően (12) új alakja:

$$S z = -S_{-t} z_{-t} - S_{ve} z_{ve} - S_c z_c, \tag{13}$$

illetve

$$S z + S_c z_c = -S_{-t} z_{-t} - S_{ve} z_{ve}. \tag{14}$$

A szabályozó típusú változókra mozgási intervallumot engedünk meg, vagyis:

$$k_1 \leq z_c \leq k_2. \tag{15}$$

A modell endogén változóinak „elvárt" értékeit jelöljük $\hat{z}$-vel, melyet a szabályozó változók alkalmas megválasztásával kívánunk közelíteni.

Definiáljunk a kitűzött cél és a hozzá tartozó célváltozó közötti különbségként egy új változót:

$$w_i = \hat{z}_i - z_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{16}$$

ahol n azoknak az endogén változóknak a száma, melyeket célértékekhez kívánunk közelíteni.

A (14)–(16) feltételek teljesülése mellett a feladatnak olyan megoldását keressük, amely valamilyen értelemben minimálja az eltéréseket. Kézenfekvőnek kínálkozik az alábbi célfüggvény:

$$\sum_{i=1}^{n} (w_i)^2 \to \min! \tag{17}$$

Így a (14)–(16) feltételek és a (17) célfüggvény egy kvadratikus programozási feladathoz vezet, melynek feltételi rendszere lineáris.

Bár a lineáris feltételi rendszerű kvadratikus programozási feladatok – bizonyos méretkorlátok mellett – ma már számítástechnikailag is megoldhatók, azonban éppen e feladatok várható méretei miatt célszerű megfogalmazni egy hasonló, azonban lineáris programozással megoldható feladatot is. Bontsuk fel ennek érdekében a w_i eltéréseket két részre: w_i^1-gyel jelöljük az endogén változóknak a kitűzött céltól való „negatív" irányú eltéréseit, vagyis amelyek azt mutatják, hogy a kérdéses változók mennyivel kisebbek, mint a változókra előírt célértékek. Hasonlóan w_i^2-vel jelöljük e változók „pozitív" irányú eltéréseit, amelyek azt mutatják, hogy a célértékeknél mennyivel nagyobbak e változók aktuális értékei.

Ezeknek megfelelően a modell (16) alatti egyenleteit az alábbiakra cseréljük:

$$\hat{z}_i + w_i^1 - w_i^2 = z_i. \tag{18}$$

Előírjuk továbbá e változókra a nem-negativitási feltételeket is:

$$\left.\begin{aligned} w_i^1 &\geq 0\,, \\ w_i^2 &\geq 0\,, \end{aligned}\right. \qquad i = 1, \ldots, n\,. \tag{19}$$

A fentiek alapján a modell célfüggvényét az alábbiak szerint fogalmazhatjuk meg:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^1 + \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \rightarrow \min! \tag{20}$$

A (18) alatti feltételekből látható, hogy a w_i^1 és a w_i^2-hez tartozó vektorok lineárisan függő vektorok (egymásnak —1-szeresei), így a feladat bázismegoldásaiba — és így az optimális megoldásba is — közülük csak az egyik kerülhet be. Vagyis automatikusan biztosított, hogy a feladat megoldásában a hozzájuk tartozó endogén változóknak egyidejűleg ne legyenek pozitív és negatív irányú eltéréseik.

Az így megfogalmazott lineáris programozási feladat technikailag könnyen megoldható még igen nagy méretek esetén is, vagyis a megoldás lehetősége nem korlátozza részletes, több időszakot egyidejűleg átfogó modellek megalkotását.

Vizsgáljuk meg ezután a b) alatti esetet, vagyis azt, amikor az utólagos információknak a modellre gyakorolt hatását kívánjuk meghatározni. Mielőtt e problémakör formális elemzésébe kezdenénk, néhány szóban szeretnénk összefoglalni azt, amit mi utólagos, külső információ alatt értünk. Annak érdekében, hogy ezt megtegyük és megértését megkönnyítsük az alábbi példát szeretnénk felhozni. Tételezzük fel, hogy sikerült jól specifikálnunk az energiaimport egyenletét egy ökonometriai modellben. Ez az egyenlet valószínűleg egy keresleti típusú egyenlet lesz, kifejezve azt, hogy a népgazdaság energiaigényének egy részét importból kell fedezni. Az energiaimport tényleges lehetőségei azonban nem mindig olyanok, mint azt az energiaimport egyenlet mutatja, vagy más szóval, ahogyan annak várható alakulását az ökonometriai modell magyarázza. Sok esetben előre tudjuk, hogy bizonyos mennyiségen felül nem tudjuk, vagy csak nagyon kedvezőtlen körülmények között tudnánk energiát importálni. Információnk van tehát arra, hogy mekkora az energiaimport nagysága, és ennek az információnak utólag jutottunk a birtokába (pl. azáltal, hogy szerződő feleink közölték döntésüket). Ezt az információt utólagos külső információnak tekintjük. Természetesen utólagos külső információ alatt nemcsak az elmondottakat értjük, — ez csupán szemléletesen érzékelteti annak lényegét, — hanem a modellben szereplő bármely változónak várható konkrét értékét, amelyet a modellben figyelembe kívánunk venni. Ezek az utólagos információk akkor okoznak problémát, ha a modell folyó endogén változóira vonatkoznak. Vizsgálatainknál most is célszerűbb a modell (12) alatti összevontabb formájából kiindulni.

Tételezzük fel, hogy a z vektorral reprezentált m számú endogén változóból k számúra külső információ áll rendelkezésünkre. Ennek megfelelően a z vektor két részre bontható fel: egy (m-k) elemű z_1 és egy k elemű z_2 vektorra. Ekkor a (12) alatti összefüggést így írhatjuk át:

$$\underset{m\times(m-k);\ (m-k)\times 1}{S_1 z_1} \quad + \quad \underset{m\times k;\ k\times 1}{S_2 z_2} \quad = \quad \underset{m\times 1}{b}, \tag{21}$$

ahol az S_1 és S_2 az z_1 illetve z_2 vektorokhoz tartozó paramétermátrixok. Az összefüggésben feltüntettük a vektorok és mátrixok méreteit is.

A külső információk a modellt illetően azt jelentik, hogy a nekik megfelelő z_2 változók predetermináltakká váltak, vagyis modellbeli értékükkel a b vektort módosítják:

$$\underset{m\times(m-k);\ (m-k)\times 1}{S_1 z_1} = \underset{m\times 1}{b} - \underset{m\times k;\ k\times 1}{S_2 z_2} = \underset{m\times 1}{\bar{b}} \tag{22}$$

Látható, hogy (22) egy túlhatározott egyenletrendszer, amely m egyenletből és $(m-k)$ változóból áll, és így z_1-re egyértelműen nem oldható meg.

Ilyen helyzetben az a gyakorlat, hogy a modellből elhagyják azokat az egyenleteket, amelyek azokat a változókat „magyarázzák", melyekre külső információ áll rendelkezésre. Ez a megoldás azonban bizonyos esetekben kifogásolható, hiszen szimultán rendszerről lévén szó, olyan összefüggést is elhagyhatunk, amely nemcsak a kérdéses változó magyarázatát adja, hanem ezen túlmenően kapcsolatot teremt a modell többi összefüggései között is. Világosabb lesz talán a dolog, ha abból indulunk ki, hogy a modell strukturális alakja azokkal a változókkal — mint *endogén* változókkal — alkot egy teljes rendszert, melyekre utólagos, külső információkat kaptunk. E modell strukturális alakja abban az esetben, ha a kérdéses változókat, mint predeterminált változókat kezeltük volna, (miután az utólagos információk alapján azok valóban predetermináltak), valószínűleg teljesen más alakot öltött volna, hiszen a strukturális forma paramétermátrixának kétfokozatú, legkisebb négyzetek módszerével végzett becslése során (szimultán rendszerről lévén szó) az endogén és exogén változóknak egy másik rendszeréből kellett volna kiindulnunk. Ebből következik, hogy akkor járnánk el helyesen, ha az utólagos információkat predetermináltakként kezelve a struktúrát ilyen esetekben mindig újra becsülnénk. Ezek az információk azonban *ad hoc* jellegűek, a változóknak igen nagy körét érinthetik, és gyakran jelentkezhetnek. Nagyobb méretű modelt feltételezve, elképzelhetetlen annak állandó újrabecslése.

A probléma megoldásának másik lehetséges módja a (22) alatti rendszer közelítő megoldásának keresése. Ebben az esetben nem szükséges a kérdéses egyenletek elhagyása, ugyanakkor az utólagos információknak a modellre gyakorolt — valószínűleg javító — hatása is végig követhető. Ezt az alábbi módon tudjuk végrehajtani. Definiáljuk a v_i változót úgy, hogy aktuális értéke azt mutassa, hogy mennyivel kell módosítani a b_i értéket ahhoz, hogy az egyenletrendszer megoldható legyen. Ennek megfellően a (22) helyett az alábbi rendszerhez jutunk:

$$S_1 z_1 + v_i = b\,. \tag{23}$$

Tekintsük ezt az egyenletrendszert egy programozási feladat feltételrendszereként és definiáljuk hozzá olyan célfüggvényt, amely minimálja az eltéréseket.

Egy ilyen lehetséges célfüggvény a

$$\sum_i (v_i)^2 \to \min! \tag{24}$$

A (23) és (24) alatt definiált feladat egy kvadratikus programozási feladat lineáris feltételek mellett, amely explicite is megoldható és a megoldása:

$$S_1^+ b, \tag{25}$$

ahol

$$S_1^+ = [S_1^T S_1]^{-1} S_1^T, \tag{26}$$

és amely nem más, mint az S_1 mátrix Moore-Penrose-féle általánosított inverze. (Ez az eljárás az ökonometriai modelleknek csak arra a körére alkalmazható, amelyek nem tartalmaznak azonosságokat, ill. definíciós egyenleteket.)

Az előzőekhez hasonlóan a (23)–(24) alatt definiált feladat helyett itt is megfogalmazhatunk egy hozzá hasonló lineáris programozási feladatot az alábbiak szerint.

Legyen

$$v_i = v_i^1 - v_i^2 \tag{27}$$

és

$$v_i^1;\ v_i^2 \geq 0, \tag{28}$$

és a minimálandó célfüggvény ismét:

$$\sum_i v_i^1 + \sum_i v_i^2 \to \min! \tag{29}$$

2. A népgazdaság egy ökonometria modellje és megoldása a lineáris programozás módszerével

Az alábbi ökonometriai modellel elsősorban az a célunk, hogy rajta bemutassuk a már ismertetett elvek szerinti megoldását lineáris programozással.

Az ismertetett megoldások közül is csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor szabályozó típusú változók segítségével kívánjuk a modell néhány változóját előre rögzített célértékekhez közelíteni. Nem célunk e helyen a modell részletes elemzése, eredményeinek értékelése. Ezt csak annyira tesszük meg, amennyire a modell újszerű megoldása megkívánja.

A tulajdonképpeni ökonometriai modell 22 egyenletből áll, melyből 12 egyenletet sztochasztikus viselkedési egyenlet, 3 technikai egyenlet és 7 definíciós azonosság.

A modell változói az alábbiak:

FL	—	lakossági fogyasztás (endogén)
$\overline{\text{FL}}$	—	definíció szerinti lakossági fogyasztás (endogén)
JL	—	lakossági jövedelmek (endogén)
PF	—	fogyasztói árindex (exogén)
BF	—	bruttó felhalmozás (endogén)
$\overline{\text{BF}}$	—	definíció szerinti bruttó felhalmozás (endogén)
GDP	—	hozzáadott érték (endogén)
IMR	—	rubel viszonylatú import (endogén)
IMS	—	dollár viszonylatú import (endogén)
B	—	beruházás (endogén)

ER —	rubel viszonylatú egyenleg (endogén)
AE —	bruttó állóeszköz-állomány (endogén)
AE(−1)—	bruttó állóeszköz-állomány egy időszakkal késleltetett értéke (predeterminált)
AM —	amortizáció (endogén)
BNT —	bruttó nemzeti termelés (endogén)
TF —	termelő felhasználás (endogén)
L —	létszám (exogén)
J —	bérek és egyéni jövedelmek (endogén)
EXR —	rubel viszonylatú export (endogén)
KFR —	rubel viszonylatú forgalom indexe (exogén)
TJ —	tisztajövedelem (endogén)
EXS —	dollár viszonylatú export (endogén)
PES —	dollár viszonylatú kiviteli árindex (exogén)
KFS —	dollár viszonylatú forgalom indexe (exogén)
FK —	közösségi fogyasztás (endogén, szabályozó)
PIS —	dollár viszonylatú behozatali árindex (exogén)
EGS —	definíció szerinti kummulált egyenleg (endogén)
FL(−1)—	lakossági fogyasztás egy időszakkal késleltetett értéke (predeterminált)
FL(−2)—	lakossági fogyasztás két időszakkal késleltetett értéke (predeterminált)
BF(−1)—	bruttó felhalmozás egy időszakkal késleltetett értéke (predeterminált)
BF(−2)—	bruttó felhalmozás két időszakkal késleltetett értéke (predeterminált)
K —	készletfelhalmozás (endogén)
JA —	eszköz- és bérjárulékok (exogén, szabályozó)
ADO —	adók (exogén, szabályozó)
TS —	dollár viszonylatú exporttámogatás (exogén, szabályozó)
TR —	rubel viszonylatú exporttámogatás (exogén, szabályozó)
T —	egyéb támogatások (exogén, szabályozó)
N —	népgazdaságban képződött nyereség (endogén)
ES(−1)—	dollár viszonylatú egyenleg egy időszakkal késleltetett értéke (predeterminált)
ES(−2)—	dollár viszonylatú egyenleg két időszakkal késleltetett értéke (predeterminált)
ES(−3)—	dollár viszonylatú egyenleg három időszakkal késleltetett értéke (predeterminált).

Tekintsük át ezután a modell egyenleteit, melyeket a felsorolt változók 1960—1975 közötti adataiból a kétfokozatú legkisebb négyzetek módszerével határoztunk meg. Az egyenletek paraméterei alatt feltüntetett érték e paraméterek hibája, az egyenletek alatti statisztikai mutatók jelentése pedig:

SH = standard hiba; R^2 = többszörös korrelációs együttható
RH = relatív hiba; DW = Durbin-Watson teszt mutatója

(1) $$\mathrm{Fl} = -0{,}0801 + \underset{(0{,}2434)}{0{,}2419}\,\mathrm{FL} + \underset{(0{,}3370)}{0{,}7122}\,\mathrm{JL} + \underset{(0{,}298)}{4{,}5276}\,\mathrm{PF}$$

SH = 5,45, RH = 4,0%, R^2 = 0,9986, DW = 0,1952

$$(2)\quad BF = -20{,}7403 - \underset{(0{,}3637)}{0{,}5843}\overline{BF} + \underset{(0{,}1329)}{0{,}4393}GDP + \underset{(0{,}2719)}{0{,}5394}IMR + \underset{(0{,}1742)}{0{,}0918}IMS$$

$SH = 6{,}5401$, $RH = 7{,}0\%$, $R^2 = 0{,}9910$, $DW = 1{,}8159$

$$(3)\quad B = -26{,}975 + \underset{(0{,}1191)}{0{,}3694}GDP + \underset{(0{,}2651)}{0{,}309}ER(-2) + \underset{(0{,}3642)}{0{,}6295}ES(-2)$$

$SH\ 3{,}65$, $RH = 3{,}22\%$, $R^2 = 0{,}9971$, $DW = 1{,}2990$

$$(4)\quad AE = 18{,}03 + \underset{(0{,}3401)}{0{,}7571}B + \underset{(0{,}0551)}{0{,}9777}AE(-1)$$

$SH = 7{,}89$, $RH = 0{,}7\%$, $R^2 = 0{,}9996$, $DW = 1{,}8895$,

$$(5)\quad AM = -22{,}8137 + \underset{(0{,}0014)}{0{,}0468}AE$$

$SH = 1{,}4173$, $RH = 4{,}7\%$, $R^2 = 0{,}9938$, $DW = 0{,}9595$

$$(6)\quad BNT = -410{,}7005 + \underset{(0{,}159)}{1{,}1895}TF + \underset{(0{,}0884)}{0{,}2336}AE + \underset{(0{,}0276)}{0{,}0776}L$$

$SH = 7{,}9772$, $RH = 1{,}2\%$, $R^2 = 0{,}9996$, $DW = 1{,}3320$

$$(7)\quad JL = 13{,}5896 + \underset{(0{,}0321)}{0{,}5932}GDP$$

$SH = 3{,}64$, $RH = 1{,}9\%$, $R^2 = 0{,}9985$, $DW = 2{,}1263$.

$$(8)\quad J = 4{,}0471 + \underset{(0{,}0413)}{0{,}702}JL$$

$SH = 3{,}98$, $RH = 3{,}02\%$, $R^2 = 0{,}9977$, $DW = 1{,}2636$

$$(9)\quad EXR = -7{,}9718 + \underset{(0{,}0253)}{0{,}0474}BNT + \underset{(1{,}6151)}{5{,}8948}KFR + \underset{(0{,}112)}{0{,}1025}TJ$$

$SH = 2{,}4611$, $RH = 4{,}9\%$, $R^2 = 0{,}9999$, $DW = 1{,}4021$

$$(10)\quad EXS = 65{,}6472 + \underset{(0{,}0325)}{0{,}048}BNT + \underset{(2{,}1605)}{57{,}4862}PES + \underset{(1{,}0165)}{2{,}275}KFS + \underset{(0{,}0879)}{0{,}0518}TJ$$

$SH = 2{,}5664$, $RH = 2{,}78\%$, $R^2 = 0{,}9964$, $DW = 2{,}0301$

$$(11)\quad IMR = -16{,}9622 + \underset{(0{,}0593)}{0{,}2372}BF + \underset{(0{,}1152)}{0{,}2145}(FL + FK)$$

$SH = 2{,}6556$, $RH = 6{,}26\%$, $R^2 = 0{,}9716$, $DW = 1{,}5706$

$$(12)\quad IMS = -79{,}6465 + \underset{(0{,}1534)}{0{,}2823}BF + \underset{(0{,}1221)}{0{,}1724}FL + \underset{(0{,}6181)}{69{,}5044}PIS + \underset{(0{,}2463)}{0{,}0733}EGS$$

$SH = 2{,}4574$, $RH = 8{,}7\%$, $R^2 = 0{,}9871$, $DW = 1{,}1877$

$$(13)\quad FL = 0{,}5FL(-1) + 0{,}5FL(-2)$$

$$(14)\quad \overline{BF} = 0{,}5BF(-1) + 0{,}5BF(-2)$$

$$(15)\quad TF = BNT - GDP$$

$$(16)\quad GDP = FL + FK + BF + ER + ES$$

$$(17)\quad BF = B + K$$

$$(18)\quad GDP = J + TJ + AM$$

$$(19)\quad TJ = JA + ADO - T - TS - TR + N$$

$$(20)\quad ES = EXS - IMS$$

$$(21)\quad ER = EXR - IMR$$

$$(22)\quad EGS = ES(-1) + ES(-2) + ES(-3).$$

Mint látható, a modell lineáris dinamikus modell, hiszen késleltetett változókat is tartalmaz.

Ezek a késleltetett változók hivatottak arra, hogy a különböző időszakok közötti kapcsolatokat megteremtsék. Ezen a ponton még egy fontos összehasonlítást kell tennünk az ökonometriai modellnek redukált formán vagy matematikai programozási eljáráson alapuló megoldásai között. Egy ökonometriai modell redukált formán alapuló megoldása végül is azt fejezi ki, hogy a modell folyó endogén változói hogyan függenek a modell késleltetett, valamint exogén változóitól, mint a modell végső meghatározóitól.

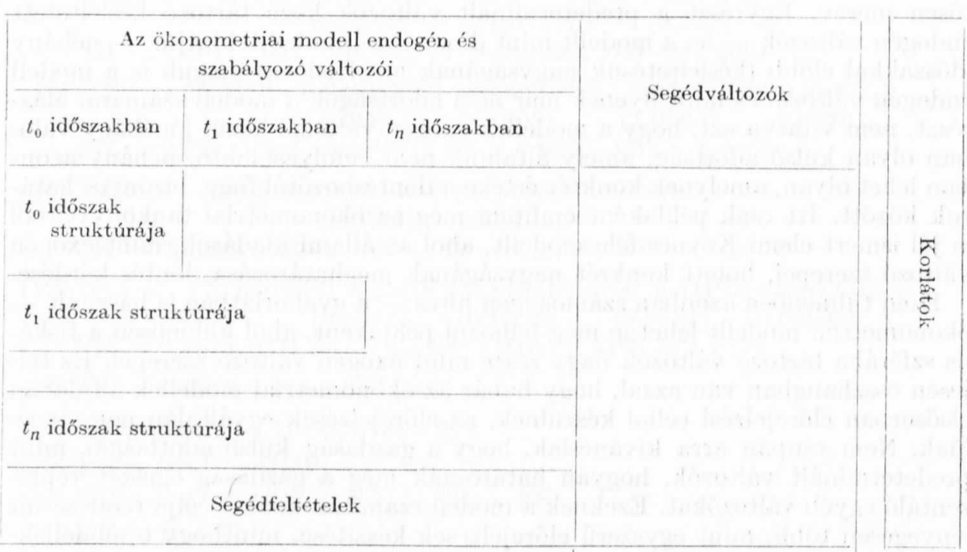
Ez azt jelenti, hogy a predeterminált változók egy meghatározott rendszeréhez egy általa egyértelműen meghatározott endogén változórendszer tartozik. Amikor tehát a modell segítségével előrejelzést készítünk a t-edik időszakra, akkor ez az előrejelzés a t-edik időszakra vonatkozó predeterminált változók struktúrájától függ; a t_1 időszakra vonatkozó előrejelzés a t_1 időszakhoz tartozó predeterminált változók struktúrájától; stb. Ebből következik, hogy nincs módunk arra, hogy — a rendelkezésünkre álló lehetőségeken belül — a t_0-dik időszakban bizonyos exogén tényezőket úgy válasszunk meg, hogy azok a t_n-edik időszakra vonatkozóan az endogén változóknak valamilyen szempontból optimális struktúráját határozzák meg. Anélkül, hogy részletekbe bocsátkoznánk, ezzel kapcsolatban néhány megjegyzést szeretnénk tenni. A hagyományos ökonometriai gyakorlat a modellek változóit két élesen elkülönített részre, endogén és predeterminált változókra bontja, és ez utóbbiakat a modell számára olyan külső adottságként kezeli, melyek értékének kialakítása általunk nem befolyásolható.

Az általunk vizsgált problémakört illetően ez a felfogás két okból is meglehetősen merev. Egyrészt a predeterminált változók közé tartozó késleltetett endogén változók — ha a modellt mint dinamikus modell tekintjük — néhány időszakkal előbb (késleltetésük nagyságának megfelelően) maguk is a modell endogén változói és mint ilyenek már nem adottságok a modell számára. Másrészt, nem vitatva azt, hogy a modellek exogén változói közül jónéhány valóban olyan külső adottság, amely általunk nem befolyásolható, néhány azonban lehet olyan, amelynek konkrét értéke a döntéshozótól függ, bizonyos határok között. Itt csak példaként említem meg az ökonometriai tankönyvekből is jól ismert elemi Keynes-féle modellt, ahol az állami kiadások, mint exogén változó szerepel, holott konkrét nagyságának meghatározása döntés kérdése.

Ezen túlmenően azonban számos igen híres — a gyakorlatban is használt — ökonometriai modellt lehetne még felhozni példaként, ahol különösen a fiskális szférába tartozó változók nagy része mint exogén változó szerepel. Ez teljesen összhangban van azzal, hogy habár az ökonometriai modellek általában elsősorban előrejelzési céllal készülnek, az előrejelzések egyáltalán nem öncélúak. Nem csupán arra kiváncsiak, hogy a gazdaság külső adottságai, mint predeterminált változók, hogyan határozzák meg a gazdaság egészét reprezentáló egyéb változókat. Ezeknek a modell-számításoknak a célja rendszerint lényegesen több, mint egyszerű előrejelzések készítése, minthogy e modellekkel éppen a gazdasági folyamatok spontaneitását kívánják megszüntetni. Így van ez a tőkés gazdaságokban is, de különösen igaz a tervgazdálkodást folytató országokban, ahol e modellek a népgazdasági tervezés fontos segédeszközei.

Az optimálás kérdésében az ökonometriai modell hagyományos megoldása esetén próbálkozásokra vagyunk utalva. Ez abból áll, hogy különböző predeterminált változó — struktúrákból kiindulva figyeljük a teljes rendszer viselkedését a választott optimalitási kritériumnak megfelelően, majd ezek alapján választjuk a számunkra kedvezőbbet. Könnyen belátható, hogy ez az eljárás rendkívül körülményes és semmi biztosítékunk sincs arra, hogy így a modell optimális megoldásához jussunk.

Más a helyzet, ha a modellt programozási eljárással oldjuk meg. Ebben az esetben a modell időbeli kapcsolatainak szimultán figyelembevételére van lehetőségünk. Ez azt jelenti, hogy — a modell feltételei rendszerétől, a definiált célfüggvénytől függően — a modellel átfogott időszakot egyidejűleg tudjuk kezelni. Azt, hogy a modell mekkora időszakot ölel át, a modell késleltetett változóinak struktúrája határozza meg. A programozási módszerrel történő megoldás esetén a modellel átfogott teljes időszakot tekintve — a számítás időpontjában — t_0-ik időszakra vonatkozó késleltetett változók mind predetermináltak. A t_1-edik időszakot tekintve azonban már nem ez a helyzet, hiszen a t_1-edik időszakra vonatkoztatott, és egy időszakkal késleltetett változók a t_0-dik időszak folyó endogén változói, és így a teljes modellt tekintve nem predetermináltak. Hasonlóan a t_2-dik időszakot nézve, és egész modellt tekintve csak a három időszakkal késleltetett változók a predetermináltak. Az elmondottakból következik, hogy a redukált formán alapuló megoldástól eltérően itt a t_0 időszakot követő periódusokra vonatkozó predeterminált változó értékek meghatározása már nem lehet tetszőleges, konkrét értékük alakulása a teljes modell összefüggésrendszerétől függ. Ilyen módon a modell valóban dinamikus és megoldása a modellezett teljes időszakra vonatkozóan lesz valamilyen értelemben (a célfüggvénynek megfelelően) optimális. Az elmondottakat jól szemlélteti az alábbi séma:



Térjünk most vissza számszerűsített modellünk vizsgálatára.

A modell 22 endogén és hat szabályozó típusú programozott változót tartalmaz egy időszakra. A feladatban 5 fontos endogén változóra (BNT, GDP, FL, ER és ES) írtuk elő, hogy azok modellbeli értékei közelítsenek minél jobban a kívülről előírt értékekhez. (Ezek az értékek — *ex post* előrejelzésekről lévén szó — az 1969—1975 közötti időszakra e változók ténylegesen felvett értékei voltak, míg 1976-ra tényleges előrejelzést végeztünk a modellel úgy, hogy a BNT, GDP, FL „ideálisnak" vett értékei az 1975-ös értékeik 1,06-szorosa. Mindkét viszonylatban a külkereskedelmi egyenlegre 0 értéket írtunk elő.

A modell ilyen felírása e feltételek mellett arra a kérdésre ad választ, hogy a modell szabályozó változóit (az eszköz- és bérjárulékok, dollár viszonylatú exporttámogatás, rubel viszonylatú exporttámogatás, egyéb támogatások és közösségi fogyasztás) — bizonyos intervallumon belül — hogyan válasszuk meg annak érdekében, hogy az öt kérdéses változó a népgazdasági célnak tekintett célértékeihez minél közelebb kerüljön, továbbá hogy e célt milyen módon lehet teljesíteni, vagyis hogy a modell többi változója milyen értékeket vesz fel.

Tekintsük ezután a modell segédfeltételeit, illetve változóit. Ezek a következők:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{BNT}_t + \mathrm{BNTL}_t - \mathrm{BNTU}_t &= \widehat{\mathrm{BNT}}_t, \\
\mathrm{GDP}_t + \mathrm{GDPL}_t - \mathrm{GDPU}_t &= \widehat{\mathrm{GDP}}_t, \\
\mathrm{FL}_t + \mathrm{FLL}_t - \mathrm{FLU}_t &= \widehat{\mathrm{FL}}_t, \qquad t = 1, \ldots, 8 \\
\mathrm{ER}_t + \mathrm{ERL}_t - \mathrm{ERU}_t &= \widehat{\mathrm{ER}}, \\
\mathrm{ES}_t + \mathrm{ESL}_t - \mathrm{ESU}_t &= \widehat{\mathrm{ES}}_t,
\end{aligned}
$$

ahol az L-lel jelölt segédváltozók a kérdéses változók célértéktől „lefelé" való eltérését, míg az U-val jelölt segédváltozók a „felfelé" való eltéréseit jelölik. A $\wedge$ -val megjelölt értékek az elérendő célokat jelölik. (Ezek egyébként a programozási modell korlátvektorának egyik részét képezik, míg a vektor többi részének komponensei az ökonometriai modell konstansaiból és az exogén változók megfelelő helyettesítési értékeiből adódnak össze.) A feladat a kiemelt változókra a célértékeitől való eltérések összegét minimálja, vagyis a célfüggvény:

$$
\begin{aligned}
\Sigma_t(&\mathrm{BNTL}_t + \mathrm{BNTU}_t + \mathrm{GDPL}_t + \mathrm{GDPU}_t + \mathrm{FLL}_t + \mathrm{FLU}_t + \mathrm{ERL}_t + \\
&+ \mathrm{ERU}_t + \mathrm{ESL}_t + \mathrm{ESU}_t) \to \min.
\end{aligned}
$$

Mint látható, a célfüggvényben szereplő valamennyi változó paramétere egységnyi. Ez azt jelenti, hogy valamennyi változó eltérését egységnyi (azonos) súllyal „büntetjük", vagyis ez a súlyozás független a tevékenység mértékétől.[1]

[1] Itt jegyezzük meg, hogy az ökonometriai modellnek programozási módszerrel történő megoldása esetén éppen a célfüggvény súlyrendszerének különböző definiálása mellett nyílik lehetőség nagyszámú variáns képzésére. Pl. egy beruházáscentrikus variáns készítése esetén a beruházásnak a célértéktől való eltérését lényegesen nagyobb súllyal „büntetjük", mint a többi változót. Anélkül, hogy e helyen a kérdés részleteit megvizsgálnánk, megemlítjük, hogy a feladat gazdasági interpretációja is rendkívül érdekes és hasznos a modell eredményeinek utólagos elemzése során.

A számítások során első variánsként ezt a célfüggvényt használtuk, majd az 1973—1976-ra készítettünk olyan számításokat is, ahol a célfüggvényben szereplő súlyok a hozzájuk tartozó célértékek nagyságával fordított arányban álltak, vagyis az alkalmazott célfüggvény az alábbi volt:

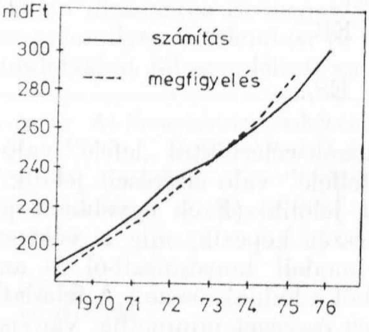
$$\sum_t \frac{1}{\widehat{\mathrm{BNT}}_t}(\mathrm{BNTL}_t + \mathrm{BNTU}_t) + \frac{1}{\widehat{\mathrm{GDP}}_t}(\mathrm{GDPL}_t + \mathrm{GDPU}_t) +$$

$$+ \frac{1}{\widehat{\mathrm{FL}}_t}(\mathrm{FLL}_t + \mathrm{FLU}_t) + \frac{1}{\widehat{\mathrm{ER}}_t}(\mathrm{ERL}_t + \mathrm{ERU}_t) +$$

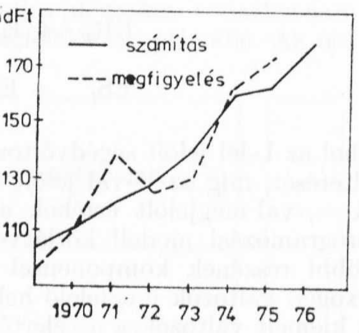
$$+ \frac{1}{\widehat{\mathrm{ES}}_t}(\mathrm{ESL}_t + \mathrm{ESU}_t) \to \min.$$

Végül a modellszámítások eredményeiről szeretnénk néhány szót szólni.

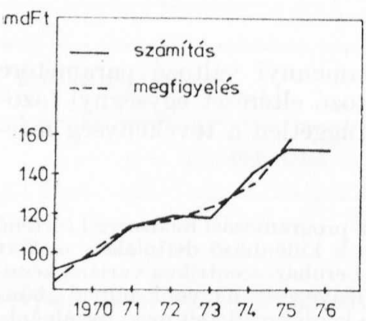
A modell néhány fontos változójára készített előrejelzéseket szemléltetik az 1—16. ábrák. Azokból is jól látható, hogy a számítások eredményei jól közelítik e változók tényértékeit. Az előrejelzések relatív hibája általában 1—2% között van. Előfordult ezeknél lényegesen nagyobb relatív hiba is,



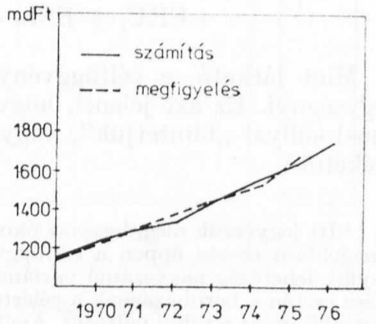
1. ábra
Lakossági fogyasztás



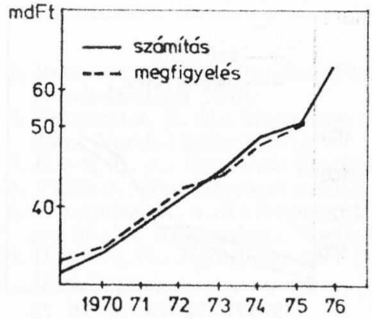
2. ábra
Bruttó felhalmozás



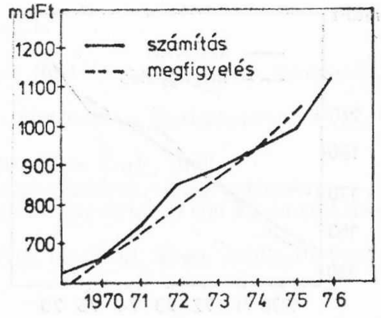
3. ábra
Beruházások



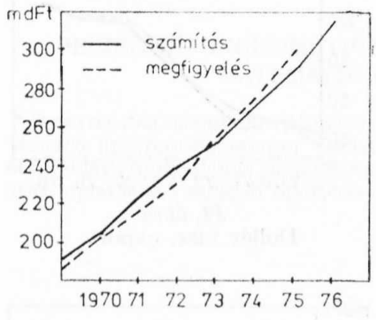
4. ábra
Bruttó állóeszközállomány



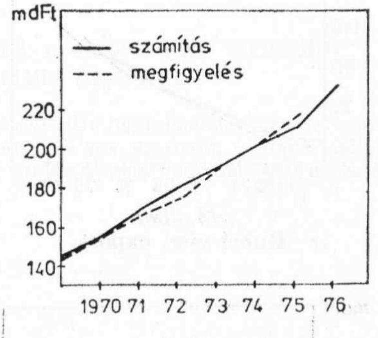
5. ábra
Amortizáció



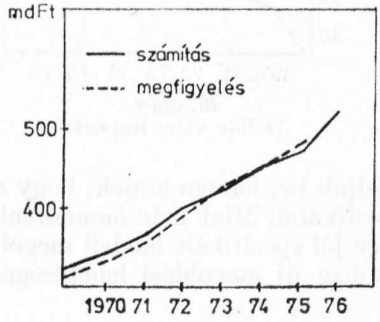
6. ábra
Bruttó nemzeti termelés



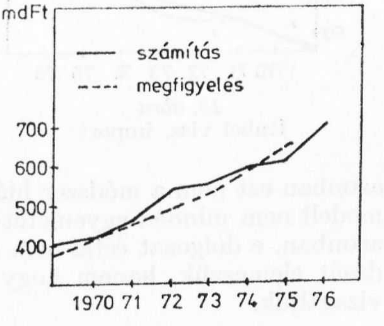
7. ábra
Lakossági jövedelem



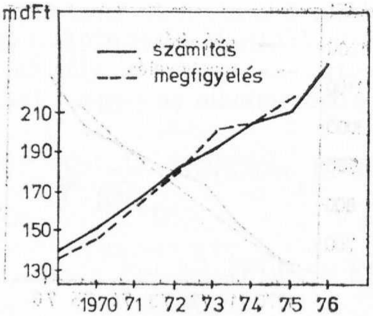
8. ábra
Bérek és egyéni jövedelmek



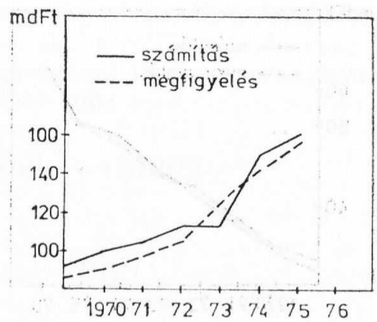
9. ábra
Hozzáadott érték



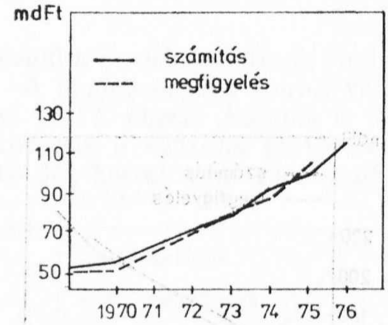
10. ábra
Termelő felhasználás



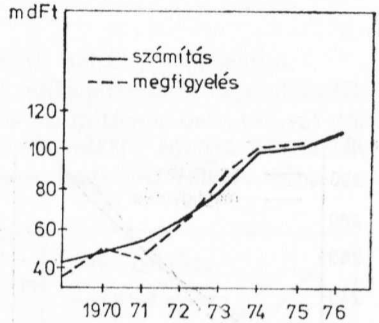
11. ábra
Tiszta jövedelem



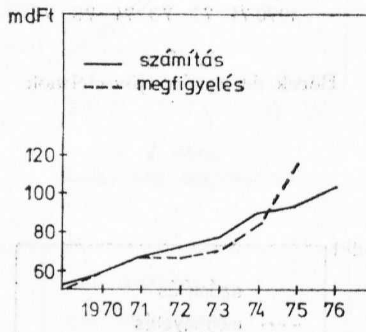
12. ábra
Nyereség



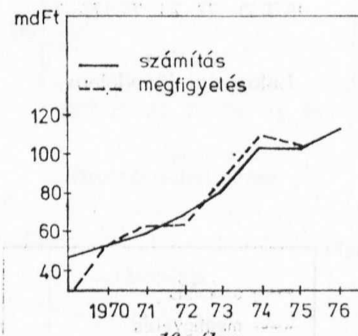
13. ábra
Rubel visz. export



14. ábra
Dollár visz. export



15. ábra
Rubel visz. import



16. ábra
Dollár visz. import

azonban ezt nem a módszer hiányosságának tudjuk be, hanem annak, hogy a modell nem minden egyenletét sikerült jól specifikálni. Mint már mondottuk azonban, e dolgozat célja nem az volt, hogy egy jól specifikált modell megoldását elemezzük, hanem hogy egy módszertanilag új megoldási lehetőségét vizsgáljuk.

(Beérkezett: 1977. november 30-án.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Pindyck, R. S.: Optimal Planning for Economic Stabilization Policy. Amsterdam North-Holland 1973.
2. Friedman, B. M.: Economic Stabilization Policy: Methods in Optimization. Amsterdam, North-Holland 1975.
3. Kane, E. J.: Economic Statistics and Econometrics, New York, 1969.
4. Pajzs J.: Ökonometriai modellek és gazdaságpolitikai döntések, sokszorosítvány.
5. Goldberger, A. S.: Impact Multipliers and Dynamic Properties of the Klein-Goldberger Model. Amsterdam, North-Holland 1970.
6. Hadley, G.: Non-linear and Dynamic Programming. Reading. Mass. Addison-Wesley 1964.

SOLUTION OF AN ECONOMETRIC MODEL BY MATHEMATICAL PROGRAMMING

It is examined whether econometric models can be solved by mathematical programming procedure. Those circumstances are analyzed in detail which might justify the application of programming methods, and some programming models suitable for these problems are presented.

РЕШЕНИЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В статье анализируется решение эконометрических моделей с помощью метода математического программирования. Более подробно дается анализ тех условий, которые могут обосновать применение методов программирования, а также приводятся соответствующие этим проблемам модели программирования.