Mikó Gyula

# Sztochasztikus lineáris input-output modellek halmozott ráfordítási együtthatóiról

*Simonovits* cikkéből [1] ismeretes, hogy ha egy lineáris input-output modellben az $A$ közvetlen ráfordítási együtthatómatrix elemei teljesen független valószínűségi változók — úgy, hogy az $A'$ bármely realizációjára a pozitív domináns sajátérték $\lambda(A) < 1$ —, akkor a halmozott ráfordítási együtthatókat tartalmazó $Q$ matrixra igaz a következő egyenlőtlenség:

$$(E - \varepsilon\,[A'])^{-1} \leqq \varepsilon\,[(E - A')^{-1}]$$

(ahol $\varepsilon$ a várható érték képzés operátora, $'$ a valószínűségi változót jelöli, $E$ pedig az egységmátrix.)

Simonovits [1] azt is kimutatta, hogy

$$\varepsilon\,[(E - A')_{ij}^{-1}] \geqq (E - \varepsilon\,[A'])_{ij}^{-1} + \varepsilon[a'_{ij}]\,(\sigma_{ii}^2 + \sigma_{jj}^2) \quad i \neq j;\, i, j = 1, \ldots, n$$

és

$$\varepsilon\,[(E - A')_{ii}^{-1}] \geqq (E - \varepsilon\,[A'])_{ii}^{-1} + \sigma_{ii}^2 \quad i = 1, \ldots, n,$$

ahol az $[A]_{ij} = a_{ij}$, és $D^2(a'_{ij}) = \sigma_{ij}^2$.

Gyakorlati szempontból igen fontos a halmozott ráfordítási együttható pontosabb behatárolása: felső és alsó korlát megadása (vagy — ha lehetséges — eloszlásának meghatározása) — esetleg az $a_{ij}$ valószínűségi változókra tett további feltételezések árán is.

## A vizsgálat közgazdasági indokolása

A Leontief-modell egyik alapvető felhasználási területe a tervezett nettó termelés (output) előállításához szükséges bruttó termelés (input) meghatározása.

Ha a modell közvetlen ráfordítási együtthatóit úgy tekintjük, mint olyan értékeket, amely körül a valódi — vagy pedig majd a tervezett időszakban bekövetkező — érték szóródhat (vagyis esetleg nem pontosan a számításban felhasznált érték jön létre), akkor a közvetlen ráfordítási együtthatókat valószínűségi változóknak foghatjuk fel. A valószínűségi változók kényelmetlen kezelhetősége miatt a közgazdasági gyakorlatban szokás a valószínűségi változókat várható értékükkel helyettesíteni. Ez az eljárás esetünkben a szükséges bruttó termelés *szisztematikus alátervezését* eredményezi. Ugyancsak kisebb értékeket ad a közvetlen ráfordítási együtthatók várható értékével való számolás a tartalommutatókra is (egységnyi bruttó termékben levő halmozott bérköltség, illetve halmozott nyereség; stb.).

A vizsgálatunk célja, hogy az említett alulbecslés (ill. alultervezés) hibáját csökkentse, illetve alsó és felső korlátot adjon a tervezett nettó termeléshez szükséges bruttó termelés nagyságára, valamint — az egyszerűbb esetekben — a halmozott ráfordítási együtthatóknak és a szükséges bruttó termelésnek — mint valószínűségi változóknak — az eloszlását is vizsgálja.

A továbbiakban két feltételezést alkalmazunk a közvetlen ráfordítási együttható, mint valószínűségi változó eloszlására. Vizsgáljuk meg röviden, hogy ezek a feltételezések mennyire felelnek meg a közgazdasági valóságnak!

*Első feltevés:* A közvetlen ráfordítási együttható, mint valószínűségi változó, szimmetrikus eloszlású. Nézzük meg, hogyan és mitől válik a közvetlen ráfordítási együttható valószínűségi változóvá! Valószínűségi változóvá válhat a közvetlen ráfordítási együttható (illetve ennek „őse", az ágazatok közötti termékáramlás) a számbavételi pontatlanságok miatt. Mivel a mérleg összeállítását igen sok adatból végzik (vízszintesen és függőlegesen is koordinálva az összegrovatokkal), a központi határeloszlástétel értelmében az egyes adatokban levő hibák az összegezés, valamint az adatszolgáltatás függetlensége és tömegessége miatt szimmetrikus eloszlás irányába (pontosabban a normális eloszlás felé) húzzák az összeg eloszlását. A másik tipikus eset, amikor nem a benne rejlő hibák miatt tekintjük valószínűségi változóknak a közvetlen ráfordítási együtthatókat, hanem azért, mert a jövőbeni értékeikről csak valószínűségeloszlási szinten van információnk. Ettől az információtól függ, hogy feltételezhetjük-e a szimmetrikus eloszlás létét.

*Második feltevés:* A közvetlen ráfordítási együtthatók, mint valószínűségi változók, teljesen független rendszert alkotnak. A valószínűségi változók függetlenségének hipotézisére a „szükség" viszi rá a gyakorlati alkalmazót és a módszer kidolgozóját is, mivel egyfelől (az alkalmazó részéről) többnyire nem ismert a valószínűségi változók összefüggésének rendszere, másfelől (a módszer kidolgozója szempontjából) pedig e hipotézis nélkül a formulák lényegesen bonyolultabbá, szinte használhatatlanná válhatnak. Természetesen esetünkben sem tehetjük fel teljes joggal, hogy a közvetlen ráfordítási együtthatók változása között nincs összefüggés, a függetlenség hipotézise azonban első megközelítésben eredményesen alkalmazható, mivel nyújt némi tájékoztatást. Ezt az információt olyan mértékben vehetjük figyelembe, amilyen mértékben a valóságot helyesen tükrözi a függetlenség feltételezése.

## Két lemma

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$Q = [E - \varepsilon(A')]^{-1}$$

$$Q' = (E - A')^{-1}$$

ill. $$q_{kl} = [Q]_{kl}$$

és $$q'_{kl} = [Q']_{kl}.$$

*I. lemma*

Legyen $A' = A + B$, és álljon fenn $\lambda(A + B) < 1$. Ekkor

$$(E - A')^{-1} = Q + QBQ + QBQBQ + QBQBQBQ + \dots$$

*Az I. lemma bizonyítása:*

$$(E-A')^{-1}=[E-(A+B)]^{-1}=$$

$$=Q\{[E-(A+B)](E-A)^{-1}\}^{-1}=Q\{[(E-A)-B](E-A)^{-1}\}^{-1}=$$

$$=Q(E-BQ)^{-1}=Q+QBQ+QBQBQ+QBQBQBQ+\ldots,\ \text{ahol az}$$

$(E-BQ)^{-1}$ Leontief-inverzet hatványsorba fejtettük.

*II. lemma*

Legyen $[B]_{ij}=\xi_{ij}$. Ekkor:

$$[E-(A+B)]_{kl}^{-1}=q'_{kl}=q_{kl}+\sum_i\sum_j q_{ki}q_{jl}\xi_{ij}+$$

$$+\sum_i\sum_j\sum_p\sum_q q_{ki}q_{jp}q_{qr}q_{sl}\xi_{ij}\xi_{pq}+$$

$$+\sum_i\sum_j\sum_p\sum_q\sum_r\sum_s q_{ki}q_{jp}q_{qr}q_{sl}\xi_{ij}\xi_{pq}\xi_{rs}+$$

$$+\sum_i\sum_j\sum_p\sum_q\sum_r\sum_s\sum_u\sum_v q_{ki}q_{jp}q_{qr}q_{su}q_{vl}\xi_{ij}\xi_{pq}\xi_{rs}\xi_{uv}+\ldots$$

*A II. lemma bizonyítása:*

Írjuk fel $B$-t diadikus felbontásban:

$$B=\sum_i\sum_j e_ie_j^*\xi_{ij}.$$

Az I. lemma, valamint az

$$[YV\ldots WZ]_{pu}=\sum_q\sum_r\ldots\sum_s\sum_t y_{pq}v_{qr}\ldots w_{st}z_{tu}$$

mátrix-algebrai azonosság felhasználásával azonnal adódik a II. lemma állítása.

## Alsó korlát a halmozott ráfordítási együtthatók várható értékére

*I. tétel*

Legyenek az $a'_{ij}$ közvetlen ráfordítási együtthatók szimmetrikus, teljesen független rendszert alkotó valószínűségi változók, és legyen $D^2(a'_{ij})=\sigma^2_{ij}$. Ekkor a halmozott ráfordítási együtthatók várható értékére fennáll az

$$\varepsilon(q'_{kl})\geqq q_{kl}+\sum_i\sum_j q_{ki}q_{jl}q_{ji}\sigma^2_{ij}$$

egyenlőtlenség.

*Az I. tétel bizonyítása*

Legyen $\xi_{ij}=a'_{ij}-\varepsilon(a'_{ij})$, azaz $\xi_{ij}=a'_{ij}-a_{ij}$. Így $\xi_{ij}=0$, és $\sigma^2_{ij}=$ $=D^2(a'_{ij})=D^2(\xi_{ij})=\varepsilon(\xi^2_{ij})$. Ezért $\xi$ szimmetricitása miatt $\xi$ páratlanadik momentumai 0-val egyenlők. Tekintsük $q'_{kl}$ kifejtését a II. lemma alapján! A szereplő valószínűségi változók függetlensége miatt azoknak a tagoknak a várható értéke, amelyekben legalább egy valószínűségi változó a páratlanadik hatványon szerepel, 0-val egyenlő. A többi tag — ahol a valószínűségi változók csak páros hatványon szerepelnek — nem-negatívak (figyelembe véve azt is, hogy a halmozott ráfordítási együtthatók is nem-negatívak). A 0-val egyenlő, és a több valószínűségi változót tartalmazó tagokat elhagyva kapjuk az I. tétel állítását.

*II. tétel*

Ha a közvetlen ráfordítási együtthatók között — a szimmetrikus eloszlásúakon kívül — van jobbra aszimmetrikus eloszlású is, az I. tétel akkor is igaz.

*A II. tétel bizonyítása*

A jobbra aszimmetrikus valószínűségi változók páratlanadik centrális momentumai nem-negatívak, így az I. tétel esetén 0-vá vált tagok most nem-negatívak lesznek, ezért elhagyásuk az egyenlőtlenség kisebb oldaláról nem befolyásolja az egyenlőtlenség fennállását.

*I. következmény*

A fenti tételek alapján alsó korlátot adhatunk a tervezett nettó termeléshez szükséges bruttó termelést leíró vektor elemeire. Jelölje $c_k$ a $k$-adik ágazat nettó, $x_k$ pedig a bruttó termelését. Ekkor:

$$\varepsilon(x'_k) > \sum_l q_{kl} c_l + \sum_l \sum_i \sum_j q_{ki} q_{ji} q_{jl} \sigma_{ij}^2 c_l$$

Mivel $\sum_l q_{kl} c_l = x_l$, így

$$\varepsilon(x'_k) > x_k + \sum_i [q_{ki}(\sum_j q_{ji} x_j \sigma_{ij}^2)].$$

## A halmozott ráfordítási együtthatók eloszlása

*III. tétel*

Legyen a közvetlen ráfordítási együtthatók $A$ mátrixának — egy kivételével — minden eleme ismert konstans, csak az $a'_{ij}$ legyen valószínűségi változó, vagyis

$$A' = A + e_i e_j^* \xi,$$

ahol $a_{ij} + \xi \geq 0$. (Az $a'_{ij}$-re, illetve $\xi$-re *nem* kötjük ki a szimmetricitást!)
Ha

$$|\xi| < \frac{1}{q_{ij}}, \text{ akkor } q'_{kl} = q_{kl} + \frac{q_{ki} q_{jl} \xi}{1 - q_{ji} \xi}.$$

*A III. tétel bizonyítása*

Alkalmazzuk a II. lemmát, valamint a végtelen mértani sorozat összegképletét:

$$\begin{aligned} q'_{kl} &= q_{ki}\,q_{jl}\,\xi + q_{ki}\,q_{ji}\,q_{jl}\,\xi^2 + q_{ki}\,q_{ji}\,q_{ji}\,q_{jl}\,\xi^3 + q_{ki}\,q_{ji}\,q_{ji}\,q_{ji}\,q_{jl}\,\xi^4 + \ldots = \\ &= q_{kl} + q_{ki}\,q_{jl}\,\xi(1 + q_{ji}\,\xi + q_{ji}^2\,\xi^2 + q_{ji}^3\,\xi^3 + \ldots) = \\ &= q_{kl} + \frac{q_{ki}\,q_{jl}\,\xi}{1 - q_{ji}\,\xi}, \text{ ha } q_{ji}\,|\,\xi\,| < 1. \end{aligned}$$

*II. következmény*

Ha $\xi$ eloszlásfüggvénye $F(x)$, sűrűségfüggvény $f(x)$, akkor a $q'_{kl}$ halmozott ráfordítási együttható $G(x)$ eloszlás- és $g(x)$ sűrűségfüggvénye:

$$G(x) = F\left[\frac{1}{q_{ji}}\left(1 - \frac{\dfrac{q_{ki}\,q_{jl}}{q_{ji}}}{x - q_{kl} + \dfrac{q_{ki}\,q_{jl}}{q_{ji}}}\right)\right], \text{ illetve}$$

$$g(x) = \frac{q_{ki}\,q_{jl}}{\left[q_{ij}\left(x - q_{kl} + \dfrac{q_{ki}\,q_{jl}}{q_{ji}}\right)\right]^2} f\left[\frac{1}{q_{ji}}\left(1 - \frac{\dfrac{q_{ki}\,q_{jl}}{q_{ji}}}{x - q_{kl} + \dfrac{q_{ki}\,q_{jl}}{q_{ji}}}\right)\right].$$

*III. következmény*

A tervezett ágazati nettó termeléshez szükséges bruttó termelés — mint valószínűségi változó — a következő:

$$x'_k = x_k + q_{ki}\,x_j \frac{\xi}{1 - q_{ji}\,\xi}.$$

*1. Példa*

Nézzük meg, hogy ha a vegyiparnak ($v$) saját termeléséből való közvetlen felhasználását jelző ráfordítási együttható $a'_{vv}$ normális eloszlású valószínűségi változó

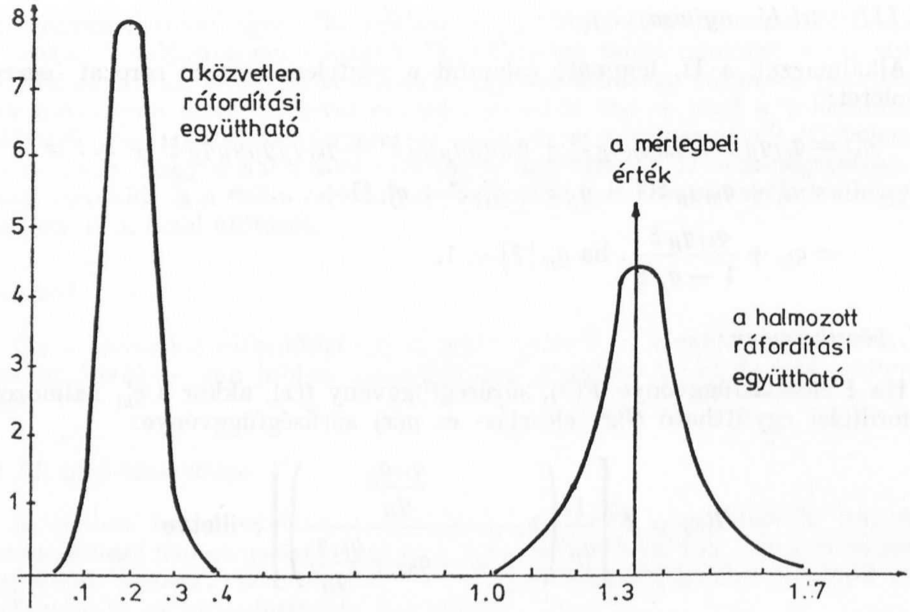
$$m = \varepsilon(a'_{vv}) = 0{,}2217$$

$$\sigma = D(a'_{vv}) = 0{,}05$$

paraméterekkel, akkor mi lesz a vegyiparnak a vegyipari termékekből való halmozott ráfordítását jelző $q'_{vv}$ együttható eloszlása! (Lásd az 1. ábrát.) (A mérleg alapján: $a_{vv} = 0{,}2217$ és $q_{vv} = 1{,}3492$.)

*2. Példa*

Vizsgáljuk meg, hogy a mezőgazdaság kemizálása — amit az 1 Ft értékű mezőgazdasági termékhez közvetlenül felhasznált vegyipari termékek értéké-




*1. ábra*

nek (mondjuk) 15%-os növekedése mutat — hogyan befolyásolja az egységnyi élelmiszeripari termékben „levő" — közvetlenül és közvetetten felhasznált — vegyipari termékek értékét; valamint ez a változás milyen mértékben növeli meg a bányászat, a vegyipar és a mezőgazdaság (adott nettó termelés biztosításához szükséges) bruttó termelésének nagyságát.

Az adatokat az 1972. évi, 21 ágazatos „A" típusú népgazdasági ÁKM-ből vettem.

A III. tétel alapján azt kapjuk, hogy az 1 Ft értékű mezőgazdasági termékhez közvetlenül felhasznált vegyipari termékek értékének fent leírt változása kb. 8%-kal emeli az egységnyi élelmiszeripari termékhez halmozottan felhasznált vegyipari termékek értékét.

A III. következmény alapján kiszámítható, hogy ez a változás a bányászati bruttó termelést kb. 1,9%-kal, a vegyipari bruttó termelést kb. 4,3%-kal, a mezőgazdasági bruttó termelést pedig 0,1%-kal emeli (mindegyik esetben az adott nagyságú nettó termelés biztosításához szükséges bruttó termelést). Ha a vegyipar esetén csak a közvetlenül a mezőgazdaságba irányuló termékmennyiséget emeltük volna 15%-kal, akkor ez csak 3,3%-os bruttó termelés emelkedést vont volna maga után, így — csak a vizsgált változásból adódóan — kb. 1%-kal aláterveztük volna a vegyipar szükséges bruttó termelését.

Vegyük figyelembe az eredmény szignifikáns voltának megítélésénél, hogy a $21 \times 21 = 441$ mérlegegyütthatóból csak egyetlenegyet változtattunk meg.

## Felső korlát a halmozott ráfordítási együtthatók várható értékére

*IV. tétel*

Ha a III. tétel feltételein túlmenően $\xi$-re az is fennáll, hogy szimmetrikus eloszlású a $[-a, a]$ intervallumon, akkor:

$$\varepsilon(q'_{kl}) < q_{kl} + q_{ki}\,q_{ji}\,q_{il}\,\sigma^2 + \frac{q_{ki}\,q_{ji}^4\,q_{il}}{(1-q_{ji}\,a)^5}\,\sigma^2.$$

*A IV. tétel bizonyítása*

Írjuk fel $q'_{kl}$-t a III. tétel alapján — némileg átalakított formában — és képezzük $q'_{kl}$ várható értékét:

$$\varepsilon(q'_{kl}) = q_{kl} + \frac{q_{ki}\,q_{jl}}{q_{ji}^2}\left(\varepsilon\left(\frac{1}{\dfrac{1}{q_{ji}} - a}\right) - q_{ij}\right)$$

A továbbiakban az $\eta = \dfrac{1}{\dfrac{1}{q_{ij}} - \xi}$ valószínűségi változót kell vizsgálnunk. Egyszerűen adódik, hogy ha $\xi$ sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor az $\eta$ $h(x)$ sűrűségfüggvénye

$$h(x) = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{q_{ji}} - \frac{1}{x}\right), \qquad \text{az } \left[\frac{1}{\dfrac{1}{q_{ji}} + a}, \frac{1}{\dfrac{1}{q_{ji}} - a}\right]$$

tartományon. Így

$$\varepsilon(\eta) = \int\limits_{(q_{ji}^{-1}+a)^{-1}}^{(q_{ji}^{-1}-a)^{-1}} x\,\frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{q_{ji}} - \frac{1}{x}\right) dx.$$

Bevezetve az $\dfrac{1}{q_{ji}} - \dfrac{1}{x} = z$ helyettesítést: $\varepsilon(\eta) = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{1}{\dfrac{1}{q_{ij}} - z}\, f(z)\,dz.$

Fejtsük McLaurin-sorba az $\dfrac{1}{\dfrac{1}{q_{ji}} - z}$ kifejezést:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{q_{ji}} - z} = q_{ji} - q_{ji}^2 z + q_{ji}^3 z^2 - q_{ji}^4 z^3 + \left(\frac{1}{\dfrac{1}{q_{ji}} - \nu}\right)^5 z^4,$$

ahol $\nu \in [-a, a]$. Helyettesítsük vissza a sorbafejtett kifejezést, és írjuk fel az integrált tagonként! Az egyes integrálok a $\xi$ valószínűségi változó momentumai, s mivel $\varepsilon(\xi) = 0$, és $\xi$ szimmetrikus:

$$\varepsilon(\eta) = q_{ji} + q_{ji}^3 \sigma^2 + \left(\frac{1}{\dfrac{1}{q_{ji}} - \nu}\right)^5 \int_{-a}^{a} z^4 f(z)\, dz.$$

A maradéktag értékének behatárolásánál a következőket kell meggondolni:

Mivel az integrál nem-negatív, s a $|\xi| < \dfrac{1}{q_{ji}}$ feltételezés miatt a szorzókonstans pozitív, $\varepsilon(\eta)$-ra a maradéktag elhagyásával alsó korlátot képezhetünk, amely $q'_{kl}$-re vonatkoztatva megfelel az I. tétel állításának (amikor csak az $a'_{ij}$ közvetlen ráfordítási együtthatót vesszük valószínűségi változónak).

A maradéktag maximális értékét akkor veszi fel, ha $\nu = a$. Az integrál értékét $\sigma^2$-tel felülbecsülhetjük, ha $|z| < 1$ (vagyis $|\xi| < 1$, ami a feladat közgazdasági tartalma miatt mindig fennáll). Így a vizsgált intervallumon $z^4 < z^2$, ezért

$$\int_{-a}^{a} z^4 f(z)\, dz < \int_{-a}^{a} z^2 f(z)\, dz = \sigma^2.$$

Tehát

$$\varepsilon(\eta) < q_{ij} + q_{ji}^3 \sigma^2 + \left(\frac{1}{\dfrac{1}{q_{ji}} - a}\right)^5 \sigma^2.$$

A kapott eredményt visszaírva $\varepsilon(\eta) = \varepsilon\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{q_{ji}} - \xi}\right)$ helyére, már adódik a IV. tétel állítása.

*(Beérkezett: 1977. május 24.)*

## IRODALOMJEGYZÉK

[1] Simonovits, A.: *A Leontief-inverz alá-, illetve fölébecslésének egyik okáról* Szigma, 1973. 4. szám.

## ON CUMULATIVE INPUT COEFFICIENTS OF STOCHASTIC LINEAR INPUT-OUTPUT MODELS

Simonovits [1] has shown that if the elements of the matrix of direct input coefficients are fully independent probability variables then the Leontief-inverse (the matrix of cumulative input coefficients) computed from their expected values will be smaller than or equal to the expected value of Leontief-inverse containing probability variables, and also a lower limit has been given for the expected value of the inverse.

In the present article I am going to make proportions concerning the distribution of cumulative input coefficients as well as the lower and upper limits of their expected value in the following special cases:

a) lower limit for the excepted values of cumulative input coefficients if direct input coefficients are probability variables forming a fully independent system with symmetrical distribution;

b) distribution of cumulative input coefficients if only one single direct input coefficient is probability variable;

c) upper limit for the expected value of cumulative input coefficients if only one single direct input coefficient is probability variable and even this is of symmetrical distribution over a given interval.

## О КОЭФФИЦИЕНТАХ СОВОКУПНЫХ ЗАТРАТ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ВВОДА-ВЫВОДА

*Шимонович* [1] доказал, что если элементы матрицы коэффициентов прямых затрат являются полностью независимыми переменными вероятности, то инверсия *Леонтьева*, расчитанная на основании ожидаемых их значений (матрица коэффициентов совокупных затрат) меньше или равна ожидаемому значению инверсии Леонтьева, содержащей вероятностные переменные и, в то же время, она дает нижний предел ожидаемого значения инверсии.

В данной статье даются выводы относительно распределения, нижнего и верхнего предела ожидаемого значения коэффициентов совокупных затрат для следующих специальных случаев:

а) нижний предел ожидаемого значения коэффициента прямых затрат в том случае, если коэффициенты прямых затрат представляют собой переменные вероятностные с симметричным распределением, образующие полностью независимую систему;

б) распределение коэффициентов совокупных затрат в том случае, если вероятностной переменной является только один единственный коэффициент прямых затрат;

в) верхний предел относительно ожидаемого значения коэффициента совокупных затрат в том случае, если вероятностной переменной является только один единственный коэффициент прямых затрат и на данном интервале имеет симметричное распределение.