Bródy András

A struktúraváltozás ábrázolásáról

A nyílt, statikus Leontief-modell tervezésre vagy előrejelzésre alkalmazva megbízhatatlan eredményeket ad. A számítások hibája átlagosan is meghaladhatja az 5 százalékot már az eredeti adatok összegyűjtésétől számított néhány éven belül [6].

Valamelyest javít ezen a modell lezárása és dinamizálása. Az egyensúlyi és a tényleges pálya eltérése mintegy 3–5 százalék között mozog, s a hiba lassabban növekszik [3, 11].

A Szigma 1977. évi 3. számában közölt ciklusmodellel elérhető pontosság remélhetőleg jobb, bár ellenőrző számítások nem állnak még rendelkezésre.

A pontosság további fokozása csak úgy lehetséges, ha a modell tükrözi a gazdaság strukturális változását is, tehát ha felöleli az A és B mátrix elemeinek a technikai fejlődés következtében beálló módosulását. Erre több kísérlet történt már [4, 10], s e dolgozatban megkísérlem a tanulmányok egy lehetséges általánosítását. Olyan egyszerű hipotézist dolgozok ki, amely alkalmasnak tűnik arra, hogy a strukturális változást (vagy annak legalábbis egy részét) a lehető legegyszerűbb matematikai transzformációval ábrázoljuk.

A transzformáció megválasztása

Az egyes országok – tehát az egyes igen különböző fejlettségi fokon álló gazdaságok – input-output adatgyűjtései egymáshoz meglepően közeli hasonlóságban álló mátrixokat eredményeztek. A „hasonlóság" itt minőségi *és* mennyiségi értelemben veendő: mind a nem-zérus elemek elhelyezkedése, mind nagyságrendjük meglehetősen egyöntetűnek bizonyult. Ugyanez áll még fokozottabb mértékben egyazon gazdaság különböző évekre vonatkozó matrixaira.

Kézenfekvő tehát valamilyen hasonlósági transzformációt keresni, még akkor is, ha ez matematikai értelemben elég erős megkötés. A technikai változás közelítésére ma széles körben használt RAS-módszer [1, 7] azonban már amúgyis közel áll e szigorú megkötéshez, hiszen matematikailag egy ekvivalencia-transzformációnak felel meg. Ha ezenfelül feltesszük, hogy az itt szereplő R és S mátrixok egymás inverzei, akkor csak egyetlen újabb megkötéssel szigorítottunk egy egyébként már használatos módszert.

Indokolható ez a választás más oldalról is. A koefficiensek változásának eddigi vizsgálata során már feltűntek ugyanis bizonyos sajátosságok:

(*a*) a zéruselemek említett tartóssága,
(*b*) az ár-együtthatók sokkalta lassabb változása, mint a természetes egységekben mért együtthatóké [9],

(c) a közvetlen és a teljes ráfordítási együtthatók arányainak az ár-együtthatóknál is nagyobb stabilitása [5, 8].

Ez utóbbi sajátosság, amely mind az alkalmazott természetes mértékegységektől, mind pedig az árrendszertől független mutatókat eredményez ezért a nemzetközi összehasonlítások egyik módszerének alapjává vált.

Csupán e gondolat logikus folytatása, ha feltesszük, hogy a közvetlen ráfordítás a_{ik} ($\{a_{ik}\} = A$) és a teljes ráfordítás q_{ik} $\left(\{q_{ik}\} = Q = (1 - A)^{-1}\right)$ hányadosa változatlan. Feltevésünk szerint tehát

$$a_{ik}/q_{ik} = \text{konstans} = c_{ik}\,, \tag{1}$$

s figyelmünket az A mátrix azon lehetséges $T(A)$ transzformációira fordítjuk, amelyek e feltételnek eleget tesznek. Ha mármost az A mátrix a

$$T(A) = RAR^{-1} \tag{2}$$

alakban transzformálódik, akkor Leontief-inverze a

$$T(Q) = (1 - RAR^{-1})^{-1} = R(1 - A)^{-1}R^{-1} = RQR^{-1} \tag{3}$$

alakot ölti.

Ha a transzformáló R mátrixot úgy választjuk meg, hogy az egy pozitív diagonális mátrix legyen, azaz

$$R = \operatorname{diag} r_i = \langle r_1, \ldots, r_n \rangle \qquad r_i > 0, \tag{4}$$

akkor az (1) feltétel nyilván teljesül, mivel

$$[T(A)]_{ik}/[T(Q)]_{ik} = r_i q_{ik} r_k^{-1} / r_i q_{ik} r_k^{-1} = a_{ik}/q_{ik}.$$

Egyelőre nem tudom bizonyítani, de úgy vélem, hogy a fentiek megfordítottja is igaz, tehát nemcsak (4)-ből következik (1), hanem (1)-ből következik (4), azaz feltételünket csak a diagonális mátrixokkal képzett hasonlósági transzformációk elégítik ki.[1] A transzformáció pozitív volta azonban csak közgazdasági megfontolások eredménye, a matematikai forma negatív vagy aszimptotikusan zérussá váló értékeket is megengedne.

A transzformáció folytonos alakja

Kézenfekvő mármost azt kikötni, hogy ha a zérus időponttól az s időpontig vezető transzformáció $T_{os}(A)$ és az s időponttól a p időpontig vezető transzformáció $T_{sp}(A)$, akkor a zérustól p időpontig vezető transzformációt mint e két transzformáció „szorzatát”, azaz egymás után való elvégzését állíthatjuk elő, azaz

$$T_{op}(A) = T_{sp}(T_{os}(A)). \tag{6}$$

Kiírva a hasonlósági transzformációkat:

$$R_{op}AR_{op}^{-1} = R_{sp}R_{os}AR_{os}^{-1}R_{sp}^{-1}\,, \tag{7}$$

[1] Ez valószínűleg már az (a) sajátosságból is levezethető, mivel csak a diagonális matrixokkal végzett hasonlósági transzformáció „őrzi meg” a zérusokat.

azaz

(8) $$R_{op} = R_{sp}R_{os}.$$

Ha az os intervallumot a és az sp intervallumot b jelöli, akkor az op intervallum $a + b$ nagyságú, s így az alábbi függvényegyenlethez jutunk:

(9) $$R_{a+b} = R_b R_a.$$

Ha megengedjük a negatív időtartamra szóló (tehát időben visszafelé történő) transzformációt, akkor (9)-ből következik, hogy

(10) $$R_0 = 1 = R_{-t}R_t$$

minden t értékre, s így R_t nem lehet szinguláris, mivel van inverze, tudniillik $R_{-t} = R_t^{-1}$.

Ha most a (9) egyenletet először a, majd b szerint deriváljuk és a keletkező két jobb oldalt egymással egyenlővé tesszük, akkor

(11) $$R_b R'_a = R'_b R_a.$$

Jobbról R_{-a}-val, balról R_{-b}-vel szorozva

(12) $$R'_a R_a^{-1} = R_b^{-1} R'_b$$

bármely a-ra és b-re. Így fenn kell állnia teljes általánosságban a

(13) $$R'_t R_t^{-1} = \text{konstans mátrix} = \bar{R}$$

relációnak, s ezért

(14) $$dR_t/dt = \bar{R}R_t$$

(lásd például [2]).

A transzformáció deriváltjának, illetve logaritmikus deriváltjának az $\bar{R}$ konstans mátrixnak ismeretében tehát tetszőleges t időtartamra vonatkozó hasonlósági transzformációt végezhetünk a

(15) $$T_t(A) = e^{\bar{R}t}Ae^{-\bar{R}t}$$

előírás segítségével.

Az egyensúlyi pálya transzformálódása

Tegyük fel most, aminek valószínűségéhez persze további statisztikai vizsgálatok szükségesek, hogy mind az A, mind a B mátrix azonosan transzformálódik az idő folyamán, s vizsgáljuk meg, hogyan változik meg a rendszer egyensúlyi pályája a transzformáció által jellemzett technikai-strukturális változások következtében.

Keressük tehát azt az x_t egyensúlyi pályát, amelyet a folytonosan változó, mert folytonosan transzformált

(16) $$T_t(1 - A)\,x_t = d[T_t(B)\,x_t]/dt = T'_t(B)\,x_t + T(B)\,\dot{x}_t$$

rendszer megenged.

Az előbbiekben meghatározott (15) hasonlósági transzformáció segítségével ez átírható a

$$e^{\bar{R}t}(1-A)\,e^{-\bar{R}t}x_t = [e^{\bar{R}t}Be^{-\bar{R}t}x_t]' \tag{17}$$

alakba.

Keressük most a megoldást $x_t = e^{\bar{R}t}\bar{x}$ alakban, ahol $\bar{x}$ valamilyen konstans vektor.

Elvégezve (17) deriválását, behelyettesítve és balról $e^{-\bar{R}t}$-vel szorozva nyerjük, hogy

$$(1-A)\bar{x} = \bar{R}B\bar{x}. \tag{18}$$

Így tehát $\bar{x}$ konstans voltának feltétele kifejezhető a

$$\det(1-A-\bar{R}B) = 0 \tag{19}$$

alakban. Ez — bár emlékeztet a dinamikus Leontief-rendszer megoldására — mégis azt a látszatot kelti, hogy nem minden struktúraváltozási $\bar{R}$ mátrix fér össze a gazdaság egy adott állapotával.

Igaz, a 18 egyenlet $\bar{R} = \lambda 1$ értéke esetén átalakul a

$$(1-A-\lambda B)\bar{x} = 0 \tag{20}$$

már jól ismert megoldássá. Ekkor — és csak ekkor — az egyensúlyi pálya $e^{\lambda t}\bar{x}$ alakú egyöntetű növekedési rátát eredményez.

Az általános esetben is értelmezhetünk azonban egy „közös", „általános" vagy „átlagos" μ növekedési rátát, ha feltesszük, hogy

$$\bar{R} = \mu\tilde{R}, \tag{21}$$

s azt vizsgáljuk, hogy a (18) alapján megalkotható

$$(1-A-\mu\tilde{R}B)\bar{x} = 0 \tag{22}$$

egyenlet milyen maximális μ ütemet enged meg. Ennek értéke egyértelmű, és ismeretében az egyensúlyi pályát

$$x_t = e^{\mu\tilde{R}t}\bar{x} \tag{23}$$

alakban adhatjuk meg, s így látható, hogy a struktúraváltozás az egyes ágazatok eltérő, egyéni $\mu r_1, \ldots, \mu r_n$ értékű növekedésével jellemezhető.

A transzformációs mátrix értelmezése

Ebből adódik a transzformációs mátrixnak, illetve a mátrix logaritmikus deriváltjának $\mu\tilde{R}$-nak lehetséges közgazdasági értelmezése is.

Ha az $\tilde{R}$ diagonális mátrix elemei például az 1, 2, 3, . . . értékeket veszik fel, ez azt jelenti, hogy a megfelelő ágazatok a közös μ növekedési ütem 1-szeresével, 2-szeresével, 3-szorosával stb. növekednek. Hasonlóan az 1/2, 1/3 . . . értékek a növekedési ütem felezését, harmadolását stb. fejezik ki.

A transzformációs mátrix, ha egységül a munkaerő sorát választjuk ($\mu r_n = \mu$, tehát $r_n = 1$), akkor rendre a munkatermelékenységnek az egyes ágazatokban elért változását fogja megmutatni, s így összefogja a technikai változást a munka termelékenységének változásával, kifejezve ezek hatását a gazdaság szükséges struktúrájára illetve ennek megváltozására. Úgy tűnik tehát, hogy ezzel új eszközt ad kezünkbe az említett kategóriák vizsgálatára, mérésére és tervezésére.

Az árrendszer problémája

Felmerül az a kérdés, hogy az ilyen változó technikával dolgozó rendszer milyen árrendszert hoz magával, s elsődlegesen, hogy vajon változó vagy változatlan arányú árrendszer alkalmas-e a struktúraváltozás mérésére. E kérdés megválaszolásához kissé távolabbról kell nekiindulnunk.

P. Sraffa kidolgozta a ricardoi rendszernek megfelelő értékmérés módját: olyan árrendszert definiált, amely lehetővé teszi az újratermelés zavartalan lebonyolítását. Ezt az „egyensúlyi" árrendszert, amely eleget tesz a Ricardo által felállított szigorú követelményeknek „önfinanszírozó" árrendszernek is nevezhetjük, mert ezekkel (és csak ezekkel) az árakkal számolva a termelés ágenseinek kiadásai és bevételei kölcsönösen kiegyenlítik egymást.

A gondolatmenetet a marxi újratermelési elméletre alkalmazva kitűnik, hogy az úgynevezett értékarányos árak az egyszerű újratermelést teszik lehetővé, míg az egyöntetű profitrátát szolgáltató termelési árak az egyöntetű ütemben bővülő újratermelés arányainak megvalósítását segítik elő.

Sraffa alapgondolata azonban felhasználható bármely gazdaság ökonómiai mértékrendszerének felállítására.

A mértékrendszer berendezése a dualitás elvének kiaknázásán alapul. Ha ugyanis van egy

$$\dot{x} = Ax \tag{24}$$

differenciál-egyenletnek eleget tevő rendszerünk, s ennek egy

$$x_t = e^{\lambda t}x_0\,, \qquad Ax_0 = \lambda x_0 \tag{25}$$

alakú egyensúlyi pályája, akkor a

$$pA = \lambda p \tag{26}$$

előírással definiált árrendszer használható fel a rendszer „mérésére". Mivel ez a p, a sajátvektorok általános tulajdonságai alapján perpendikuláris az A mátrix összes x_0-tól eltérő (tehát nem λ-hoz tartozó) sajátvektorára, ezért a px skalárszorzat a „mérés", tetszőleges x esetén felfogható úgy, mint az általános x vektort a (kalibrált) x_0 vektorra vetítő eljárás.

Ez a következőképpen látható be. Legyen A-nak egy második sajátvektora

$$Ax_i = \varrho x_i \qquad i = 1, \ldots, n-1, \tag{27}$$

akkor balról p-vel szorozva $pAx_i = \lambda px_i = \varrho px_i$. Így, ha $\lambda \neq \varrho$, akkor $(\lambda - \varrho)\,px_i = 0$ fennállásából $px_i = 0$ következik, azaz p merőleges az összes nem λ-hoz tartozó sajátvektorra.

A mérés, illetőleg az árrendszer tehát minden az egyensúlyi x_0 pályától eltérő megmozdulást honorálatlanul hagy — így ezen az árrendszeren az tartósan nem is mehet végbe, mert az x_0 pályától való eltérés esetén azonnal hiányok, illetőleg feleslegek lépnek fel az egyes ágazatokban.

Ilyen értelemben állítható, hogy bármely „ökonómiai tér” kielégíthetően rendezhető és mérhetővé tehető, hacsak ismerjük az ebben a térben működő gazdasági rendszer mozgástörvényeit. A rendszer sajátos működése az, amely — a dualitás elvére támaszkodva — a mértékrendszer megalkotását lehetővé teszi.

Ezt az elvet próbáljuk a következőkben kiaknázni arra, hogy egy bővített újratermelést folytató rendszer értékarányait meghatározzuk akkor, amikor ez a rendszer strukturális változásoknak (tehát technikai, ízlésbeli stb. fejlődésnek) van alávetve.

Az önfinanszírozó árrendszer

A tárgyalt változó arányoknak és struktúrának megfelelő, nyilván szintén változó r_t baloldali árvektort a primális oldal „tükörképe” szerint keresve, megpróbáljuk azt a

(28) $$r_t = e^{-\mu \tilde{R} t}\bar{p}$$

alakban előállítani, ahol $\bar{p}$ valamely konstans vektor. Ekkor a (18) ill. (22) egyenlet duálisaként kapjuk, hogy $\bar{p}$ a

(29) $$\bar{p}(1 - A - \mu B\tilde{R}) = 0$$

egyenletből nyerhető, s így $\bar{p}$ a $B\tilde{R}Q$ mátrix legnagyobb (pozitív) $\frac{1}{\eta}$ sajátértékéhez tartozó sajátvektor.

Mivel a (22) egyenlet $\bar{x}$ értékét a $Q\tilde{R}B$ mátrixból számítja, bizonyítanunk kell még, hogy e két mátrix legnagyobb sajátértéke azonos. Ez azonban belátható abból, hogy $(B\tilde{R}Q)^T = (Q^T\tilde{R}B^T)$, ahol a T betű transzpozíciót jelöl.

Közgazdaságilag ez úgy értelmezhető, hogy olyan árrendszer felel meg célunknak, ahol a befektetett termelési eszközök után számítva a $\mu r_1, \ldots, ur_n$ növekedési rátáknak megfelelő, tehát eltérő százalékos rátájú haszonkulcs térül meg az önköltségen kívül, s ezenkívül az árak a termelékenység növekedésének megfelelően és a (28) egyenlet által megadott módon tehát eltérő ütemekben állandóan csökkennek.

Infláció és termelékenység

Érdekesen interpretálható az a tény, hogy minden $e^{\varrho t}Ae^{-\varrho t}$ alakú matematikai transzformáció változatlanul hagyja az A mátrixot, tehát ϱ tetszőleges értéke mellett „egységtranszformáció” marad.

Ez az árrendszerre vonatkoztatva azt mondja ki, hogy a fent meghatározott árrendszer összefér egy ϱ ütemű inflációval — s így az áraknak nem kell szükségképpen csökkenniök. A volumenrendszerre vonatkoztatva pedig azt mondja ki, hogy a termelékenység általános, minden ágazatra (tehát a munkaerő szektorára is) kiterjedő növekedése észrevétlen marad, mert nem hoz magával változást, s ezért nem is beszélhetünk a termelékenység abszolút értékéről csupán relatív változásairól vagy viszonyáról.

(Beérkezett: 1978. január 26-án)

IRODALOM

1. Bacharach, M.: Biproportional Matrices and Input-Output Change. Cambridge, 1969. Cambridge Univ. Press.
2. Bellman, R.: Introduction to Matrix Analysis. New York—Toronto—London, 1960. p. 173. McGraw-Hill.
3. Bródy, A.: Érték és újratermelés 3.3.2. pont. Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
4. Carter, A.: Incremental Flow Coefficients for a Dynamic Input-Output Model with Changing Technology. Barna, T. (szerk.): Structural Interdependence and Economic Development. London, 1963. Macmillan & Co. Ltd.
5. Carter, A.: Structural Change in the American Economy. Cambridge, 1970. Harvard Univ. Press.
6. Christ, C.: A Review of Input-Output Analysis. Input-Output Analysis: An Appraisal. Studies in Income and Wealth. Princeton, 1955. Princeton Univ. Press.
7. Glattfelder, P.—Váczi, P.: Egy algoritmus input-output sémák előrebecslésének korrekciójára Szigma, 1970. 3. sz.
8. Ozaki, I.: The Effects of the Technological Changes on the Economic Growth of Japan, 1955—1970. KEIO Univ. 1974.
9. Sevaldson, P.: Changes in Input-Output Coefficients. Barna, T. (szerk.): Structural Interdependence, etc.
10. Szakolczai, Gy.—Vásárhelyi, P.: Az ágazati kapcsolatok mérlege technológiai koefficienseinek előrebecsült mátrixai Közgazdasági Szemle, 1967. dec.
11. Econometric Models for the National Economic Plan for the Second Half of the 1970's. Economic Planning Agency. Government of Japan. 1977.

MATHEMATICAL REPRESENTATION OF STRUCTURAL CHANGE

A simplified version of the RAS process is exploited to represent structural change. The dual, volume and price equilibrium vectors are characterized and the changes are connected with changes of productivity.

ОБ ИЗОБРАЖЕНИИ СТРУКТУРНОГО СДВИГА

Упрощенный вид метода РАС используется для изображения структурного сдвига. Определяются дуальные, равновесные векторы, обеспечивающие равновесие производственных отношений и цен, и вопрос перемена связывается с переменой производительности.