Szidarovszky Ferenc

A többtermékes oligopol játék egyensúly problémájáról

1. Az oligopol játék az egyik legismertebb játékelméleti probléma. Egy gyakran fellépő gazdasági helyzet egyszerűsített változata.

Tegyük fel, hogy N termelő egység M féle különböző terméket állít elő és ugyanazon a piacon értékesíti. Jelölje $x_k^{(m)}$ $(1 \leq k \leq N,\ 1 \leq m \leq M)$ a k-adik termelő által az m-edik termékből előállított mennyiséget. Ekkor a k-adik termelő termelési programja egy $x_k = (x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(M)})$ vektorral jellemezhető $(1 \leq k \leq N)$, amelynek komponensei az általa termelt mennyiségeket adják.

Jelölje f_m az m-edik $(1 \leq m \leq M)$ termék egységárát, valamint K_k a k-adik $(1 \leq k \leq N)$ termelő költségfüggvényét, ekkor a k-adik termelő nyeresége a

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{m=1}^{M} x_k^{(m)} f_m\,(s^{(1)}, \ldots, s^{(M)}) - K_k(x_k) \tag{1.1}$$

képlettel adható meg, ahol $m = 1,2, \ldots, M$ esetén $s^{(m)} = \sum_{k=1}^{N} x_k^{(m)}$.

Tegyük fel továbbá, hogy $k = 1,2, \ldots, N$ esetén adott valamilyen $X_k \subset R^M$ halmaz, amelynek elemei a k-adik termelő lehetséges termelési programjait adják meg. Minthogy az egyes termékek gyártása nem független, X_k nem feltétlenül intervallumok direkt szorzata. Ugyancsak feltételezzük, hogy a játékosok szimultán X stratégiahalmaza sem feltétlenül direkt szorzata az egyes játékosok X_k stratégiahalmazának.

Az X_k stratégiahalmazokkal és a φ_k kifizetőfüggvényekkel rendelkező játékot többtermékes oligopol játéknak nevezzük, és a játék (Nash-féle) egyensúlypontján olyan $x^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*) \in \times_{k=1}^{N} X_k$ vektort értünk, amelyre $k = 1,2, \ldots, N$ és tetszőleges $x_k \in X_k$ mellett

$$\varphi_k\,(x_1^*, \ldots, x_k^*, \ldots, x_N^*) \geq \varphi_k\,(x_1^*, \ldots, x_k, \ldots, x_N^*). \tag{1.2}$$

A többtermékes lineáris esetre a [13] dolgozatban szerepel az egyensúlypont létezését és egyértelműségét biztosító eredmény, és ugyanebben a dolgozatban kimutattam, hogy a játék egyensúlyproblémája egy konvex, kvadratikus programozási feladattal ekvivalens.

Az egytermékes esetre először *Burger* [2] adott gyakorlatban is jól használható eredményt, alkalmas monotonítási és konvexitási feltételeken kívül az ár- és költségfüggvények kétszeri differenciálhatóságát is feltételezte. Ugyanakkor azt is megkövetelte, hogy a játék szimmetrikus legyen, azaz az egyes termelők költségfüggvényei azonosak legyenek. Ezt az eredményt és Burger módszerét először a nemszimmetrikus esetre sikerült általánosítanom [9], majd az oligopol játék csoportegyensúly-pontjának létezésére és egyértelműségére adtam feltételeket [10], amelyek az előző eredmények általánosításai. Velem egyidőben *Opitz* is [6] bebizonyította a [9] dolgozat unicitástételét, azonban nem adott numerikus eljárást az egyensúlypont kiszámítására. *Manas* [5] a lineáris esetet vizsgálta, a [13] dolgozat ezeket az eredményeket általánosítja a többtermékes esetre. A [11] dolgozat tartalmazza a témakör legújabb és legáltalánosabb tételeit és módszereit, és a legfontosabb irodalmi utalásokat.

Általános n-személyes játékok egyensúlypontjainak egyértelműségére *Rosen* adott elégséges feltételt [7]. A kifizetőfüggvények folytonos differenciálhatóságát tételezte fel. A jelen és a [11] dolgozatban a kifizetőfüggvények nem feltétlenül differenciálhatók, így Rosen eredményeit alkalmazni nem tudjuk.

A játék bővítésével foglalkozott *Frank, Kamien* és *Schwartz* [3], [4]. Egy konkrét vízgazdálkodási alkalmazát mutat be az [1] dolgozat.

2. Először belátjuk a következő segédtételt.

Lemma. Legyen $g\colon R^M \to R^M$; és a g függvény értelmezési tartománya, $\mathfrak{D}(g)$ konvex halmaz a nemnegatív térnyolcadban. Tegyük fel, hogy g minden komponense konkáv és folytonosan differenciálható. Jelölje $\mathbf{J}$ a g Jacobi mátrixát. Ha tetszőleges $x \in \mathfrak{D}(g)$ esetén $\mathbf{J}(x) + \mathbf{J}(x)^T$ negatív szemidefinit, akkor a $h(x) = x^T g(x)$ függvény konkáv.

Bizonyítás. Jelölje ∇ a gradiensképzés operátorát, ekkor egyszerű számolással adódik, hogy

$$\nabla h(x)^T = g(x)^T + x^T \mathbf{J}(x) . \tag{2.1}$$

Minthogy g komponensei konkávok, tetszőleges x, $y \in \mathfrak{D}(g)$ esetén

$$g(y) - g(x) \leq \mathbf{J}(x)\,(y - x) . \tag{2.2}$$

A $\mathbf{J}(x) + \mathbf{J}(x)^T$ mátrixra tett feltételünk alapján x, $y \in \mathfrak{D}(g)$ mellett

$$0 \geq \frac{1}{2}(y - x)^T\,[\mathbf{J}(x) + \mathbf{J}(x)^T]\,(y - x) =$$

$$= (y - x)^T\,\mathbf{J}(x)^T\,(y - x).$$

amelyből (2.2) felhasználásával azonnal adódik, hogy

$$y^T[g(y) - g(x)] \leq y^T\,\mathbf{J}(x)(y - x) = (y - x)^T\,\mathbf{J}(x)^T\,y \leq (y - x)^T\,\mathbf{J}(x)^T\,x .$$

Ebből pedig egyszerű átalakítással nyerjük, hogy

$$(y - x)^T\,[g(x) + \mathbf{J}(x)^T\,x] \geq y^T\,g(y) - x^T\,g(x) ,$$

amellyel h konkavitását beláttuk.

Tegyük fel ezután a következőket:

A) Létezik olyan $D \subset R^M$ konvex, zárt halmaz, hogy $m = 1,2, \ldots, M$ és $(s^{(1)}, \ldots, s^{(M)}) \notin D$ esetén $f_m(s^{(1)}, \ldots, s^{(M)}) = 0$;

B) $m = 1,2, \ldots, M$ esetén f_m folytonosan differenciálható, konkáv, valamint tetszőleges $s \in D$ esetén $\mathbf{J}(s) + \mathbf{J}(s)^T$ negatív szemidefinit, ahol $\mathbf{J}$ jelöli az $f = (f_1, \ldots, f_M)$ függvény Jacobi mátrixát;

C) tetszőleges $(s^{(1)}, \ldots, s^{(M)}) \in D$ és $0 \leq \tilde{s}^{(m)} \leq s^{(m)}$ $(1 \leq m \leq M)$ mellett $(s^{(1)}, \ldots, \tilde{s}^{(m)}, \ldots, s^{(M)}) \in D$;

D) K_k $(1 \leq k \leq N)$ folytonos, konkáv és valamennyi változójában szigorúan növekedő a $\mathfrak{D}(K_k) = X_k$ halmazon;

E) a játékosok szimultán $X \subset \mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} X_k$ stratégiahalmaza konvex, korlátos zárt, valamint $(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in X$, $0 \leq \tilde{x}_k^{(m)} \leq x_k^{(m)}$ $(1 \leq k \leq N,\ 1 \leq m \leq M)$ mellett $(x_1, \ldots, \tilde{x}_k, \ldots, x_N) \in X$, ahol $\tilde{x}_k = (x_k^{(1)}, \ldots, \tilde{x}_k^{(m)} \ldots, x_k^{(M)})$.

Tétel. A tett feltételek mellett a többtermékes oligopol játék rendelkezik legalább egy egyensúlyponttal.

Bizonyítás. A tétel bizonyítása több lépésből áll.

a) Először belátjuk, hogyha $x^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$, $(x_k^* = (x_k^{(1)*}, \ldots, x_k^{(M)*})$, $k = 1,2, \ldots, N)$ a játék egyensúlypontja, akkor $s^* \in D$, ahol

$$s^* = (\sum_{k=1}^{N} x_k^{(1)*}, \ldots, \sum_{k=1}^{N} x_k^{(M)*}).$$

Tegyük fel, az állítással ellentétben, hogy $s^* \notin D$. Ha D az üres halmaz, akkor az árfüggvények azonosan zérusok, így $x^* = 0$ a játék egyetlen egyensúlypontja a költségfüggvények szigorú növekedése következtében. Ellenkező esetben s^* valamelyik komponense pozitív, így létezik olyan p és q, hogy $x_p^{(q)*} > 0$. A D halmaz zártsága alapján pedig létezik olyan $0 \leq x_p^{(q)} < x_p^{(q)*}$, hogy

$$(\sum_{k=1}^{N} x_k^{(1)*}, \ldots, \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{N} x_k^{(q)*} + x_p^{(q)}, \ldots, \sum_{k=1}^{N} x_k^{(M)*}) \notin D.$$

Ekkor

$$\varphi_p(x) = -K_p(x_p^{(1)*}, \ldots, x_p^{(q)}, \ldots, x_p^{(M)*}) > -K_p(x_p^*) = \varphi_p(x^*),$$

amely ellentmond (1.2)-nek.

b) Tekintsük ekkor az eredeti kifizetőfüggvényekkel, eredeti stratégiahalmazokkal, valamint az

$$S = \{ x \mid x \in X, \quad x = (x_1, \ldots, x_N), \quad x_k = (x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(M)}), 1 \leq k \leq N,$$

$$(\sum_{k=1}^{N} x_k^{(1)}, \ldots, \sum_{k=1}^{N} x_k^{(M)}) \in D\}$$

redukált szimultán stratégiahalmazzal rendelkező játékot. Bebizonyítjuk, hogy az egyensúlypontok tekintetében a redukált játék ekvivalens az eredeti oligopol játékkal.

A bizonyítás a) pontja alapján az eredeti játék bármely egyensúlypontja egyúttal egyensúlypontja a redukált játéknak. Legyen ezután $x^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$ $(x_k^* = (x_k^{(1)*}, \ldots, x_k^{(M)*}),\ k = 1,2, \ldots, N)$ a redukált játék egy egyensúlypontja. Bebizonyítjuk, hogy x^* egyensúlypontja az eredeti játéknak is. Legyen k rögzített, és x_k olyan stratégiavektor, hogy $x = (x_1^*, \ldots, x_k, \ldots x_N^*) \in X$. Ha $x \in S$, akkor (1.2) nyilvánvalóan teljesül x^* egyensúlypont lévén, ha pedig $x \notin S$, akkor

$$\varphi_k(x_1^*, \ldots, x_k, \ldots, x_N^*) = -K_k(x_k) < -K_k(0) = \varphi_k(x_1^*, \ldots, 0, \ldots, x_N^*) \leq$$
$$\leq \varphi_k(x^*), \text{ hiszen } (x_1^*, \ldots, 0, \ldots, x_N^*) \in S.$$

c) A redukált játék a segédtétel alapján nyilvánvalóan kielégíti a Nikaido—Isoda-tétel feltételeit [8], így a játék rendelkezik legalább egy egyensúlyponttal.

Megjegyzés. Az $M = 1$ esetben a Jacobi-mátrixra vonatkozó feltétel nyilvánvalóan az $f_1'(s) \leq 0$ feltétellel azonos, így a tétel a [9] dolgozat eredménye és a [11] dolgozat 1. tétele egzisztenciát biztosító állításának élesítése.

Összefoglaló

A konkáv többtermékes oligopol játék egyensúlypontjára vonatkozó egzisztencia tétel és annak bizonyítása a cikk fő eredménye. A tétel a szerző néhány korábbi eredményének általánosítása.

(Beérkezett: 1976. október 20.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Bogárdi, I.—Szidarovszky, F.: Application of game theory in water management. Applied Mathematical Modelling, 1976, Vol. 1, pp. 16—20.
2. Burger, E.: Einführung in die Theorie der Spiele. de Gruyter, Berlin, 1959.
3. Frank, C. R.: Entry in a Cournot market. Review of Economic Studies, 1965, pp. 245—250.
4. Kamien, M. I.—Schwartz, N. L.: Cournot oligopoly with uncertain entry, Review of Economic Studies, 1975, pp. 125—131.
5. Manas, M.: A linear oligopoly game. Econometrica, 40, 1972, pp. 917—922.
6. Opitz, O.: Spieltheoreticsche Aussagen im Oligopolproblem. Zeitschrift für Nationalökonomie, 1970 (3), pp. 475—482.
7. Rosen, J. B.: Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games. Econometrica, 33, 1965, pp. 520—534.
8. Szép, J.—Forgó, F.: Bevezetés a játékelméletbe, Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
9. Szidarovszky, F.: On the oligopol game, K. Marx University of Economics, Techn. Rep., 1970—1.
10. Szidarovszky, F.: Az oligopol játék csoportegyensúly-problémája, Budapest, 1974. Kandidátusi értekezés.
11. Szidarovszky, F.: A konkáv oligopol probléma, ELTE. TTK. Numerikus és Gépi Matematikai Tanszék kiadványa, 1976—4.

ON THE EQUILIBRIUM PROBLEM OF MULTI-PRODUCT OLIGOPOLY GAME

The paper deals with the oligopoly problem, one of the best known economic games. This is a multiproduct market game formulated for several producers. The task is to determine such a production programme for individual producers that is optimum for all of them provided, of course, that other producers keep the agreement. In the paper conditions are presented whereby the game satisfies the conditions of the Nikaido-Isoda theorem ensuring the existence of the equilibrium point of concave games. For proving the game a lemma should be applied providing sufficiency conditions for the concavity of functions of the form $x^T g(x)$. The results of the study are generalizations of the authors previous theorems on the one-product case.

О ПРОБЛЕМЕ РАВНОВЕСИЯ ОЛИГОПОЛЬНОЙ ИГРЫ С НЕСКОЛЬКИМИ ТОВАРАМИ

Автор статьи занимается одной из наиболее известных игр — олигопольной проблемой. Это — рыночная игра с несколькими товарами, сформулированная для случая с наличием нескольких производителей. Задача состоит в определении такой производственной программы для отдельных производителей, которая была бы оптимальной для каждого из них, предполагая естественно, что остальные соблюдают согласование. В статье задаются условия, согласно которым игра должна удовлетворять условиям теоремы Никаидо-Изода, обеспечивающей наличие точки равновесия для вогнутых игр и таким образом игра имеет точку равновесия. Для доказательства игры следует применять лемму, обеспечивающую достаточные условия для вогнутости функлий x^Tg(x). Результаты данного труда обобщают положения, установленные автором ранее по отношению к однотоварным играм.