Hunyadi László–Neményi Judit

Éves és negyedéves ökonometriai modellek összekapcsolásának egy módszere[1]

Bevezetés

Bár a népgazdaság rövidtávú tervezése és irányítása nálunk is, mint más szocialista országokban éves keretekben történik, az utóbbi években egyre inkább felmerült az *éven belüli népgazdasági folyamatok* megismerésének szükségessége. Mindenekelőtt a felgyorsult külgazdasági mozgások, továbbá a belső folyamatok olykor egészségtelen szezonális ingadozásai vetik fel sürgetően a jelenleginél operatívabb és hatékonyabb szabályozás kérdését, amelynek alapja a rövidtávú — a pénzügyi és statisztikai adatszolgáltatási rendszer sajátosságaihoz igazodó—negyedéves előrejelzés lehet. Ez indokolja a rövidtávú ökonometriai prognózismodellek kidolgozását, amelyeket célszerű *éves modellel megalapozni*, ugyanakkor a fentiek értelmében törekedni kell olyan irányú kibővítésükre, amely lehetőséget ad az éven belüli (negyedéves) folyamatok részletes elemzésére és előrejelzésére.

Hazánkban eddig negyedéves népgazdasági prognózismodell nem készült, ugyanakkor — főként módszertani kérdésekben — nagymértékben támaszkodhatunk más országok gazdag modellezési tapasztalataira. A tőkés országokban már az 1960-as évek eleje óta készítenek negyedéves ökonometriai modelleket (pl. [1] [5] [11]), melyek elsősorban a monopolkapitalista állam gazdasági beavatkozásának eszközeként funkcionálnak. A szocialista országokban eddig készült modellek [7], [10] elsősorban a népgazdasági terv végrehajtása folyamatos ellenőrzésének és korrekciójának eszközei.

Az említett modellek közös sajátossága az, hogy *hiányos információk*ra épülnek. Ismeretes, hogy a statisztikai rendszer mindenütt éves bázisra épül, így a negyedéves információk köre szűkebb az éveseknél. Ez a modellezés szempontjából legalábbis két kérdést vet fel:

— létezik-e a megfelelő modellspecifikáció minden változójára negyedéves adat, s ha nem, akkor ez a probléma hogy hidalható át; továbbá

— léteznek-e megfelelő hosszúságú negyedéves idősorok, illetve a teljesebb és hosszabb éves idősorok alapján lehet-e javítani a negyedéves modellt.

Cikkünk — mely tehát a negyedéves modellezés egy speciális módszertani problémáját tárgyalja — erre a kérdésre keresi a választ.

Maga a probléma nem tekinthető újnak; már az említett modellek is valamilyen formában érintik ezt a kérdést. Átfogó tárgyalását *Gelauff* adta meg [2], aki a különböző eljárások összehasonlítását végezte el Monte Carlo-módszerrel. Az általunk javasolt eljárás annyiban különbözik a korábbiaktól, hogy

[1] A cikk egyes gondolatait, a részletek mellőzésével, a VII. Magyar Operációkutatási Konferencián elhangzott előadásunk [4] ismertette.

nem kívánunk előzetesen, modellen kívül, nem létező adatokat becsülni, hanem a modell becslési eljárását úgy alakítjuk ki, hogy az alkalmas legyen hiányos információk kezelésére. Az eljárás kidolgozásánál a jelenlegi tényleges helyzetből indultunk ki, amely röviden úgy jellemezhető, hogy éves adatok — elsősorban a népgazdasági mérlegekből — 1960-tól, negyedéves adatok pedig 1968-tól állnak rendelkezésünkre. A cikkben csak a legegyszerűbb, egy egyenletből álló, illetve egyszerű rendszerrel foglalkozunk; a bonyolultabb modellek kérdéseit csak utalásszerűen, az összefoglaló részben említjük. Ugyancsak nem foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy a modell specifikációs hibái (multikollinearitás, heteroszkedaszticitás, autokorreláció stb.) hogyan befolyásolják a kapott formulákat és eredményeket, hiszen az erre vonatkozó kutatások korántsem tekinthetők lezártnak.

A cikk bevezető részét követően a probléma pontos megfogalmazását, a megoldás alapötletét, az éves és negyedéves modell kapcsolatát mutatjuk be. A második részben vázoljuk az időbeli dezaggregáció egy egyszerű esetét és felírjuk a dezaggregált modell fontosabb statisztikai jellemzőit. A harmadik rész a javasolt — a korlátozott legkisebb négyzetek módszerén alapuló — eljárás statisztikai jellemzőit ismerteti, és összehasonlítja azokat a rövidebb idősorokon alapuló, klasszikusnak tekinthető eljárás megfelelő mutatóival, majd egy alternatív — az általánosított legkisebb négyzetek módszerét felhasználó — becslést mutat be. A negyedik részben — az elmondottak illusztrálásául szolgáló — számszerű példát mutatunk be. Végül a cikket rövid összefoglalás és az irodalomjegyzék zárja.

1. A negyedéves ökonometriai modellek kidolgozásának egy lehetséges módja

Mint azt már a bevezetőben is említettük, a negyedéves ökonometriai modellek kidolgozására általunk javasolt eljárás azon az elgondoláson alapul, hogy a rövidtávú (negyedéves) folyamatok modellezésénél célszerűnek látszik a gazdasági folyamatok alakulását — a viszonylag megbízhatóbb és teljes körű adatrendszer miatt — reálisabban tükröző *éves bázisú ökonometriai modellből kiindulni*.

Az éves modellel az endogén változókra készített *ex post* és *ex ante* becsléseket „*alaptendenciáknak*" tekintjük, amikor felírjuk a „negyedéves eltérések modelljét". A negyedéves eltérések modelljének felírásához felhasználjuk az ún. „fiktív negyedéves" modellt, amely az éves modellből, később bemutatandó módon, mechanikusan származtatható. A negyedéves eltérések modelljének felírásához felhasznált segédváltozók ugyanis a tényleges negyedéves megfigyelésekkel rendelkező változók és a fiktív modellből kapott átlagos értékek különbségeként jönnek létre.

A tényleges negyedéves modellt a fiktív modell és a negyedéves eltérések modelljének összegeként írjuk fel. Belátható, hogy a negyedéves modellt egy évre aggregálva visszakapjuk az éves modellt, ugyanakkor egy az előrejelzés szempontjából igaz az, hogy az éves és negyedéves modellből kapott becslések különbözhetnek egymástól az esetben, ha a negyedéves modellbe specifikusan negyedéves változókat is beépítünk. A két becslés különbsége ekkor a specifikusan negyedéves változó által nyert többletinformációnak az előrejelzést javító hatását tükrözi.

A fentiekben vázolt eljárás egy egyenletből álló modell esetén feltételezi, hogy *az endogén változóra léteznek tényleges negyedéves megfigyelések.* Szimultán rendszer esetén, azoknak az éves egyenleteknek helyébe, ahol az endogén változóra nem létezik negyedéves adatsor, vagy maga az egyenletben megfogalmazott összefüggés nem értelmezhető negyedéves szinten, a fiktív negyedéves egyenleteket építjük be a negyedéves modell teljessé tétele érdekében.

Tekintsük most az előzőekben ismertetett eljárás formális leírását. Itt, mint már említettük, csak az *egy egyenletből* álló, egyszerű rendszerrel foglalkozunk.

Az éves lineáris ökonometriai modellből indulunk ki, amely a következőképpen írható fel.

$$y = X\beta + u, \tag{1}$$

ahol y az endogén változó megfigyeléseinek $(T\times 1)$-es vektora,

X a predeterminált változók megfigyeléseinek $(T\times K)$-es mátrixa,

β a predeterminált változókhoz tartozó $(K\times 1)$ méretű paramétervektor,

u a véletlen eltérések $(T\times 1)$-es vektora.

Az éves modell paraméterbecslése elvégezhető pl. OLS (egyszerű legkisebb négyzetek) módszerrel.

A becsült paraméterek $(\hat{\beta})$ felhasználásával *ex post* és *ex ante* előrejelzéseket készítünk az endogén változókra:

$$\hat{y} = X\hat{\beta}.$$

A következő lépés a ,,fiktív negyedéves'' modell felírása. Ehhez szükséges az időbeli dezaggregáció részletesebb vizsgálata, melyre a következő részben kerítünk sort. Legyen a fiktív negyedéves modell a következő:

$$\tilde{y} = \tilde{X}\tilde{\beta} + \tilde{u}, \qquad \tilde{X} = AX, \qquad \tilde{y} = Ay,$$

ahol $\left.\begin{array}{l}\tilde{y} \text{ az endogén} \\ \tilde{X} \text{ a predeterminált}\end{array}\right\}$ változókra a később definiálandó A dezaggregáló mátrix segítségével felírt fiktív értékekek.

A fiktív modell $\tilde{\beta}^{\wedge}$ paramétereinek és az éves modellből kapott $\hat{\beta}$ paraméterbecslések kapcsolatát szintén a következő részben tárgyaljuk. A tényleges negyedéves modell felírásához szükség van még a negyedéves eltérések modelljére, amely a következőképpen állítható elő:

$$\Delta y = y^{(Q)} - \tilde{y}^{\wedge},$$

ahol $y^{(Q)}$ az endogén változók tényleges negyedéves megfigyelései,

$\tilde{y}^{\wedge}$ az endogén változókra kapott fiktív becslés,

Δy pedig a negyedéves eltérések vektora.

Ezekután *két eset* lehetséges:

a) Amennyiben a magyarázó változók között nincs negyedéves megfigyeléssel rendelkező, akkor a negyedéves ingadozásokat ún. szezonális vakváltozók bevezetésével írjuk fel:

$$\Delta y = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \alpha_3 r_3 + \alpha_4 r_4 + \Delta u,$$

ahol

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad r_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad r_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Hasonló eljárást láthatunk *Klein* korai modelljében [5].

Ekkor a tényleges negyedéves modell

$$y^{(Q)} = \tilde{y}^{\wedge} + \Delta y = \tilde{X}\tilde{\beta}^{\wedge} + R\alpha + u^{(Q)}$$

alakú lesz, ahol

$$R = [r_1\, r_2\, r_3\, r_4].$$

b) Amennyiben a magyarázó változók közül legalább egyre létezik negyedéves megfigyelés, akkor az X mátrixból kiválasztjuk az X_1 almátrixot, amely a negyedéves megfigyeléssel rendelkező magyarázó változók éves idősorait tartalmazza, és erre végezzük el az $\tilde{X}_1 = AX_1$ dezaggregálást. Ezután képezzük a $\Delta X_1 = X_1^{(Q)} - \tilde{X}_1$ különbségváltozókat.

Ha vannak olyan $Z^{(Q)}$ változók, amelyek specifikusan negyedéves szinten jellemzők, és ezek aggregált értéke $Z^{(A)}$, az ezekhez tartozó eltérésváltozókat $\Delta Z = Z^{(Q)} - \tilde{Z}$ alakban nyerjük (ahol $\tilde{Z} = AZ^{A}$).

Ekkor a negyedéves ingadozások modellje

$$\Delta y = \Delta X_1 \gamma_1 + \Delta Z\delta + \Delta u$$

formában írható fel, s a negyedéves modell

$$y^{(Q)} = \tilde{y}^{\wedge} + \Delta y = \tilde{X}\tilde{\beta}^{\wedge} + \Delta X_1 \gamma_1 + \Delta Z\delta + u^{(Q)} \tag{2}$$

alakú lesz.

Természetesen a gyakorlati alkalmazások során adódhat olyan eset is, amikor az a) és b) eset *keverten* szerepel, azaz valódi negyedéves magyarázó változók mellett mesterséges változók alkalmazása is szükséges lehet. Ez az eset azonban elvben nem különbözik a tárgyaltaktól.

2. A „fiktív" negyedéves modell

Mint az előzőekben láthattuk, módszerünkben kulcsszerephez jut az ún. fiktív negyedéves modell, amely átmenetet teremt az éves és a tényleges negyedéves modell között. Segítségével az ökonometriai modell keretein belül válik lehetségessé a hiányos negyedéves adatbázis okozta nehézségek áthidalása.

A fiktív negyedéves modellel kapcsolatban két problémakört kell okvetlenül áttekinteni: az időbeli aggregáció és dezaggregáció kérdését, valamint magának a modellnek a statisztikai jellemzőit. Ez utóbbi a fiktív és az éves modell kapcsolatának tisztázásához is elengedhetetlen.

2.1. Az időbeli aggregálás és dezaggregálás

Az aggregálás elmélete — melynek kiterjedt irodalma van, s amely iránt a modellek fejlődésének természetes következményeként nálunk is egyre nő az érdeklődés (pl. [6]) — általában a különböző szintű (pl. ágazati — népgazdasági) folyamatok és modellek összehasonlításával és összekapcsolásával foglalkozik. A következő rész az aggregációnak egy más aspektusát mutatja be. Az időbeli aggregáció kérdését — hasonló probléma kapcsán — mások is felvették [2], mi itt ennek egy meglehetősen egyszerű módszerét mutatjuk be olyan részletességgel, ami a további tárgyalás megértése érdekében szükséges.

Az időbeli aggregálás és dezaggregálás szempontjából az ökonometriai modell változóit két csoportra oszthatjuk:

— „folyam" típusú változókra, melyek idődimenzióval rendelkeznek, azaz értékeik meghatározott *időszakra* vonatkoznak. Ezek éves értékei a negyedéves értékek *összegeként* állnak elő (pl. termelés); valamint

— „állomány" típusú változókra, melyek nem rendelkeznek idődimenzióval, azaz értékeik meghatározott *időpontra* vonatkoznak. Ezek éves értékei a negyedéves értékek *átlagaként* határozhatók meg (pl. állóeszköz-állomány).

Jelölje $z^{(A)} = [z_1^{(A)} z_2^{(A)} \ldots z_T^{(A)}]$ az éves ökonometriai modell tetszőleges változójának idősorát, melynek jelölése folyam típusú változó esetén legyen $z_F^{(A)}$, állomány típusú változó esetén pedig $z_S^{(A)}$.

Definiáljuk az A_S, ill. A_F dezaggregáló mátrixokat az alábbi módon:

$$A_S = \underset{(4T \times T)}{\begin{bmatrix} 1\ 0 \ldots \\ 1\ 0 \\ 1\ 0 \\ 1\ 0 \\ 0\ 1 \\ 0\ 1 \\ 0\ 1 \\ 0\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}} \quad \text{és} \quad A_F = \frac{1}{4} \underset{(4T \times T)}{\begin{bmatrix} 1\ 0 \ldots \\ 1\ 0 \\ 1\ 0 \\ 1\ 0 \\ 0\ 1 \\ 0\ 1 \\ 0\ 1 \\ 0\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}}.$$

Könnyen belátható, hogy ezek legfontosabb tulajdonságai az alábbiak:

a) $$A_F = \frac{1}{4} A_S \quad \text{és} \quad A_S = 4A_F,$$

b) $$A'_S A_S = 4I \quad \text{és} \quad A'_F A_F = \frac{1}{4} I,$$

$$A_S A'_S = J \quad \text{és} \quad A_F A'_F = \frac{1}{16} J = J^+,$$

ahol I az egységmatrixot, $'$ pedig a transzponálás műveletét jelenti, továbbá

$$J = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathit{1} & 0 & 0 & \\ \hline 0 & \mathit{1} & & \\ \hline 0 & 0 & \ddots & \\ \hline & & & \end{array}\right] \quad \text{és} \quad \mathit{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) A_S és A_F bal oldali általánosított inverzei a következők:

$$A_S^+ = \frac{1}{4} A'_S = A'_F, \quad \text{illetve} \quad A_F^+ = 4A'_F = A'_S.$$

Ekkor

$$A_S^+ A_S = A'_F A_F = A_F^+ A_F = I$$

és

$$A_S A_S^+ = A_S A'_F = A_F A'_S = A_F A_F^+ = \frac{1}{4} J.$$

(Megjegyezzük, hogy az A^+ mátrixok negyedéveket egész évre *aggregáló mátrix*oknak tekinthetők).

d) $A_S A_S^+ = A_F A_F^+ = \frac{1}{4} J$ idempotens mátrix, hiszen $(A_S A_S^+)(A_S A_S^+) =$ $= A_S(A_S^+ A_S) A_S^+ = A_S I A_S^+ = A_S A_S^+$.

Az így definiált A mátrixok segítségével most már meghatározható egy tetszőleges z éves változóhoz tartozó dezaggregált, vagy fiktív negyedéves vektor:

$$\tilde{z}_S = A_S z_S^{(A)}, \quad \text{illetve} \quad \tilde{z}_F = A_F z_F^{(A)},$$

valamint a negyedéves ingadozások vektora

$$\Delta z = z^{(Q)} - \tilde{z},$$

ahol a z vektorok lehetnek akár S- akár F-típusú változók.

Érdemes megemlíteni, hogy ez a dezaggregációs módszer voltaképpen igen egyszerű és szemléletes, hiszen például folyam típusú változók esetén annyit jelent, hogy az éves értéket a négy negyedévre *egyenlően* szétosztjuk, míg a negyedéves ingadozások vektora az ezektől való tényleges eltérést, azaz az éven belüli *szezonális hatást* reprezentálja.

Az aggregáció kérdését áttekintő rész befejezéseképpen bebizonyítunk egy egyszerű tételt, melynek a továbbiak során fontos szerepe lesz.

1. *Tétel:* A fiktív negyedéves változók vektora (z) és a negyedéves ingadozások vektora (Δz) (ahol z lehet S- és F-típusú egyaránt) egymásra ortogonálisak.

Bizonyítás:

$$z^{(A)} = A^{+} z^{(Q)},$$
$$\tilde{z} = A z^{(A)} = A A^{+} z^{(Q)},$$
$$\Delta z = z^{(Q)} - \tilde{z} = z^{(Q)} - A A^{+} z^{(Q)}$$

és

$$\tilde{z}' \Delta z = (A A^{+} z^{(Q)})' (z^{(Q)} - A A^{+} z^{(Q)}) = z^{(Q)'} (A^{+'} A') z^{(Q)} - z^{(Q)'} (A^{+'} A') (A A^{+}) z^{(Q)} = 0$$

mivel $A^{+'} A' = (A A^{+})' = A A^{+}$, hiszen J szimmetrikus.

Megjegyezzük, hogy ez az eljárás az AA^{+} mátrix idempotenciáját használja ki, az pedig független a változó típusától.

2.2. *A fiktív modell statisztikai jellemzői*

Minthogy vizsgálatainkat az egy egyenletes modellre végezzük, induljunk ki a (1)-ben már felírt éves modellből és tekintsük annak statisztikai jellemzőit.

$$y = X\beta + u, \qquad (3)$$
$$E(u) = 0; \ E(uu') = \sigma^2 I.$$

A maradékváltozót tehát 0 várható érték és nem szinguláris skalár kovarianciamátrix jellemzi.

Az OLS módszerrel kapott paraméterbecslés a következő:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X' y,$$

és ennek kovariancia-mátrixa:

$$V = E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] = \sigma_A^2 (X'X)^{-1}$$

σ_A^2-ra pedig a $\hat{\sigma}_A^2 = \dfrac{\hat{u}'\hat{u}}{T - K}$ ad torzítatlan becslést.

A változók 2.1.-ben említett két alaptípusa szerint az éves modell két általános esete írható fel:

a) S-típusú endogén változó esetén

$$y_S = X_S \beta_S + X_F \beta_F + u_S;$$

b) F-típusú endogén változó esetén

$$y_F = X_S \beta_S + X_F \beta_F + u_F.$$

Megjegyezzük, hogy a maradékváltozó (u) típusa értelemszerűen mindig megegyezik az endogén változó típusával.

A továbbiakban az a) esetet vizsgáljuk, a fejezetvégi összefoglalóban azonban megadjuk a b) esetre vonatkozó jellemzőket is, amelyek levezetése az a)-hoz teljesen hasonlóan elvégezhető.

Írjuk fel az a) esetnek megfelelő fiktív negyedéves modellt!

$$\tilde{y}_S = X_S \tilde{\beta}_S + X_F \tilde{\beta}_F + u_S,$$

azaz

$$A_S y_S = A_S \tilde{X}_S \tilde{\beta}_S + A_F \tilde{X}_F \tilde{\beta}_F + A_S u_S .$$

A maradékváltozó várható értéke:

$$E(\tilde{u}_S) = E(A_S u_S) = A_S E(u_S) = 0 ,$$

kovariancia-mátrixa pedig

$$E(\tilde{u}_S \tilde{u}'_S) = E(A_S u_S u'_S A'_S) = A_S E(u_S u'_S) A'_S = \sigma_S^2 (A_S A'_S) = \sigma_S^2 J$$

és mivel J ($4T \times 4T$ méretű) *szinguláris* mátrix, ezért sem az OLS, sem a GLS (általánosított legkisebb négyzetek) módszere nem alkalmas BLU (legjobb lineáris, torzítatlan) tulajdonságú becslésre. Ekkor az *általánosított Aitken tétel* alapján (lásd [9]) juthatunk torzítatlan és minimális szórású becsléshez. Eszerint tekintsük a J ($4T \times 4T$) méretű kovariancia-mátrixot, melynek rangja T, ezért a nulla $3T$-szeres sajátértéke, és a további T számú sajátértéke pozitív. Legyenek ez utóbbiak $\lambda_1^2, \lambda_2^2 \dots \lambda_T^2$.

Igaz továbbá, hogy $JF = F\Lambda^2$ és $JG = 0$,

ahol F ($4T \times T$) méretű mátrix, a pozitív sajátértékhez tartozó sajátvektorok oszlopaiból áll;

Λ^2 ($T \times T$) méretű diagonális mátrix, melynek diagonálelemei a pozitív sajátértékek,

G pedig ($4T \times 3T$) méretű mátrix, amely a 0 sajátértékekhez tartozó sajátvektorokból áll.

Fennállnak az alábbi összefüggések:

$$F'F = I, \quad G'G = I, \quad F'G = 0, \quad FF' + GG' = I .$$

Belátható továbbá, hogy J mátrix nullától különböző sajtértékei mind 4-gyel egyenlők, F pedig az alábbi:

$$F = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \frac{1}{2} A_S .$$

Ekkor J felírható $F\Lambda^2 F'$ alakban és $J^+ = F\Lambda^{-2} F'$.

Bizonyítható (lásd [9]), hogy a változók $\Lambda^{-1}F' = \frac{1}{4}A'_S = A_S^+$ mátrixszal való transzformációja után kapott új változókra már az OLS módszer alkalmazható, hiszen

$$\Lambda^{-1}F'\tilde{y}_S = \Lambda^{-1}F'\tilde{X}_S\tilde{\beta}_S + \Lambda^{-1}F'\tilde{X}_F\tilde{\beta}_F + \Lambda^{-1}F'\tilde{u},$$

azaz
$$A_S^+\tilde{y}_S = A_S^+\tilde{X}_S\tilde{\beta}_S + A_S^+\tilde{X}_F\tilde{\beta}_F + A_S^+\tilde{u}_S. \tag{4}$$

A (4)-ben felírt transzformált modellre már az

$$E(A_S^+\tilde{u}\tilde{u}'A^{+\prime}) = E(A_S^+A_Suu'A'_SA_S^{+\prime}) = \sigma_S^2 I$$

kovariancia-mátrix jellemző, és az OLS módszer alkalmazása ekkor már torzítatlan és minimális szórású becsléshez vezet.

Mivel $A_S^+A_S = I$ és $A_S^+A_F = A_FA_F = \frac{1}{4}I$, a (4) egyenlet az alábbi formában is felírható:

$$y_S = X_S\tilde{\beta}_S + \frac{1}{4}X_F\tilde{\beta}_F + u_S.$$

Figyelembe véve, hogy a változók S- és F-típus szerinti csoportosítása esetén

$$(X'X) = \begin{bmatrix} X'_SX_S & X'_SX_F \\ X'_FX_S & X'_FF_F \end{bmatrix},$$

az éves modell (3) paraméterbecslése OLS módszerrel a következő:

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_S \\ \hat{\beta}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_SX_S & X'_SX_F \\ X'_FX_S & X'_FX_F \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} X'_S \\ X'_F \end{bmatrix} y_S.$$

A fiktív negyedéves modell paraméterei pedig (ugyancsak OLS becsléssel)

$$\begin{bmatrix} \hat{\tilde{\beta}}_S \\ \hat{\tilde{\beta}}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_SX_S & \frac{1}{4}X'_SX_F \\ \frac{1}{4}X'_SX_S & \frac{1}{16}X'_FX_F \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} X'_S \\ X'_F \end{bmatrix} y_S$$

formában kaphatók.

A fenti paraméterbecslési formulákat a particionált inverz segítségével részletesen felírva végeredményként azt kapjuk, hogy

$$\hat{\beta}_S = \widetilde{\hat{\beta}_S} \quad \text{és} \quad \hat{\beta}_F = \frac{1}{4}\hat{\tilde{\beta}}_F.$$

Hasonlóan látható be, hogy F-típusú endogén változó esetén

$$\hat{\beta}_S = 4\hat{\tilde{\beta}}_S \quad \text{és} \quad \hat{\beta}_F = \hat{\tilde{\beta}}_F.$$

A paraméterek kovariancia-mátrixa az éves modell esetén:

$$V_S = \sigma_S^2\begin{bmatrix} X'_SX_S & X'_SX_F \\ X'_FX_S & X'_FX_F \end{bmatrix}^{-1} = \tilde{\sigma}_S^2\begin{bmatrix} V_{SS} & V_{SF} \\ V_{FS} & V_{FF} \end{bmatrix},$$

a fiktív negyedéves modellre pedig:

$$\tilde{V}_S = \sigma_S^2 \begin{bmatrix} \tilde{X}_S' \tilde{X}_S & \tilde{X}_S' \tilde{X}_F \\ \tilde{X}_F' \tilde{X}_S & X_F' X_F \end{bmatrix}^{-1} = \tilde{\sigma}_S^2 \begin{bmatrix} \tilde{V}_{SS} & \tilde{V}_{SF} \\ \tilde{V}_{FS} & \tilde{V}_{FF} \end{bmatrix}.$$

Ismét alkalmazva az A_S^+-el végzett transzformációt, az

$$A_S^+ \tilde{X}_S = A_S^+ A_S X_S = X_S,$$

$$A_S^+ \tilde{X}_F = A_S^+ A_F X_F = \frac{1}{4} X_F$$

egyenlőségeket, valamint a particionált inverzet felhasználva, a következő összefüggésekhez jutunk:

$$\tilde{V}_{SS} = V_{SS},$$

$$\tilde{V}_{SF} = 4V_{SF},$$

$$\tilde{V}_{FS} = 4V_{FS},$$

$$\tilde{V}_{FF} = 16V_{FF}.$$

Hasonlóan belátható F-típusú endogén változó esetére, hogy

$$\tilde{V}_{SS} = \frac{1}{16} V_{SS},$$

$$\tilde{V}_{SF} = \frac{1}{4} V_{SF},$$

$$\tilde{V}_{FS} = \frac{1}{4} V_{FS},$$

$$\tilde{V}_{FF} = V_{FF}.$$

Meghatározandó még σ_S^2 becslése, melyet a következő összefüggések alapján adhatunk meg:

$$E(\tilde{u}_S^{\wedge\prime} J^+ \tilde{u}_S^{\wedge}) = E(\tilde{u}_S^{\wedge\prime} A_S^{+\prime} A_S^+ \tilde{u}_S^{\wedge}) = E(\hat{u}_S' \hat{u}_S) = \sigma_S^2(T-K),$$

így

$$\tilde{\sigma}_S^{\wedge 2} = \frac{\tilde{u}_S^{\wedge\prime} J^+ \tilde{u}_S^{\wedge}}{T-K} = \frac{\hat{u}_S' \hat{u}_S}{T-K} = \hat{\sigma}_S^2,$$

és hasonlóan

$$E(\tilde{u}_F^{\wedge\prime} J \tilde{u}_F^{\wedge}) = E(\tilde{u}_F^{\wedge\prime} A_F^{+\prime} A_F^+ \tilde{u}_F^{\wedge}) = E(\hat{u}_F' \hat{u}_F) = \sigma_F^2(T-K),$$

ezért

$$\tilde{\sigma}_F^{\wedge 2} = \frac{\tilde{u}_F^{\wedge\prime} J \tilde{u}_F^{\wedge}}{T-K} = \frac{\hat{u}_F' \hat{u}_F}{T-K} = \hat{\sigma}_F^2.$$

Végezetül *összefoglaljuk* a fiktív negyedéves modellre kapott jellemzőket:

a) A becsült paraméterek mátrixában összefoglaltuk, hogy a fiktív modell paraméterei hogyan származtathatók az éves becslésekből.

	X_S	X_F
y_S	$\tilde{\beta}_S^{\wedge} = \hat{\beta}_S$	$\tilde{\beta}_F^{\wedge} = 4\hat{\beta}_F$
y_F	$\tilde{\beta}_S^{\wedge} = \frac{1}{4}\hat{\beta}_S$	$\tilde{\beta}_F^{\wedge} = \hat{\beta}_F$

b) A reziduumok szórásnégyzetének becslései:

$$\tilde{\sigma}_S^{\wedge 2} = \hat{\sigma}_S^2 \text{ és } \tilde{\sigma}_F^{\wedge 2} = \bar{\sigma}_F^2 .$$

c) A paraméterek kovariancia-mátrixának becslése, ha y S-típusú;

$$\tilde{V}^{\wedge} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{V}_{SS} & 4\hat{V}_{SF} \\ \hline 4\hat{V}_{FS} & 16\hat{V}_{FF} \end{array}\right], \tag{5}$$

ha pedig y F-típusú:

$$\tilde{V}^{\wedge} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{16}\hat{V}_{SS} & \frac{1}{4}\hat{V}_{SF} \\ \hline \frac{1}{4}\hat{V}_{FS} & \hat{V}_{FF} \end{array}\right]. \tag{6}$$

A fenti eredmények tehát azt mutatják, hogy a fiktív negyedéves modell jellemzői igen egyszerűen, *mechanikusan származtathatók az éves modell megfelelő jellemzőiből.* Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy a paraméterek relatív szórása a fiktív negyedéves modellben nem változik, az egyenlet relatív hibája viszont megnövekedhet, ami teljes mértékben érthető. Ugyanakkor utalunk rá, hogy a véletlen változó szórásnégyzetének becslésekor a klasszikus képlet (amelynek alkalmazása esetén az egyenlet relatív hibája maradna változatlan) már egyszerű GLS esetén is a szórás torzított becsléséhez vezet (vö. [3]).

3. A tényleges negyedéves modell becslése

A tényleges negyedéves modell, mint már megmutattuk, a fiktív negyedéves modell és a negyedéves eltérések modelljének összegeként állítható elő.

A továbbiakban eltekintünk a változóknak a 2. részben alkalmazott S és F-típus szerinti felosztásától, hiszen ennek a megkülönböztetésnek csupán a fiktív modell szempontjából volt jelentősége.

A jelölések egyszerűsítése végett a (2) formában felírt tényleges negyedéves modell változóira és paramétereire új jelöléseket vezetünk be.

Legyen: $y^{(Q)} = y$, $\tilde{X} = X_1$, $[\Delta X_1 \, \Delta Z \, R] = X_2$, $\tilde{\beta} = \beta_1$,

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \\ \alpha \end{bmatrix} = \beta_2 \text{ és } u^{(Q)} = v.$$

Ekkor a tényleges negyedéves modell az alábbi lesz:

$$y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + v. \tag{7}$$

Ennél a felírásnál tehát X_1 a magyarázó változók fiktív negyedéves értékeit, X_2 pedig azok negyedéves ingadozásait, illetve a specifikus negyedéves változókat jelöli. Fontosnak tartjuk felhívni a figyelmet arra, hogy mivel tényleges negyedéves adatok csak rövid idősorokba állnak rendelkezésünkre, ez esetben a fiktív negyedéves adatok is csak rövid megfigyelési időszakra vonatkoznak. A javasolt eljárás lényege éppen abban áll, hogy felhasználva a hosszabb idősorok által nyújtott többletinformációt a β_1 paraméterekre torzítatlan becslések származtathatók az éves modellből. Ezekről tudjuk, hogy

$$\beta_1 - \hat{\beta}_1 = w_1, \quad E(w_1) = 0 \quad \text{és} \quad E(w_1 w_1') = \tilde{V}_1,$$

ahol $\tilde{V}_1$ az (5), ill. (6) alatt megadott kovariancia-mátrixok közül az endogén változó típusának megfelelő.

Igaz továbbá az is, hogy $E(v) = 0$, $E(vv') = \sigma^2 I$ és $E(vw_1) = 0$.

3.1. *A negyedéves modell becslése RLS (korlátozott legkisebb négyzetek) módszerével*

Figyelembe véve, hogy a $\hat{\beta}_1$ fiktív negyedéves paraméterbecslések mintegy külső adottságként rendelkezésünkre állnak, a (7) alatt megadott modell átírható a következő formára:

$$y - X_1\hat{\beta}_1 = X_2\beta_2 + (v - X_1 w_1). \tag{8}$$

A (8)-as módosított feladat $\hat{\beta}_2$ paraméterbecslései előállíthatók OLS módszerrel.

$$\hat{\beta}_2 = (X_2' X_2)^{-1} X_2'(y - X_1\hat{\beta}_1). \tag{9}$$

Az így kapott becslés torzítatlan, ugyanis

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_2 &= (X_2' X_2)^{-1} X_2'(X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + v - X_1\hat{\beta}_1) = \\ &= \beta_2 + (X_2' X_2)^{-1} X_2' v - (X_2' X_2)^{-1} X_2' X_1 w_1, \end{aligned}$$

és mivel $E(v) = 0$ és $E(w_1) = 0$, azt kapjuk, hogy $E(\hat{\beta}_2) = \beta_2$.

A korlátozott becslés paramétereinek kovariancia-mátrixa a következő:

$$V_R = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{V}_1 & V_{12R} \\ \hline V_{21R} & V_{2R} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{V}_1 & -\tilde{V}_1 P' \\ \hline -P\tilde{V}_1 & \sigma^2(X_2' X_2)^{-1} + P\tilde{V}_1 P' \end{array}\right], \tag{10}$$

mivel $V_{2R} = E[(\hat{\beta}_2 - \beta_2)(\hat{\beta}_2 - \beta_2)'] = (X_2'X_2)^{-1}X_2'[E(vv' + X_1w_1w'X_1' - X_1w_1v' - vw_1'X_1]X_2(X_2'X_2)^{-1} = \sigma^2(X_2'X_2)^{-1} + P\tilde{V}_1P'$,

továbbá $V_{12R} = V_{21R}' = E[(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_2 - \beta_2)'] = E[(\hat{\beta}_2 - \beta_2)(\hat{\beta}_1 - \beta_1)']' = E[w_1(v - X_1w_1)'X_2(X_2'X_2)^{-1}] = -\tilde{V}_1X_1'X_2(X_2'X_2)^{-1} = -\tilde{V}_1P'$,

ahol $P = (X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1$,

Látható, hogy amennyiben X_2 csak az X_1-hez tartozó negyedéves ingadozások vektorait tartalmazza, az 1. tétel értelmében P 0-mátrix lesz, és ez lényegesen leegyszerűsíti a további tárgyalást. Mivel a gyakorlatban ez csak ritkán fordul elő, speciális esetként kezeljük és részletesen nem foglalkozunk vele. Annyi azonban előre is megállapítható, hogy ekkor a különféle becslési módszerek — legalábbis a negyedéves paraméterek hibáját tekintve — egyenértékűek lesznek.

A továbiakban megvizsgáljuk, hogy a (9) korlátozott eljárás, melynél $\hat{\beta}_1$-t külső adottságként kezeltük, mikor ad hatásosabb becslést a (7) feladat, rövid idősorokon alapuló, OLS módszerrel történő megoldásánál. Ezért felírjuk az OLS módszerrel kapott becslések kovariancia-mátrixát.

$$V = \left[\begin{array}{c|c} V_{1OLS} & V_{12OLS} \\ \hline V_{21OLS} & V_{2OLS} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} V_{1OLS} & -V_{1OLS}P' \\ \hline -PV_{1OLS} & \sigma^2(X_2'X_2)^{-1} + PV_{1OLS}P' \end{array}\right], \tag{11}$$

ahol $V_{1OLS} = \sigma^2(X_1'MX_1)^{-1}$

$$M = I - X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2',$$
$$P = (X_2'X_2)^{-1}X_2'X_1.$$

Megjegyezzük, hogy V_{OLS} felírásánál felhasználtuk a particionált inverz meghatározásának összefüggéseit az

$$(X'X) = \begin{bmatrix} X_1'X_1 & X_1'X_2 \\ X_2'X_1 & X_2'X_2 \end{bmatrix} \quad \text{mátrixra.}$$

A két becslés hatásosságának összehasonlítására képezzük a (10) és (11) kovariancia-mátrixok $\hat{\beta}_1$ és $\hat{\beta}_2$ együtthatókhoz tartozó blokkjainak különbségét.

$\hat{\beta}_1$-hez ez a különbség $\tilde{V}_1 - V_{1OLS}$,

$\hat{\beta}_2$-höz pedig $P(\tilde{V}_1 - V_{1OLS})P'$ lesz.

Mivel belátható, hogy a P és P' mátrixszal balról vagy jobbról történő szorzás a különbségmátrix pozitív, illetve negatív definitségén nem változtat, az RLS módszerrel kapott becslés akkor tekinthető jobbnak az OLS becslésnél, ha $\Delta V = \tilde{V}_1 - V_{1OLS}$ legalább negatív szemidefinit. A $\tilde{V}_1 - V_{1OLS}$ különbségről valójában semmi bizonyost nem tudunk állítani, mert ezek a mátrixok a viszonylag részletes elemzés ellenére sem összehasonlíthatók. Annyit mondhatunk, hogy a korlátozott módszert akkor látszik célszerűnek alkalmazni, ha a fiktív negyedéves paraméterbecslések szórása relative kicsi, azaz a külsőként tekintett többletinformáció a fiktív negyedéves paraméterek szórását számottevően csökkenti.

A paraméterek kovariancia-mátrixának ismeretében meghatározhatjuk az előrejelzés kovariancia-mátrixát (és így természetesen hibáját is). Ezt annál is inkább meg kell tenni, mivel modellünk elsődleges célja előrejelzések készítése, így az előrebecslés megbízhatósága a modell „jóságának" egyik fő kritériuma. Ez a kovariancia-mátrix az alábbi módon írható fel:

$$\begin{aligned} &E\{[X_{2*}\hat{\beta}_2-(y_*-X_{1*}\hat{\beta}_1)][X_{2*}\hat{\beta}_2-(y_*-X_{1*}\hat{\beta}_1)]'\}= \\ &=E\{[X_{2*}(\hat{\beta}_2-\beta_2)+X_{1*}(\hat{\beta}_1-\beta_1)-v_*][X_{2*}(\hat{\beta}_2-\beta_2)+X_{1*}(\hat{\beta}_1-\beta_1)-v_*]'\}= \\ &=X_{2*}[\sigma^2(X_2'X_2)^{-1}+P\tilde{V}_1P']X_{2*}'-X_{1*}\tilde{V}_1P'X_{2*}'-X_{2*}P\tilde{V}_1X_{1*}'+ \\ &+X_{1*}\tilde{V}_1X_{1*}'+\sigma^2I, \end{aligned} \tag{12}$$

ahol X_{1*} és X_{2*}-gal a magyarázó változóknak az előrejelzési időszakra vonatkozó értékeit jelöltük és felhasználtuk az előrejelzés véletlen hibáira vonatkozó szokásos feltételezéseket (v.ö.: [9], 123. oldal).

A (12) formulával kapcsolatban meg kell jegyeznünk, hogy amennyiben a P mátrix 0 mátrix (azaz X_1 és X_2 ortogonálisak), akkor a jobb oldal $\sigma^2X_{2*}(X_2'X_2)^{-1}X_{2*}+X_{1*}\tilde{V}_1X_{1*}'+\sigma^2I$ alakra egyszerűsödik, amelynek értelmezése nyilvánvaló: az előrejelzés hibája a fiktív negyedéves modell és a negyedéves eltérések modellje paraméterhibáinak, valamint reziduum hibájának összegeként állt elő. A (12) formula ettől három tagban tér el:

— az $X_{2*}P\tilde{V}_1P'X_{2*}'$ a becslés korlátozottságából adódó additív hibatagnak,
— az $X_{1*}\tilde{V}_1P'X_{2*}'$ és az $X_{2*}P\tilde{V}_1X_{1*}'$ az X_1 és X_2 változók egymásra hatásából adódó additív hibatagnak tekinthető.

3.2. *A tényleges negyedéves modell becslése GLS (általánosított legkisebb négyzetek) módszerrel*

A (7)-ben felírt típusú modellek becslésére Durbin (lásd [9]) javasolt a 4.1-ben bemutatott RLS módszertől eltérő és némiképp bonyolultabb eljárását.

Megtartva a 4. fejezetben bevezetett jelöléseket, a feladatot kissé megváltoztatva írjuk fel és a $\hat{\beta}_1$ fiktív negyedéves paramétereket mint a β_1 paraméter megfigyeléseit vesszük figyelembe:

$$\begin{bmatrix} y \\ \hline \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline I & 0 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \hline \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ \hline w_1 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

A véletlen változóra feltételezzük, hogy

$$E(vv')=\sigma^2I,\ E(w_1w_1')=\tilde{V}_1 \text{ és } E(vw_1')=0.$$

A (13)-ban felírt modell reziduumainak kovariancia-mátrixa tehát

$$\left[\begin{array}{c|c} \sigma^2 I & 0 \\ \hline 0 & \tilde{V}_1 \end{array}\right]$$

alakban adható meg. Ekkor a β_1, β_2 paraméterek BLU (legjobb, lineáris, torzítatlan) tulajdonságú becslése az Aitken tétel szerint (vö. [9]) GLS módszerrel határozható meg.

Az így kapott becslés:

$$\hat{\beta}_{\mathrm{GLS}} = \left[\begin{array}{c} \hat{\beta}_{1\mathrm{GLS}} \\ \hline \hat{\beta}_{2\mathrm{GLS}} \end{array}\right] = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline I & 0 \end{array}\right]' \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{\sigma^2} I & 0 \\ \hline 0 & \tilde{V}_1^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline I & 0 \end{array}\right] \right\}^{-1} \cdot$$

$$\cdot \left[\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline I & 0 \end{array}\right]' \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{\sigma^2} I & 0 \\ \hline 0 & \tilde{V}_1^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} y \\ \hline \hat{\beta}_1 \end{array}\right] = \tag{14}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{\sigma^2} X_1' X_1 + \tilde{V}_1^{-1} & \frac{1}{\sigma^2} X_1' X_2 \\ \hline \frac{1}{\sigma^2} X_2' X_1 & \frac{1}{\sigma^2} X_2' X_2 \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \frac{1}{\sigma^2} X_1' y + \tilde{V}_1^{-1} \hat{\beta}_1 \\ \hline \frac{1}{\sigma^2} X_2' y \end{array}\right].$$

Belátható, hogy ez a becslés torzítatlan, és a paraméterek kovariancia-mátrixa a következő:

$$V_{\mathrm{GLS}} = \left[\begin{array}{c|c} V_{1\mathrm{GLS}} & V_{12\mathrm{GLS}} \\ \hline V_{21\mathrm{GLS}} & V_{2\mathrm{GLS}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{\sigma^2} X_1' X_1 + \tilde{V}_1^{-1} & \frac{1}{\sigma^2} X_1' X_2 \\ \hline \frac{1}{\sigma^2} X_2' X_1 & \frac{1}{\sigma^2} X_2' X_2 \end{array}\right]^{-1} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} (\tilde{V}_1^{-1} + V_{1\mathrm{OLS}}^{-1})^{-1} & -[P(\tilde{V}_2^{-1} + V_{1\mathrm{OLS}}^{-1})^{-1}]' \\ \hline -P(\tilde{V}_1^{-1} + V_{1\mathrm{OLS}}^{-1})^{-1} & \sigma^2 (X_2' X_2)^{-1} + P(\tilde{V}_1^{-1} + V_{1\mathrm{OLS}}^{-1}) P' \end{array}\right],$$

ahol az egyes hipermátrixokat a particionált inverz felhasználásával nyertük.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a GLS módszerrel kapott becslés a paraméterek kisebb hibájához vezet, mint az előző részben bemutatott RLS eljárás, azaz ilyen értelemben hatásosabb annál. Képezzük az RLS módszerrel kapott becsléshez tartozó kovariancia-mátrix és a GLS becslés kovariancia-mátrixának β_1 és β_2 paraméterekhez tartozó hipermátrixainak különbségét!

$$\tilde{V}_1 - V_{1\mathrm{GLS}} = \tilde{V}_1 - (\tilde{V}_1^{-1} + V_{1\mathrm{OLS}}^{-1})^{-1},$$

$$V_{2R} - V_{2\mathrm{GLS}} = P[\tilde{V}_1 - (\tilde{V}_1^{-1} + V_{1\mathrm{OLS}}^{-1})^{-1}] P'.$$

Ebből látható, hogy a GLS módszer akkor ad ilyen értelemben hatásosabb becslést, ha a $[\tilde{V}_1 - (\tilde{V}_1^{-1} + V_{1OLS}^{-1})^{-1}]$ különbségmátrix pozitív definit.
Ennek bizonyításához egy lemmára van szükségünk.

1. *Lemma:*[2] Ha A, B és $(A-B)$ szimmetrikus, pozitív definit mátrixok, akkor $x'A^{-1}x < x'B^{-1}x$ a tér bármely 0-tól különböző x vektorára.

Bizonyítás: $(A-B)$ pozitív definitsége miatt $x'Ax > x'Bx$ áll fenn minden 0-tól különböző x-re. Írjuk fel az A mátrixot $A^{1/2} \cdot A^{1/2}$ alakban! Ismeretes, egy szimmetrikus, pozitív definit A mátrixhoz van olyan, ugyancsak pozitív definit, szimmetrikus C mátrix, amelyre $C^2 = A$; ezt a C matrixot A pozitív négyzetgyökének nevezzük, és $A^{1/2}$-del jelöljük [8].
Ekkor $x'Ax = x'A^{1/2}A^{1/2}x = y'y$ írható és a kiinduló feltétel értelmében

$$y'y = y'Iy > x'A^{1/2}A^{-1/2}BA^{-1/2}A^{1/2}x = y'A^{-1/2}BA^{-1/2}y;$$

itt y a tér tetszőleges vektora lehet, ugyanis $A^{1/2}$ regularitása miatt a tér bármely vektora előállítható $A^{1/2}x$ alakban.
Az egyenlőtlenségből következik, hogy a jobb oldalon álló kifejezés mátrixának minden sajátértéke 1-nél kisebb, így a megfelelő $A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$ inverzmátrix minden sajátértéke 1-nél nagyobb, azaz bármely z-re:

$$z'A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}z > z'Iz = z'z = z'A^{1/2}A^{-1}A^{1/2}z.$$

Bevezetve az $u = A^{1/2}z$ jelölést $u'B^{-1}u > u'A^{-1}u$. Hasonlóan az előző esethez itt is belátható, hogy u a tér tetszőleges vektora lehet, így a lemma bizonyítása teljes.
Ennek felhasználásával már egyszerűen bizonyítható az alábbi fontos tétel:

2. *Tétel:* A GLS módszerrel a (13) feladat paramétereire adott becslés mindig hatásosabb, mint a (8) feladat paramétereinek RLS becslése, ugyanis a $\tilde{V}_1 - (\tilde{V}_1^{-1} + V_{1OLS}^{-1})^{-1}$ különbségmátrix pozitív definit.

Bizonyítás: Mivel $\tilde{V}_1$ és $(\tilde{V}_1^{-1} + V_{1OLS}^{-1})^{-1}$ nem szinguláris kovariancia-mátrixok, tehát pozitív definitek, azaz

$$x'\tilde{V}_1x > 0 \text{ és } x'(\tilde{V}_1^{-1} + V_{1OLS}^{-1})^{-1}x > 0.$$

Kiinduló feltételünk az volt, hogy

$$x'[\tilde{V}_1 - (\tilde{V}_1^{-1} + V_{1OLS}^{-1})^{-1}]x > 0 \text{ bármely } x \neq 0\text{-ra}.$$

Ebből $x'\tilde{V}_1x > x'(\tilde{V}_1^{-1} + V_{1OLS}^{-1})^{-1}x$ adódik, és a lemma értelmében $x'\tilde{V}_1^{-1}x < < x'\tilde{V}_1^{-1}x + x'V_{1OLS}^{-1}x$, azaz $x'V_{1OLS}^{-1}x > 0$ kapható.

Mivel V_{1OLS} pozitív definitmátrix, inverze is az, így a bizonyítás teljes.
A paraméterek kovariancia-matrixa segítségével felírható az előrejelzés hibája ennél a becslésnél is; ez formailag nagyon hasonló (12)-höz, így ismételt felírása feleslegesnek tűnik. A két forma egymástól csak a már megismert kovariancia-mátrixokban tér el.

[2] A lemma és annak bizonyítása Mihályffy Lászlótól származik, akinek ezért, valamint a cikk egyéb részeinél nyújtott értékes tanácsaiért köszönetet mondunk.

4. Egy illusztratív példa

Befejezésül megkíséreljük egy számpéldán keresztül szemléletesebbé tenni az olvasó számára az előzőekben ismertetett eljárások lényegét.

Számításainkat a rubelrelációs importforgalomra (IMR) felírt egyenletre végeztük. Magyarázó változóknak a bruttó felhalmozást (BF), a lakossági fogyasztást (FL) és a rubelrelációs exportforgalmat (EXR) választottuk.

Első lépésben 1960–75-ig terjedő idősorok[3] alapján elkészítettük az *éves egyenlet becslését* OLS módszerrel.

$$\mathrm{IMR} = \underset{(0{,}2027)}{0{,}5037}\ \mathrm{BF} - \underset{(0{,}2957)}{0{,}4870}\ \mathrm{FL} + \underset{(0{,}4486)}{1{,}2530}\ \mathrm{EXR} + 27{,}658$$

$$R^2 = 0{,}96712;\ \mathrm{DW} = 1{,}7171;\ \varrho = 0{,}1415.$$

A paraméterek kovariancia-mátrixa a következő:

$$V = 25{,}06 \begin{bmatrix} 0{,}001640 & -0{,}001917 & 0{,}001598 & 0{,}110515 \\ -0{,}001917 & 0{,}003488 & -0{,}004686 & -0{,}212280 \\ 0{,}001598 & -0{,}004686 & 0{,}008032 & 0{,}289719 \\ 0{,}110515 & -0{,}212280 & 0{,}28719 & 13{,}325484 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Meg kell jegyeznünk, hogy közgazdasági szempontból a becsült paraméterek nem tekinthetők minden vonatkozásban kifogástalannak, továbbá figyelembe véve a becslés statisztikai mutatóit, az illeszkedés javítása érdekében esetleg más változatok kipróbálása is indokolt lett volna. Ezektől a problémáktól eltekintettünk, mivel elsődleges célunk az általunk ismertetett eljárások illusztrálása, nem pedig közgazdasági következtetések levonása volt.

Az éves egyenletre kapott becslések alapján elkészíthető az ún. *fiktív modell.* A fiktív modell paramétereinek felírásánál megvizsgáltuk az egyenlet endogén változójának és a magyarázó változóknak a típusát. Esetünkben mind az endogén, mind pedig a magyarázó változók – a konstans tag kivételével – folyam típusúak voltak, ezért a fiktív modell (a 2.2 rész összefoglalójának *a)* pontja alapján) a következő:

$$\widetilde{\mathrm{IMR}} = 0{,}5037\ \widetilde{\mathrm{BF}} - 0{,}4870\ \widetilde{\mathrm{FL}} + 1{,}2530\ \widetilde{\mathrm{EXR}} + 6{,}9115.$$

AZ $\widetilde{\mathrm{IMR}}$, $\widetilde{\mathrm{BF}}$, $\widetilde{\mathrm{FL}}$, $\widetilde{\mathrm{EXR}}$ szimbólumokkal értelemszerűen a megfelelő éves változók átlagos negyedéves értékeit jelöltük. A paraméretek kovarianciamátrixa [(6) alapján] a következőképpen származtatható a (15) alatt közölt éves kovariancia-mátrixból:

$$\tilde{V}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}04109 & -0{,}04804 & 0{,}04005 & 0{,}69238 \\ -0{,}04804 & 0{,}08741 & -0{,}11743 & -1{,}32993 \\ 0{,}04005 & -0{,}11743 & 0{,}20128 & 1{,}81510 \\ 0{,}69238 & -1{,}32993 & 1{,}81510 & 20{,}87104 \end{bmatrix}.$$

[3]A felhasznált adatok megtalálhatók a KSH különböző évekre vonatkozó – népgazdasági mérlegeket tartalmazó – kiadványaiban.

A tényleges negyedéves egyenlet felírásakor feltételeztük, hogy a rubelrelációs importforgalomra és a rubelrelációs exportforgalomra vannak tényleges negyedéves megfigyelések.[4] Hangsúlyozzuk, hogy míg az éves adatok az 1960–75-ös időszakra álltak rendelkezésre, a tényleges negyedéves adatok 1968–75-ös időszakra vonatkoznak, s mivel a negyedéves egyenlet becslésénél az éves egyenletből indulunk ki, az előzőekben említett többletinformáció ily módon érvényesül a tényleges negyedéves egyenlet becslésénél. Így a tényleges negyedéves modell a következőképpen alakult:

$$\mathrm{IMR}^{(Q)} = \beta_{11}\,\widetilde{\mathrm{BF}} + \beta_{12}\,\widetilde{\mathrm{FL}} + \beta_{13}\,\widetilde{\mathrm{EXR}} + \beta_{21}\Delta\mathrm{EXR} + \beta_{22}\,\mathrm{DU} + v,$$

ahol $\mathrm{IMR}^{(Q)}$ és $\mathrm{EXR}^{(Q)}$ a rubelrelációs importforgalom és a rubelrelációs exportforgalom tényleges negyedéves megfigyeléseit jelöli, valamint $\Delta\mathrm{EXR} = \mathrm{EXR}^{(Q)} - \widetilde{\mathrm{EXR}}$.

Bevezettünk továbbá egy gazdaságpolitikai változót (DU) is, amely a rubelrelációs külkereskedelmi forgalomban érvényesülő (az alapvetően bilaterális elszámolási rendszerből fakadó) ,,egyensúlyi'' állapotra való törekvést hivatott érzékeltetni.

A tényleges negyedéves egyenlet becslését először *RLS módszerrel* végeztük el. Emlékeztetőül: az RLS módszer a fiktív egyenlet évesből származtatott paramétereit ,,megtartja.'' Ezek vektoralakban a következők:

$$\hat{\beta}_1 = \beta_{1\mathrm{RLS}} = \begin{bmatrix} 0{,}5037 \\ -0{,}4870 \\ 1{,}2530 \\ 6{,}9115 \end{bmatrix}.$$

A negyedéves ingadozásokat kifejező EXR és DU változók paraméterbecslése pedig a következő formula alapján állítható elő:

$$\beta_{2\mathrm{RLS}} = (X_2' X_2)^{-1} X_2'(y - X_1\hat{\beta}_1),$$

ami számpéldánkban az alábbi becslést adja

$$\beta_{2\mathrm{RLS}} = \begin{bmatrix} 0{,}8021 \\ -3{,}4016 \end{bmatrix} \begin{matrix} (0{,}11597) \\ (1{,}3198)\,. \end{matrix}$$

(A becsült paraméterek mellett zárójelben feltüntettük a paraméterek hibáját.)

A negyedéves ingadozásokat és azok becsült értékeit az 1. ábra szemlélteti.

A fentiek szerint tehát a tényleges negyedéves modell RLS módszerrel történő becslése a következő:

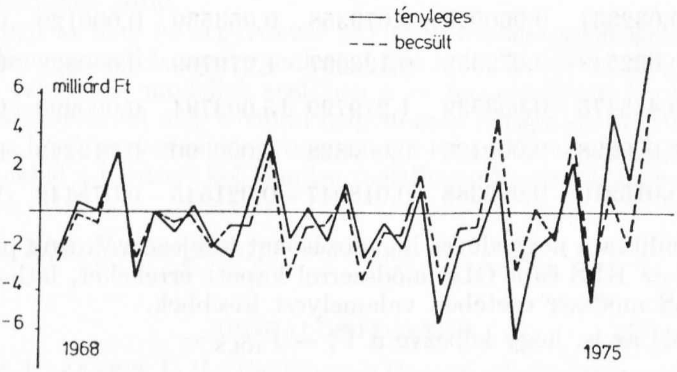
$$\mathrm{IMR}^{(Q)} = 0{,}5037\,\widetilde{\mathrm{BF}} - 0{,}487\,\widetilde{\mathrm{FL}} + 1{,}2530\,\widetilde{\mathrm{EXR}} + 0{,}8021\,\Delta\mathrm{EXR} - 3{,}4016\,\mathrm{DU} + 6{,}9115.$$

[4]A tényleges negyedéves adatokat a Statisztikai Havi Közlemények című KSH kiadványsorozat alapján állítottuk össze.

A reziduumok szórásnégyzete és a paraméterek kovariancia-mátrixa [(10) alapján] az alábbi:

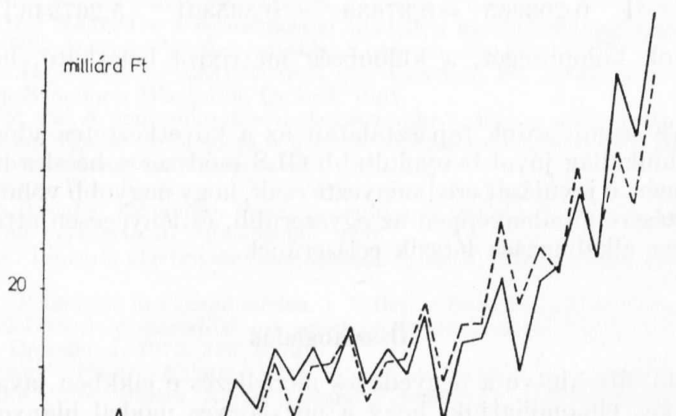
$$\tilde{V}_{\mathrm{RLS}} = \begin{bmatrix} 0{,}04109 & -0{,}04804 & 0{,}04005 & 0{,}69238 & -0{,}00154 & 0{,}03351 \\ -0{,}04804 & 0{,}08741 & -0{,}11743 & -1{,}32993 & -0{,}00008 & 0{,}00189 \\ 0{,}04005 & -0{,}11743 & 0{,}20128 & 1{,}81510 & 0{,}00246 & -0{,}05379 \\ 0{,}69238 & -1{,}32993 & 1{,}81510 & 20{,}87104 & 0{,}00586 & -0{,}12735 \\ -0{,}00154 & -0{,}00008 & 0{,}00246 & 0{,}00576 & 0{,}01349 & -0{,}07988 \\ 0{,}03351 & 0{,}00198 & -0{,}05379 & -0{,}12735 & -0{,}07988 & 1{,}74209 \end{bmatrix}$$

$\hat{\sigma}^2_{\mathrm{RLS}} = 3{,}4773.$



1. ábra

A teljes negyedéves modell tényleges és közelítő értékeit a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Végül elkészítettük a tényleges negyedéves modell becslését *GLS-módszerrel* is. Ez a módszer külső adottságként figyelembe veszi a fiktív modell becsült paramétereit, de (14) alapján ezekre is új becslést készít. Számpéldánkban a GLS módszerrel a tényleges negyedéves egyenlet becslése a következő:

$$\underset{}{\mathrm{IMR}^{(Q)}} = \underset{(0{,}1545)}{0{,}5451}\ \widetilde{\mathrm{BF}} - \underset{(0{,}2450)}{0{,}8031}\ \widetilde{\mathrm{FL}} + \underset{(0{,}3503)}{1{,}8697}\ \mathrm{EXR} + \underset{(0{,}1150)}{0{,}8155}\ \Delta\mathrm{EXR} -$$

$$- \underset{(1{,}2824)}{3{,}6738}\ \mathrm{DU} + 12{,}0225.$$

A paraméterek kovariancia-mátrixa pedig az alábbi

$$\hat{V}_{\mathrm{GLS}} = \begin{bmatrix} 0{,}023883 & -0{,}032367 & 0{,}032548 & 0{,}488475 & 0{,}000698 & -0{,}015210 \\ -0{,}032367 & 0{,}060029 & -0{,}079358 & 0{,}953539 & -0{,}000120 & 0{,}002388 \\ 0{,}032548 & -0{,}079358 & 0{,}122697 & 1{,}279799 & -0{,}000828 & 0{,}018047 \\ 0{,}488475 & -0{,}953539 & 1{,}279799 & 15{,}603794 & 0{,}000990 & -0{,}021575 \\ 0{,}000698 & -0{,}000120 & -0{,}000828 & 0{,}000990 & 0{,}013243 & -0{,}075442 \\ -0{,}015210 & 0{,}002388 & 0{,}018047 & -0{,}021545 & -0{,}075442 & 1{,}64444 \end{bmatrix}.$$

Összehasonlítva a negyedéves ingadozásokat kifejező változók paramétereinek hibáját az RLS és a GLS módszerrel kapott értékeket, látható, hogy a hibák a GLS módszer esetében valamelyest kisebbek.

Ezt tükrözi az is, hogy képezve a $\tilde{V}_1^{\wedge} - \hat{V}_{1\mathrm{GLS}} =$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}017207 & -0{,}015673 & 0{,}007502 & 0{,}203905 \\ -0{,}015673 & 0{,}027381 & -0{,}038072 & -0{,}37639 \\ 0{,}007502 & -0{,}038072 & 0{,}078583 & 0{,}535301 \\ 0{,}203905 & -0{,}37639 & 0{,}535301 & 5{,}267246 \end{bmatrix}$$

hipermátrixok különbségét, a különbség mátrixról belátható, hogy pozitív definit.

Összegezve számításaink tapasztalatait az a következtetés adódik, hogy a számítástechnikailag jóval bonyolultabb GLS módszer a becslés hatásosságának oly kis mérvű javulását eredményezte csak, hogy nagyobb volumenű számítások elvégzésére mindenképpen az egyszerűbb, és lényegesen áttekinthetőbb RLS módszer alkalmazása látszik célszerűnek.

Összefoglalás

Befejezésül, áttekintve a negyedéves modellezés e cikkben javasolt egy lehetséges útját, elmondhatjuk, hogy a negyedéves modell hiányos adatbázis esetén is felírható a fiktív negyedéves modell közbeiktatásával. Amennyiben az endogén változók többségére és bizonyos magyarázó változókra is rendelkezünk negyedéves megfigyelésekkel, érdemes megvizsgálni a rövidtávú gazdasági folyamatok alakulását a negyedéves modellel, hiszen ezzel mindenképpen többletinformációhoz jutunk; az éves modellt ugyanis a negyedéves modellhez is elő kell állítani.

A paraméterek becslésére több lehetőség is kínálkozik. Meg kell jegyeznünk azonban, hogy a fiktív negyedéves és a különbség változó ortogonalitása miatt a különböző becslések hatásossága csak akkor tér el egymástól, ha a modellben speciális negyedéves változók vagy gazdaságpolitikai változók is szerepelnek. Megemlítendő, hogy az ilyen változók szerepeltetése a rövidtávú modellekben szinte elkerülhetetlennek tűnik.

A negyedéves modell becslésére javasolt módszerek közül az RLS módszer alkalmazása technikailag egyszerűbb és maga az eljárás is kézenfekvőbb, ugyanakkor a kapott becslés torzítatlan. A GLS módszerrel kapott becslések hatásosság szempontjából jobbak, de viszonylagos bonyolultságuk miatt kétséges, hogy számításaink során ezeket fogjuk-e alkalmazni, hiszen az eddigi, RLS módszerrel végzett becslések a gyakorlat számára teljes mértékben kielégítő eredményeket adtak.

Cikkünkben az éves és negyedéves modellek összekapcsolásának problémáját csak a legegyszerűbb, egy egyenletből álló modell esetére vizsgáltuk. Többegyenletes, szimultán modellek esetében a — természetesen bonyolultabb — becslési eljáráson kívül még további megoldandó kérdés az, hogy miként lehet a nem teljes körű negyedéves egyenleteket a teljes körű éves modellel összeépíteni. Ezekkel a kérdésekkel jelenleg foglalkozunk, megoldásuk a közeljövőben várható.

(Beérkezett: 1978. február 3-án.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. EVANS, M. K.—KLEIN, L. R.: The Wharton Econometric Forecasting Model. University of Pennsylvania Press, Philadelphia, 1967.
2. GELAUFF, G. M. M.—HARKEMA, R.: Estimating Quarterly Models with Partly Missing Quarterly Observations. Paper Presented at the European Meeting of the Econometric Society, Vienna 1977.
3. GOLDBERGER, A. S.: Econometric Theory. J. Wiley et Sons Inc., New York, 1966. 388 p.
4. HUNYADI L.: Negyedéves ökonometriai modellek kidolgozásának egyes problémái. Előadás a VII. Magyar Operációkutatási Konferencián. Pécs, 1977.
5. KLEIN, R. L.—BALL, J.—HAZLEWOOD, A.—VENDON, P.: An Econometric Model of the United Kingdom, Blackwell, Oxford, 1961.
6. KOTÁSZ GY.-NÉ: A makroökonómiai elemzés mikro-, illetve makroszintről való közelítései (Az aggregáció problémája a lineáris regressziós modelleknél). Előadás a VII. Magyar Operációkutatási Konferencián, Pécs, 1977.
7. MACIEJEWSKI, W.—KALININ, D.—ZAJCHOWSKI, J.: The Plan in an Econometric Model of a Socialist Economy. Paper presented at the III. International Symposium „Models and Forecasts 76". Jachranka, 1976.
8. RÓZSA PÁL: Lineáris algebra és alkalmazásai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976. 685 o.
9. THEIL, H.: Principles of Econometrics. J. Wiley et Sons Inc., New York. 1971. 736 p.
10. Prognostické modely národného hospodarstva-krátkodobé. Vyskumné Vypoctovy Stredisko, Bratislava, 1973. 269 + 73 p.
11. DUESENBERRY—FROM—KLEIN—KUH, eds.: The Brookings Quarterly Econometric Model of the United States. North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1965. 776 p.

A METHOD OF THE COMBINATION OF YEARLY AND QUARTERLY ECONOMETRIC MODELS

Accelerating processes going on in external conditions of the national economy as well as the increase of the operative character and efficiency of economic regulation require the analysis and forecast of processes within one year. Therefore, the elaboration of quarterly econometric models is justified. However, since the sphere of quarterly data is much nar-

rower than that of the yearly ones — following from the basically yearly system of statistics — it is necessary to utilize also yearly data and models based on them, respectively, when elaborating quarterly models.

In this paper a method is presented how quarterly models can be constructed starting from yearly models and making use of their additional information. A simple case of disaggregation in time is reviewed, than a so called fictive quarterly model, derived mechanically from the yearly one, and its statistical characteristics are established. For the estimation of the actual quarterly model two procedures are presented: the simpler and more transparent one is based on restricted least squares, while the more complicated but also more efficient one on generalized least squares. Since both methods — as it is verified also by the numerical example presented — give similar results, the application of the procedure based on restricted least squares can be proposed for making practical computation.

МЕТОД СОЕДИНЕНИЯ ГОДОВЫХ И КВАРТАЛЬНЫХ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Ускоряющиеся процессы, происходящие во внешних условиях народного хозяйства, а также усиление оперативности и эффективности экономического регулирования все больше требуют анализа и прогнозирования процессов, происходящих в течение одного года. Поэтому разработка квартальных экономических моделей является обоснованной. Однако поскольку круг квартальных данных — вследствие, как правило, годовой системы статистики — является гораздо более узким, чем годовых, для разработки квартальных моделей возникает необходимость в использовании годовых данных, а также моделей, основанных на них.

В статье излагается метод составления квартальных моделей на основе годовых моделей и с использованием содержащейся в них дополнительной информации. Рассматривается простой случай временного расчленения, а затем описывается механически выводимая из годовой модели т. н. фиктивная квартальная модель и ее статистические особенности. Для оценки фактической квартальной модели дается два метода: более простая и более обозримая модель основана на методе ограниченных наименьших квадратов, а более сложная, но в то же время и более эффективная — на методе обобщенных наименьших квадратов. Поскольку эти два метода, как это подтверждает и приведенный числовой пример, дают сходные результаты, для проведения практических расчетов может быть рекомендован метод, основанный на ограниченных наименьших квадратах.