BOD PÉTER

A preferencia-függvényekben szereplő súlyok egyszerű meghatározásáról

Mihályffy László, *Pölöskei* Pál és *Réti* János [1] alatti cikkükben Ragnar *Frisch* által felvetett néhány problémára adnak választ. Megmutatják:

— hogyan lehet eldönteni, hogy a súlyarányok valamely H halmaza minimális-e;

— adott minimális halmaz segítségével miként lehet a teljes súlyarány mátrixot meghatározni;

— mekkora az egymástól különböző minimális halmazok száma.

A szerzők a súlyarány mátrix elemeit egy „szállítási feladat" változóiként fogják fel; kölcsönösen egyértelmű megfelelkezést mutatnak ki a mátrixok minimális halmazai és a szállítási feladat bázisai között. Így a H halmaz minimális voltának eldöntése a szállítási feladat egy bázisának azonosítása révén történik. A teljes súlyarány-mátrix meghatározása a szállítási feladat duális egyenletrendszerének a megoldását igényli. Végül ebben az ábrázolásban sikerül a szerzőknek R. Frischnek a minimális halmazok számára vonatkozó sejtését igazolni.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a fenti kérdések gráfmódszerekkel történő megközelítésben közismert tételek alapján triviális módon megválaszolhatók és a megoldások egy gráf rajzán végrehajtandó elemi számolgatásokkal megtalálhatók.

Tekintsünk egy n elemű súlyrendszert: $P_1, P_2, \ldots, P_n$ és a hozzá tartozó

$$P = (p_{ij}); \quad p_{ij} = \frac{P_i}{P_j}$$

súlyarány mátrixot. Rendeljünk a problémához egy n szögpontú, hurokmentes, teljes gráfot:

$$G = (X, U)$$

ahol $X = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ és $U = X \& X$ (X önmagával vett szubdirekt szorzata, azaz az X halmaz elemiből képezhető nem rendezett elempárok összessége).

Minthogy

$$p_{ii} = 1 \; (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ és } p_{ij} = \frac{1}{p_{ji}},$$

a gráf éleit a súlyarányok képviselőinek tekintjük, azzal a megjegyzéssel, hogy a p_{ii} alakú triviális súlyarányokat nem ábrázoljuk és hogy valamely

$u = (P_i, P_j) \in U$ él attól függően ábrázolja a p_{ij} vagy a p_{ji} súlyarányt, hogy P_i-ből P_j-be vagy megfordított irányban haladunk-e át rajta.

Ebben az ábrázolásban minden

$$H = (p_{ij}, p_{kl}, p_{qr}, \ldots)$$

súlyarányhalmaznak megfelel a G gráf éleinek egy $\bar{U}$ részhalmaza, amely végpontjaival együtt a gráf egy $\bar{G} = (\bar{X}, \bar{U})$ részgráfját alkotja. $\bar{G}$ definíciójából világos, hogy nem tartalmazhat elszigetelt pontokat.

Vegyük észre, hogy ha $\bar{G}$-ben létezik ciklus, akkor H nem független. Tekintsünk ugyanis egy ciklust $\bar{G}$-ben, amely a

$$P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{ik-1}, P_{ik}, P_{i1}$$

csúcsokon megy át és k élből áll. Haladjunk végig a cikluson, akkor érvényesek a következő összefüggések:

$$p_{i1,i2} = \frac{P_{i1}}{P_{i2}}$$

$$p_{i2,i3} = \frac{P_{i2}}{P_{i3}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{ik-1,ik} = \frac{P_{ik-1}}{P_{ik}}$$

$$p_{ik,i1} = \frac{P_{ik}}{P_{i1}}$$

Fentiek szorzata alapján

$$p_{i1,i2} \cdot p_{i2,i3} \cdot \ldots \cdot p_{ik-1,ik} \cdot p_{ik,i1} = 1$$

adódik, vagyis a súlyarányhalmaz nem független.

Független súlyarányhalmazoknak tehát csak G ciklusmentes részgráfjai felelhetnek meg. Ha viszont olyan független rendszereket keresünk, amelyek az R. Frisch-féle értelemben minimálisak: tehát lehetővé teszik bármely $p_{ij} \notin H$ előállítását független elemek szorzataként — akkor az ilyeneket ábrázoló részgráfoknak nyilván tartalmazniuk kell X minden elemét. Vagyis minimális halmazoknak csak olyan ciklusmentes részgráfok felelhetnek meg, amelyekben $\bar{X} = X$.

Független elemek segítségével azonban akkor tudjuk csak valamely $p_{ij} \notin H$ súlyarányt meghatározni, ha a P_i és P_j csúcsok közötti él a H elemei által meghatározott élekkel együtt a $\bar{G}$ gráfban ciklust alkot.

Meggondolásainkat összefoglalva az adódik, hogy a minimális halmazoknak G olyan n szögpontú — tehát feszített — ciklusmentes részgráfjai felelnek meg, amelyek rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy egy tetszőleges új él felvétele a gráfba létrehoz egy ciklust. De ezzel a felismeréssel már teljesen célnál vagyunk.

Emlékeztetünk az ún. fák definíciójára. Egy $G = (X, V)$ gráfot, amely legalább két csúcsot tartalmaz, $|V| > 1$ fának nevezünk, ha összefüggő és ciklusmentes. Közismert azonban a következő:

Lemma: Ha a $G = (X, V)$ gráfban $|G| = n > 1$: az alábbi állítások egymással ekvivalensek:

i. G összefüggő és ciklusmentes,

ii. G ciklusmentes és $n-1$ éle van,

iii. G összefüggő és $n-1$ éle van,

iv. G ciklusmentes és ha egy új élt húzunk be két nem szomszédos csúcs között: pontosan egy ciklus jön létre,

v. G összefüggő és ha bármely élét töröljük, megszűnik összefüggő lenni,

vi. G bármely csúcspárja között pontosan egy lánc húzódik.

Bevezető meggondolásaink és a Lemma (iv.) pontja alapján kimondható az

1. Tétel. A H halmaz akkor és csak akkor minimális halmaz, ha a neki megfelelő $\bar{G} = (X, \bar{U})$ gráf: fa.

A Lemma (ii.) pontja alapján következik a

Korollárium: n változós preferencia-függvény esetén bármely minimális halmaznak $n-1$ eleme van.

Az egymástól különböző minimális halmazok száma pontosan annyi, ahány különböző feszített fát lehet találni az n szögpontú teljes gráfban. Ez a szám a gráfelméletben Cayley tétele néven ismert klasszikus eredmény szerint: n^{n-2}. [2] Tehát:

2. Tétel; n változós preferencia-függvény esetén az egymástól különböző minimális halmazok száma: n^{n-2}.

Tekintsünk ezek után egy H súlyarányhalmazt. Kérdés, tartalmaz-e H minimális halmazt. Állítsuk sorba a súlyarányokat valamilyen reájuk vonatkozó preferencia alapján. Vegyünk fel n diszkrét pontot a papíron és menjünk sorba a súlyarányoknak megfelelő éleken. Valamely sorrakerülő élt felveszünk a $\bar{G}_0$ gráfba, ha a már korábban felvett élekkel nem zár ciklust. Az eljárás kétféle módon ér véget:

a) Elfogy valamennyi jelölt él és nem sikerül $n-1$ élt berajzolnunk. Ebben az esetben H nem tartalmaz minimális halmazt.

b) Találunk $n-1$ berajzolható élt. Ebben az esetben a $\bar{G}$-ben megjelenő éleknek megfelelő súlyarányok minimális halmazt alkotnak: H_0. Sőt, ez a minimális halmaz ráadásul még a súlyarányokra vonatkozó preferencia sorrendünk szerint „optimális" is.

H_0 birtokában már most minden hiányzó súlyarányt egyszerűen kiszámolhatunk. Legyen $p_{ij} \notin H_0$. Tekintsük $\bar{G}_0$-ban a P_i-ből P_j-be vezető egyetlen láncot (Lemma vi. pontja). Irányítsuk a lánc éleit P_i-ből P_j-be. Húzzuk meg a P_iP_j élt a gráfban. Ezzel $\bar{G}_0$-ban pontosan egy ciklus keletkezik és a keresett ismeretlen súlyarány egyenlő a láncot alkotó élek által reprezentált súlyarányok szorzatával.

A leírt módszer alkalmazása mindaddig nem igényel semmiféle számítástechnikai apparátust, amíg a gráf papíron áttekinthető. Nagy n esetén az elvégzendő számítások egyszerű lineáris algebrai feladatokká alakíthatók, amelyek könnyen gépesíthetők.

(Beérkezett: 1978 május 18-án)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Mihályffy L.—Pölöskei P.—Réti J.: A preferencia-függvényekben szereplő súlyok meghatározásáról. SZIGMA. E számban, 210. old.

2. Berge, C.: Théorie des Graphes et ses Applications. Dunod, 1963.