Szidarovszky Ferenc

A Nash-féle kooperatív megoldási koncepció általánosításáról

A $\Gamma = (n; S_1, \ldots, S_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ szimbólumot n-személyes játéknak nevezzük, ha $S_1, \ldots, S_n$ tetszőleges halmazok, $S \subset \mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} S_k$, $D(\varphi_k) = S$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), $R(\varphi_k) \subset R^1$. Ekkor az S_k halmazokat stratégiahalmazoknak nevezzük, az S halmazt szimultán stratégiahalmaznak, a φ_k függvényeket pedig kifizető függvényeknek. A játék (Nash-féle) egyensúlypontján olyan $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in S$ stratégia n-est értünk, amelyre tetszőleges $(x_1^*, \ldots, x_k, \ldots, x_n^*) \in S$ mellett fennáll, hogy

$$\varphi_k(x_1^*, \ldots, x_k, \ldots, x_n^*) \leq \varphi_k(x_1^*, \ldots, x_k^*, \ldots, x_n^*).$$

Ez közgazdaságilag azt jelenti, hogy egyetlen játékos sem növelheti meg az egyensúlyponthoz tartozó kifizetését stratégiájának egyoldalú megváltoztatásával. Más szavakkal, az egyensúlyponthoz tartozó stratégia valamennyi játékos számára optimális, feltéve, hogy az összes többi játékos is az egyensúlypontnak megfelelő stratégiákat választja. A gyakorlati alkalmazások során a Nash-féle egyensúlypont gyakran nem a valódi helyzetet írja le, amikor nem az összes játékosnak érdeke az egyensúlypontra való törekvés. Ilyen esetek olyankor fordulnak elő, amikor egyes játékosok az egyensúlypontban irreálisan nagy kifizetéshez jutnak, mások viszont nagyon kis nyereséget kapnak, esetleg veszteség éri őket, hiszen ezeknek a játékosoknak az egyensúlystratégiák választása érdekeikkel ellentétben áll. Ilyenkor a játékosok ún. kooperatív megoldást választanak. Kooperatív játékok megoldására többféle elvileg különböző koncepció ismeretes. Ezekről jó összefoglalás található a [2], [7], [8] irodalomban. Az egyik megoldási felfogás Nash-től ered. Olyan kifizetést fogad el kooperatív megoldásnak, amely minden játékos számára „elég jó" és néhány természetesnek tűnő axiómának is eleget tesz. Nash csak bimátrix játékok esetére bizonyította a megoldás létezését és egyértelműségét.

Dolgozatomban ezt a megoldási koncepciót általánosítom n-személyes, nem feltétlenül lineáris kifizető függvényekkel rendelkező játékok esetére. A tanulmány eredményei speciális esetként természetesen tartalmazzák Nash megfelelő tételeit.

Legyen most $\Gamma = (n; S_1, \ldots, S_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ valamilyen n-személyes játék. Jelölje S a játékosok szimultán stratégiahalmazát. Nem követeljük meg, hogy $S = S_1 \times \ldots \times S_n$ legyen. Jelölje továbbá a

$$\Phi = \{f \mid f = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)),\ x \in S\} \tag{1}$$

halmaz a lehetséges kifizetések halmazát, valamint L a Φ konvex burkolóját.

A továbbiakban megengedjük L tetszőleges elemét, mint kifizetést. Legyen $(\varphi_1(x^{(i)}), \ldots, \varphi_n(x^{(i)})) \in \Phi$ ($i = 1, 2, \ldots, m$ esetén), ekkor tetszőleges $0 \leq \lambda_i \leq 1$ $(1 \leq i \leq m)$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ konstansok mellett a;

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_1(x^{(i)}), \ldots, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_n(x^{(i)})\right) \in L$$

kifizetés például úgy jöhet létre, hogy a játék sokszori lejátszása esetén az $x^{(i)}$ stratégia n-est a játékok $100\,\lambda_i$ százalékában játszák a játékosok. Tegyük továbbá fel, hogy adott egy f^* kifizetés, az ún. *status quo* pont, amely azt jelenti, hogy amennyiben a játékosok nem tudnak megegyezésre jutni, akkor az f^* pontnak megfelelő stratégiákat játszanak. Ily módon bármely n-személyes játék az (L, f^*) párral jellemezhető. A játékosok törekvése, kooperációjuk esetén, egy f^*-nál alkalmasabb $f \in L$ kifizetés konstruálása és játszása. Nyilvánvalóan természetes feltétele a megegyezésnek, hogy f esetén egyetlen játékos se járjon rosszabbul, mint f^* esetén.

Ezek után rátérhetünk a kooperatív megoldás definíciójára.

Definíció. Egy ψ függvényt kooperatív megoldásfüggvénynek nevezünk, ha teljesülnek a következő axiómák:

1. $D(\psi) = \{(L, f^*) \mid L \subset R^n$ korlátos, zárt, konvex halmaz, $f^* \in R^n$ és létezik olyan $f \in L$, hogy $f \geq f^*\}$
$R(\psi) \subset R^n$, ahol D az értelmezési tartomány, R pedig az értékkészlet jele;

2. $\psi(L, f^*) \in L$ (lehetségesség);

3. $\psi(L, f^*) \geq f^*$ (racionalitás);

4. Ha $f \in L$, $f \geq \psi\,(L, f^*)$, akkor $f = \psi(L, f^*)$ (Pareto-optimalitás);

5. Legyen $L_1 \subset L$, valamint $\psi(L, f^*) \in L_1$, akkor

$$\psi(L, f^*) = \psi(L_1, f^*)$$

(kedvezőtlen alternatíváktól való függetlenség);

6. Legyenek $\alpha_k > 0$, $\beta_k (1 \leq k \leq n)$ tetszőleges konstansok, $f^* = (f_1^*, \ldots, f_n^*) \in R^n$, $L \subset R^n$ korlátos, zárt, konvex halmaz, $\psi(L, f^*) = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ továbbá $f^{*\prime} = (\alpha_1 f_1^* + \beta_1, \ldots, \alpha_n f_n^* + \beta_n)$,

$$L' = \{(\alpha_1 f_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n f_n + \beta_n) \mid (f_1, \ldots, f_n) \in L\}.$$

Ekkor $\psi(L', f^{*\prime}) = (\alpha_1 \varphi_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n \varphi_n + \beta_n)$ (növekvő transzformációtól való függetlenség);

7. Ha létezik olyan i, j index, hogy $f = (f_1, \ldots, f_n) \in L$ akkor és csak akkor, amikor $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L$ $(\varphi_k = f_k,\ k \neq i,\ k \neq j,\ \varphi_i = f_j,\ \varphi_j = f_i)$, valamint az $f^* = (f_1^*, \ldots, f_n^*)$ vektorra $f_i^* = f_j^*$, ekkor a $\psi(L, f^*) = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ vektorra is $\psi_i = \psi_j$ (szimmetria).

Az első axióma a ψ megoldásfüggvény értelmezési tartományát és értékkészletét adja meg, a második axióma szerint a kooperatív megoldás megengedhető megoldás kell legyen. A harmadik axióma azt állítja, hogy a kooperatív megoldás legalább annyi kifizetést biztosítson valamennyi játékos esetén, mit amennyit a „status quo" pontban kapnának. A negyedik axióma jelenti a Pareto-optimalitást, az ötödik pedig azt mondja, hogyha egy leszűkített lehetséges halmazra esik a kooperatív megoldás, akkor a leszűkített és az eredeti feladat megoldása egyezzen meg.

A hatodik axióma a kooperatív megoldás lineáris transzformációtól való függetlenségét adja meg, például más pénznemben számolva a kifizetéseket a kooperatív megoldás ne változzon meg. A hetedik, szimmetria axióma a játék azon tulajdonságát adja meg, hogy ha két játékos sem a lehetséges halmazban, se a „status quo'' pontban nem különböztethető meg, akkor ugyan annyi kifizetést kapjanak a kooperatív megoldás esetén.

A dolgozat fő eredménye az alábbi tétel.

Tétel. Pontosan egy ψ megoldásfüggvény létezik.

Bizonyítás: A tétel bizonyítása több lépésből áll.

a) Legyen L, f^* az 1. axiómának megfelelő. Legyen $r \geq 0$ az a legnagyobb szám, amelyre $i_1, \ldots, i_r$ alkalmas indexek mellett létezik olyan $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L$, hogy $\varphi \geq f^* = (f_1^*, \ldots, f_n^*)$, valamint $\varphi_{i_k} > f_{i_k}^* (1 \leq k \leq r)$. Bebizonyítjuk, hogy ekkor nem létezik olyan $\bar{\varphi} = (\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_n) \in L$, $\bar{\varphi} \geq f^*$, hogy valamilyen $i \neq i_k$ $(1 \leq k \leq r)$ mellett $\bar{\varphi}_i > f_i^*$ legyen. Ha lenne a feltételnek megfelelő $\bar{\varphi} \in L$, akkor L konvexitása miatt $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n) = \frac{1}{2}(\bar{\varphi} + \varphi) \in L$ és

$$\tilde{\varphi}_{i_k} = \frac{1}{2}\bar{\varphi}_{i_k} + \frac{1}{2}\varphi_{i_k} > \frac{1}{2}f_{i_k}^* + \frac{1}{2}f_{i_k}^* = f_{i_k}^*, \qquad (1 \leq k \leq r)$$

$$\tilde{\varphi}_i = \frac{1}{2}\bar{\varphi}_i + \frac{1}{2}\varphi_i > \frac{1}{2}f_i^* + \frac{1}{2}f_i^* = f_i^*,$$

amely ellentmond r választásának.

b) Legyen most $L, f^*, r, i_1, \ldots, i_r$ az előző állításnak megfelelő. Tekintsük ezután a következő nemlineáris programozási feladatot:

$$\begin{gathered} \tilde{\varphi} \in L \\ \tilde{\varphi} \geq f^* \\ \hline g(\tilde{\varphi}) = g(u_1, \ldots, u_r) = \prod_{k=1}^{r} (u_k - f_{i_k}^*) \to \max, \end{gathered} \tag{2}$$

ahol most $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n)$, $\tilde{\varphi}_{i_k} = u_k (1 \leq k \leq r)$, $\tilde{\varphi}_j = f_j^* (j \neq i_k, 1 \leq k \leq r)$.

A feltételnek eleget tevő $u_1, \ldots, u_r$ vektorok halmaza korlátos, zárt, a célfüggvény folytonos, így létezik optimális megoldás. Bebizonyítjuk, hogy az optimális megoldás egyértelmű. Tegyük fel, hogy $(u_1, \ldots, u_r)$ és $(u_1', \ldots, u_r')$ is optimális megoldás. Nyilvánvaló, hogy $k = 1, 2, \ldots, r$ esetén $u_k > f_{i_k}^*$, $u_k' > f_{i_k}^*$, hiszen ellenkező esetben a célfüggvényérték zérus volna, viszont φ megfelelő komponenseit választva pozitív értékű és ez ellentmondana a megoldások optimalitásának. Legyen $k = 1, 2, \ldots, r$ esetén $a_k = u_k - f_{i_k}^*$, $b_k = u_k' - f_{i_k}^*$, ekkor az $u_k'' = \frac{1}{2}(u_k + u_k')$ $(1 \leq k \leq r)$ komponensű vektor az L konvexitása alapján megengedett megoldás és

$$g(u_1'', \ldots, u_r'') = \prod_{k=1}^{r} \frac{a_k + b_k}{2} \geq \prod_{k=1}^{r} \sqrt{a_k b_k} = \sqrt{\prod_{k=1}^{r} a_k \cdot \prod_{k=1}^{r} b_k} = g(u_1, \ldots, u_r).$$

Itt egyenlőség kell fennálljon az $(u_1, \ldots, u_r)$ optimalitása miatt, az pedig csak akkor lehet, ha $k = 1, 2, \ldots, r$ esetén $a_k = b_k$, vagyis $u_k = u_k'$.

c) Legyen ezután $u_1, \ldots, u_r$ a (2) feladat optimális megoldása, valamint $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n)$, $\tilde{\varphi}_{i_k} = u_k$ $(1 \leq k \leq r)$, $\tilde{\varphi}_j = f_j^*$ $(j \neq i_k,\ 1 \leq k \leq r)$. Legyen $\psi = \psi(L, f^*)$. Belátjuk, hogy a $\psi = \tilde{\varphi}$ választás megfelel a definíció axiómáinak. Az 1. nyilvánvalóan fennáll; a konstrukció alapján 2., 3. és 4. is teljesül. Az 5. fennállása abból adódik, hogyha a $\psi(L, f^*)$ optimális megoldás az L halmazon, akkor $L_1 \subset L$, $\psi(L, f^*) \in L_1$ következtében optimumot szolgáltat a szűkebb L_1 halmazon is. A 6. tulajdonság egyszerűen látható be a következőképpen. Legyenek $\alpha_k > 0$, β_k $(1 \leq k \leq n)$ alkalmas konstansok, $L, f^*, r, i_1, \ldots, i_r$ az a) állításnak megfelelő. Legyen L', $f^{*\prime}$ a 6. axiómának eleget tevő, akkor a transzformált játék esetén $r' = r$ és az $i_1, \ldots, i_r$ indexek itt is ugyanazzal a tulajdonságokkal bírnak, mint az L, f^* játék esetén. Az állítás közvetlenül leolvasható abból, hogy tetszőleges $f = (f_1, \ldots, f_n)$ esetén

$$g(f') = \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_r} \prod_{k=1}^{r} (f_{i_k} - f_{i_k}^*) = \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_r} g(f).$$

A 7. axióma belátására van már csak szükségünk. Tegyük fel, hogy az i, j indexek eleget tesznek a feltételeknek. Legyen $\varphi^* = (\varphi_1^* \ldots, \varphi_n^*)$ ahol $\varphi_k^* = f_k^*$ $(k \neq i,\ k \neq j)$, $\varphi_i^* = f_j^*$, $\varphi_j^* = f_i^*$. Ekkor a feltevésünk alapján $\varphi^* = f^*$. Legyen továbbá $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n)$ a (2) megoldása, valamint $\tilde{\psi} = (\tilde{\psi}_1, \ldots, \tilde{\psi}_n)$ $(\tilde{\psi}_k = \tilde{\varphi}_k,\ k \neq i,\ k \neq j,\ \tilde{\psi}_i = \tilde{\varphi}_j,\ \tilde{\psi}_j = \tilde{\varphi}_i)$. Ekkor $\tilde{\varphi} \in L$ akkor és csak akkor, ha $\tilde{\psi} \in L$, valamint $i \in \{i_1, \ldots, i_r\}$ akkor és csak akkor, ha $j \in \{i_1, \ldots, i_r\}$. Ha $i, j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$, akkor $\tilde{\varphi}_i = \tilde{\psi}_i = f_i^*$, így nincs mit bizonyítanunk. Ha $i, j \in \{i_1, \ldots, i_r\}$, akkor a $\tilde{\varphi}_i = \tilde{\varphi}_j$ (vagyis $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi}$) azonosság a φ^* és f^* egyenlőségéből és a (2) feladat optimumhelyének egyértelműségéből adódik.

d) Legyen ismét $L, r, i_1 \ldots, i_r$ f^* az a) pontnak megfelelő. Bebizonyítjuk, hogy a (2) megoldásából nyert $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n)$ vektor maximalizálja

$$h(\varphi) = \sum_{k=1}^{r} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{r} (\tilde{\varphi}_{i_j} - f_{i_j}^*) \right) \varphi_{i_k}$$

függvényt az L halmazon. Tegyük fel, az állítással ellentétben, hogy létezik olyan $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L$, hogy $h(\varphi) > h(\tilde{\varphi})$. Legyen $0 < \varepsilon < 1$ esetén

$$\bar{\varphi} = \tilde{\varphi} + \varepsilon(\varphi - \tilde{\varphi}).$$

Ekkor egyszerű számolással látható, hogy

$$g(\bar{\varphi}) = \prod_{j=1}^{r} [\tilde{\varphi}_{i_j} - f_{i_j}^* + \varepsilon(\varphi_{i_j} - \tilde{\varphi}_{i_j})] = g(\tilde{\varphi}) + \varepsilon h(\varphi - \tilde{\varphi}) + (\varepsilon^2 a_2 + \ldots + \varepsilon^r a_r),$$

ahol az $a_2, \ldots, a_r$ alkalmas (ε-tól nem függő) konstansok, valamint h linearitása alapján $h(\varphi) - h(\tilde{\varphi}) = h(\varphi - \tilde{\varphi}) > 0$. Így olyan $0 < \varepsilon < 1$ esetén, amelyre $h(\varphi - \tilde{\varphi}) > - \varepsilon a_2 \ldots - \varepsilon^{r-1} a_r$, nyilvánvalóan $g(\bar{\varphi}) > g(\tilde{\varphi})$, amely ellentmond $\tilde{\varphi}$ megválasztásának.

e) Végül belátjuk, hogy a definíciónak eleget tevő függvény szükségképpen a (2) feladat megoldásával azonos. Legyen most is $L, f^*, r, i_1, \ldots, i_r$ az a) pontnak megfelelő, legyen továbbá $\tilde{\varphi}$ a (2) feladat optimális megoldása, valamint

$$H = \{\varphi \mid h(\varphi) \leq h(\tilde{\varphi}),\ \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \geq f^*,\ \varphi_i = f_i^*\ (i \neq i_k,\ 1 \leq k \leq r)\}.$$

Ekkor nyilvánvalóan $H \supset L_1$, ahol

$$L_1 = L \cap \{\varphi \mid \varphi \geqq f^*\}.$$

Vezessük ezután be az

$$\varphi'_{i_k} = \frac{\varphi_{i_k} - f^*_{i_k}}{\tilde{\varphi}_{i_k} - f^*_{i_k}} \quad (1 \leqq k \leqq r), \quad \varphi'_j = \varphi_j \quad (j \neq i_k,\ 1 \leqq k \leqq r)$$

lineáris transzformációt. Ekkor f^* és $\tilde{\varphi}$ transzformáltja

$$f^{*\prime}_{i_k} = 0 \ (1 \leqq k \leqq r),\ f^{*\prime}_j = f^*_j \ (j \neq i_k,\ 1 \leqq k \leqq r),$$

$$\tilde{\varphi}'_{i_k} = 1 \ (1 \leqq k \leqq r),\ \tilde{\varphi}'_j = \varphi_j \ (j \neq i_k,\ 1 \leqq k \leqq r),$$

így a H halmaz képe:

$$H' = \left\{\varphi' \,\middle|\, \sum_{k=1}^{r} \varphi'_{i_k} \leqq r,\ \varphi'_{i_k} \geqq 0,\ \varphi'_i = f^*_i \quad (i \neq i_k,\ k = 1, 2, \ldots, r)\right\},$$

amely az i_k indexekben szimmetrikus. Tehát a 7. axióma alapján a $\psi' = (\psi'_1, \ldots, \psi'_n) = \psi(H', f^{*\prime})$ vektorra $\psi'_{i_k} = \psi'_{i_l}$ $(1 \leqq k,\ l \leqq r)$ és a Pareto-optimalitás miatt $\psi'_{i_k} = \psi'_{i_l} = 1$ $(1 \leqq k,\ l \leqq r)$, amelyet a 6. axióma alapján visszatranszformálva azonnal adódik, hogy $\psi(H, f^*) = \tilde{\varphi}$. Azonban a 3. axióma alapján $\psi(L, f^*) \in L_1$, így tehát az 5. axióma következtében $\psi(L, f^*) = \psi(L_1, f^*) = \tilde{\varphi}$, amit bizonyítanunk kellett. Ezzel a tételt teljes egészében beláttuk.

Shapley bimátrixjátékokra vonatkozó felfogásának esetünkben az

$$f^*_k = \max_{x_k} \min_{x_i (i \neq k)} \varphi_k(x_1, \ldots, x_n)$$

választás felel meg, azaz a játékosok maximin stratégiái által meghatározott ún. ,,biztonsági szint'' legyen a status quo pont.

Status quo pontként valamely egyensúlypontot is választhatunk, azonban problémát jelent az, hogy több egyensúlypont esetén melyiket válasszuk, hiszen általában nem várható, hogy létezik egy minden játékos számára egyenletesen legjobb egyensúlypont.

A (2) programozási feladat megoldását nagymértékben megkönnyíti az a tény, hogy L elemei felírhatók, mint legfeljebb $n + 1$ Φ-beli elem konvex lineáris kombinációja. Így (2)-ben a $\tilde{\varphi} \in L$ feltétel a könnyebben kezelhető

$$\tilde{\varphi} - \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x^{(i)}) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1,$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_i \geqq 0 \\ x^{(i)} \in S \end{array}\right. \quad (1 \leqq i \leqq n + 1)$$

alakban is felírható, ahol $f(x^{(i)}) = \left(\varphi_1(x^{(i)}), \ldots, \varphi_n(x^{(i)})\right)$, és a döntési változók $x^{(i)}$, λ_i $(1 \leqq i \leqq n + 1)$.

A programozási feladat megoldása sok dimenziós feladatok esetén igen bonyolult is lehet, így egyszerűsítésére és gyakorlatban is jól alkalmazható algoritmus kidolgozására további kutatások szükségesek.

(Beérkezett: 1977. március 8-án.)

IRODALOM

1. AUMANN, R. I.—MASHLER, M.: Some Thoughts on the Minimax Principle. Man. Sci. Vol. 18. No-5, 1972. pp. 54—63.
2. BURGER, E.: Einführung in die Theorie der Spiele, de Gruyter, Berlin, 1966.
3. Contributions to the Theory of Games. I, II, III, IV. Annales of Math. Studies Vol 24. 1950, Vol 28. 1953, Vol 39. 1957, Vol 40. 1959.
4. KARLIN, S.: Mathematical Methods and Theory of Games. Programming and Economics. Vol I—II. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1959.
5. NASH, J.: Two Person Cooperative Games. Econometrica, 21. 1953, pp. 128—140.
6. OWEN, G.: Game Theory, Phil. Saunders, 1968.
7. RAPOPORT, A.: Two-person Game Theory. (The essential ideas). Ann Arbor. The Univ. of Michigan Press.
8. SZÉP, J.—FORGÓ, F.: Bevezetés a játékelméletbe. Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
9. SZIDAROVSZKY, F.: Bevezetés a numerikus módszerekbe. Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

ON THE GENERALIZATION OF NASH'S COOPERATIVE SOLUTION CONCEPT

In the paper a general method is presented for the solution of cooperative games. Nash's solution concept for bimatrix games is generalized for the case of n-person games. In this we look for a Pareto-optimum satisfying an adequate axiom-system. It is shown in the paper that the axiom-system has precisely one solution and it is proved that this unique solution is equivalent to the solution of a nonlinear programming problem.

ОТНОСИТЕЛЬНО ОБОБЩЕНИЯ КОНЦЕПЦИИ КООПЕРАТИВНОГО РЕШЕНИЯ НЭША

В рассматриваемой работе дается общий метод решения кооперативных игр. Концепция Нэша по решению биматриксных игр обобщается относительно игр с числом участников «n». В данном случае ищется оптимум Парето, удовлетворяющий некоторой применимой системе аксиом. В работе указывается, что система аксиом имеет только одно решение и доказывается, что такое решение эквивалентно решению задачи нелинейного программирования.