Szidarovszky Ferenc

A nem-differenciálható oligopol probléma

A [2], [3] és [4] dolgozatomban alkalmas monotonitási, konvexitási és differenciálhatósági feltételek mellett foglalkoztam az oligopol játék egyensúlypontjának létezésével és egyértelműségével. Ebben a dolgozatban pedig ugyanezekkel a kérdésekkel foglalkozom, amikor a differenciálhatósági feltételek nem teljesülnek.

1. Az egytermékes játék a következőképpen fogalmazható meg. Tegyük fel, hogy n termelő ugyanazt a terméket állítja elő és ugyanazon a piacon együtt értékesíti. Jelölje f az árfüggvényt, K_k, x_k, L_k pedig a k-adik $(1 \leq k \leq n)$ termelő költségfüggvényét, termelési mennyiségét és termelési korlátját. Ekkor a k-adik termelő (játékos) stratégiahalmaza a $[0, L_k]$ intervallum, kifizetőfüggvénye pedig

$$\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - K_k(x_k). \tag{1.1}$$

A játék (Nash-féle) egyensúlypontja olyan $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ vektor, amelyre

a) $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén $x_k^* \in [0, L_k]$;

b) $k = 1, 2, \ldots, n$ és tetszőleges $x_k \in [0, L_k]$ esetén

$$\varphi_k(x_1^*, \ldots, x_k^*, \ldots, x_n^*) \geq \varphi_k(x_1^*, \ldots, x_k, \ldots, x_n^*). \tag{1.2}$$

A játék egyensúlyproblémájának vizsgálatáról a [4] dolgozat ad áttekintést. Igaz a következő tétel ([3]):

1. Tétel

Tegyük fel a következőket:

1. Létezik olyan $\xi > 0$ állandó, hogy

a) $s \geq \xi$ esetén $f(s) = 0$,

b) a $[0, \xi]$ intervallumon f differenciálható, konkáv és szigorúan monoton csökkenő.

2. $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén a $[0, L_k]$ intervallumon K_k folytonos, konvex és szigorúan monoton növekedő.

Ekkor a játék pontosan egy egyensúlyponttal rendelkezik.

Bebizonyítható, hogy abban az esetben, amikor f folytonos és nem differenciálható, az egyensúlypont létezése továbbra is igaz. Viszont az egyensúlypont egyértelműsége általában nem biztosított. Ennek illusztrálására tekintsünk egy példát.

Példa. Legyen $n = 2$; $L_1 = L_2 = 2{,}5$; $K_1(x) = K_2(x) = 0{,}5x$;

$$f(s) = \begin{cases} 1{,}75 - 0{,}5s, & \text{ha } 0 \leq s \leq 1{,}5 \\ 2{,}5 - s, & \text{ha } 1{,}5 \leq s \leq 2{,}5 \\ 0, & \text{ha } s \geq 2{,}5. \end{cases}$$

Bebizonyítjuk, hogy az

$$X^* = \{(x_1, x_2) | 0{,}5 \leq x_1 \leq 1,\ 0{,}5 \leq x_2 \leq 1,\quad x_1 + x_2 = 1{,}5\}$$

halmaz valamennyi eleme egyensúlypontot szolgáltat.

Tekintsük most rögzített $x^* \in [0{,}5;\ 1]$ esetén a

$$\psi(x) = xf(1{,}5 - x^* + x) - K_k(x)$$

függvényt. Ekkor ψ bal oldali deriváltja az x^* helyen

$$x^*(-0{,}5) + 1 - 0{,}5 = 0{,}5 - 0{,}5x^*,$$

amely $x^* \leq 1$ esetén nemnegatív. A ψ függvény jobb oldali deriváltja pedig

$$x^*(-1) + 1 - 0{,}5 = 0{,}5 - x^*,$$

amely $x^* \geq 0{,}5$ esetén nempozitív.

Tehát $0{,}5 \leq x^* \leq 1$ esetén x^* a ψ függvény lokális maximumhelye. Minthogy ψ konkáv, x^* globális maximumhely is. Így $k = 1{,}2$ esetén (1.2) fennáll, vagyis a játék kontinuum sok egyensúlyponttal rendelkezik.

2. A továbbiakban azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy az f függvény differenciálhatóságát folytonossággal helyettesítve és megtartva az 1. Tétel többi feltételét milyen struktúrájú az egyensúlypontok halmaza. Az eredményhez több lépésben juthatunk el.

Rögzítsük most k értékét ($1 \leq k \leq n$), és vezessük be a következő jelöléseket

$$f_\delta^+(s) = \frac{f(s+\delta) - f(s)}{\delta} \quad (0 \leq s < s + \delta \leq L),$$

$$f_\delta^-(s) = \frac{f(s) - f(s-\delta)}{\delta} \quad (0 \leq s - \delta < s \leq L),$$

$$K_{k\delta}^+(t) = \frac{K_k(t+\delta) - K_k(t)}{\delta} \quad (0 \leq t < t + \delta \leq L_k),$$

$$K_{k\delta}^-(t) = \frac{K_k(t) - K_k(t-\delta)}{\delta} \quad (0 \leq t - \delta < t \leq L_k),$$

ahol $L = \min \{\xi;\ \sum_{i=1}^{n} L_i\}$. Legyen továbbá

$$\varphi_\delta^+(s, t) = f(s + \delta) + tf_\delta^+(s) - K_{k\delta}^+(t), \tag{2.1}$$

$$\varphi_\delta^-(s, t) = f(s - \delta) + tf_\delta^-(s) - K_{k\delta}^-(t). \tag{2.2}$$

Az f és K_k függvényekre tett feltételekből azonnal adódik, hogy rögzített δ, s ill. δ, t mellett φ_δ^+ és φ_δ^- t-nek ill. s-nek szigorúan csökkenő függvénye, továbbá tetszőleges t és δ_1, $\delta_2 > 0$ mellett $\varphi_{\delta_1}^-(s, t) \geq \varphi_{\delta_2}^+(s, t)$. Könnyen belátható továbbá, hogy rögzített s és t mellett φ_δ^+ δ-nak szigorúan csökkenő, φ_δ^- pedig szigorúan növekedő függvénye.

Legyen továbbá rögzített $s \in [0, L]$ mellett

$$\psi_k(s, x, t) = tf(s - x + t) - K_k(t), \tag{2.3}$$

valamint

$$X_k(s) = \{x_k | 0 \leq x_k \leq L_k, \ \psi_k(s, x_k, x_k) = \max_t \psi_k(s, x_k, t)\}. \tag{2.4}$$

1. Lemma.

a) $0 \in X_k(s)$ akkor és csak akkor, ha

$$\varphi_\delta^+(s, 0) \leq 0 \quad (s + \delta \leq L, \ \delta \leq L_k);$$

b) $L_k \in X_k(s)$ akkor és csak akkor, ha

$$\varphi_\delta^-(s, L_k) \geq 0 \quad (0 \leq s - \delta, \ \delta \leq L_k);$$

c) $0 < t < L_k$ esetén $t \in X_k(s)$ akkor és csak akkor, ha

$$\varphi_{\delta_1}^-(s, t) \geq 0 \geq \varphi_{\delta_2}^+(s, t) \quad (0 \leq s - \delta_1, \delta_1 \leq t, \ s + \delta_2 \leq L, \ t + \delta_2 \leq L_k).$$

Bizonyítás.

Nyilvánvaló, hogy egy $t \in [0, L_k]$ érték akkor és csak akkor eleme az $X_k(s)$ halmaznak, ha

$$(t - \delta_1) f(s - \delta_1) - K_k(t - \delta_1) \leq tf(s) - K_k(t) \quad (0 \leq s - \delta_1, \delta_1 \leq t)$$

$$(t + \delta_2) f(s + \delta_2) - K_k(t + \delta_2) \leq tf(s) - K_k(t) \quad (s + \delta_2 \leq L, \ t + \delta_2 \leq L_k).$$

Ebből pedig egyszerű átalakítással nyerjük az állítást.

2. Lemma.

Az $X_k(s)$ halmaz nem üres, és egy zárt intervallum.

Bizonyítás.

Tegyük fel, hogy az 1. Lemma *a)* és *b)* része nem teljesül. Ekkor létezik olyan Δ_1, $\Delta_2 > 0$, hogy $\varphi_{\Delta_1}^+(s, 0) > 0$, valamint $\varphi_{\Delta_2}^-(s, L_k) < 0$.

Ekkor pedig $\varphi_{\Delta_1}^+$ folytonossága alapján létezik olyan $u > 0$, hogy $\varphi_{\Delta_1}^+(s, u) > 0$, valamint φ_δ^+ δ-ban való csökkenése alapján tetszőleges $0 < \delta \leq \Delta_1$ mellett $\varphi_\delta^+(s, u) > 0$, így $\varphi_\delta^-(s, u) > 0$ és φ_δ^- δ-ban való növekedése miatt $\varphi_{\delta_1}^-(s, u) > 0$ tetszőleges $\delta_1 > 0$ mellett. Tekintsük most a

$$T = \{t | \varphi_\delta^-(s, t) \geq 0, \ \text{tetszőleges } \delta > 0\} \tag{2.5}$$

halmazt. A φ_δ^- t-beli folytonossága következtében T zárt, így $t_0 = \sup \{t | t \in T\} \in T$, valamint $u \in T$, $L_k \notin T$. Tehát $0 < t_0 < L_k$. Bebizonyítjuk, hogy t_0 eleget tesz az 1. Lemma *c)* feltételének. Tegyük fel ennek ellenkezőjét, ekkor alkalmas

$\Delta > 0$ mellett $\varphi_\Delta^+(s, t) > 0$. A φ_Δ^+ függvény t-beli folytonossága alapján van olyan $u > 0$, hogy $\varphi_\Delta^+(s, t_0 + u) > 0$ és φ_δ^+ δ-ban való csökkenése alapján $0 < \delta \leq \Delta$ mellett $\varphi_\delta^+(s, t_0 + u) > 0$ és így $\varphi_\delta^-(s, t_0 + u) > 0$. A φ_δ^- függvény δ-ban való növekedése alapján tetszőleges $\delta > 0$ mellett $\varphi_\delta^-(s, t_0 + u) > 0$, vagyis $t_0 + u \in T$, amely ellentmond t_0 definíciójának. Tehát t_0-ra az 1. Lemma *c)* esete vonatkozik, vagyis $t_0 \in X_k(s)$.

Tegyük ezután fel, hogy $t_1 < t_2$, $t_1 \in X_k(s)$, $t_2 \in X_k(s)$. Legyen $t_1 < t < t_2$. Bebizonyítjuk, hogy $t \in X_k(s)$, vagyis $X_k(s)$ valamilyen intervallum. Tegyük először fel, hogy $t_1 = 0$, $t_2 \leq L_k$. Ekkor elég kis δ_1, δ_2, δ_3 mellett $\varphi_{\delta_1}^+(s, 0) \leq 0$. $\varphi_{\varrho_2}^-(s, t_2) \geq 0 \geq \varphi_{\delta_3}^+(s, t_2)$ és φ_δ^-, φ_δ^+ t-beli monotonitása alapján $\varphi_{\delta_2}^-(s, t) > 0 > \varphi_{\delta_3}^+(s, t)$, azaz $t \in X_k(s)$. A bizonyítást ugyanúgy kell elvégeznünk a $0 < t_1$, $t_2 = L_k$ esetben is. Tekintsük ezután a $0 < t_1 < t_2 < L_k$ esetet. Ekkor az 1. Lemma alapján

$$\varphi_{\delta_1}^-(s, t_1) \geq 0 \geq \varphi_{\delta_2}^+(s, t_1)$$

$$\varphi_{\delta_3}^-(s, t_2) \geq 0 \geq \varphi_{\delta_4}^+(s, t_2)$$

tetszőleges δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 mellett. Ekkor φ_δ^+, φ_δ^- monotonitása alapján $\Delta_1 \leq \min\{\delta_1, \delta_3\}$, $\Delta_2 \leq \min\{\delta_2, \delta_4\}$ esetén $\varphi_{\Delta_1}^-(s, t) \geq 0 \geq \varphi_{\Delta_2}^+(s, t)$, vagyis φ_δ^-, φ_δ^+ δ-ban való monotonitása alapján tetszőleges Δ_1, Δ_2 mellett fennáll ez az egyenlőtlenség, így t-re a 3. Lemma *c)* esete teljesül. Tehát $t \in X_k(s)$.

A (2.4) definícióból az is nyilvánvaló, hogy $X_k(s)$ zárt halmaz, így $X_k(s)$ nem üres, zárt intervallum.

Megjegyzés. Könnyen kimutatható, hogyha az s pontban f differenciálható, akkor $X_k(s)$ egyetlen elemet tartalmaz.

3. Lemma.

Ha $s_1 < s_2$, $t_1 \in X_k(s_1)$, $t_2 \in X_k(s_2)$, akkor $t_1 \geq t_2$.

Bizonyítás.

A (2.1) és (2.2) formulákból egyszerűen adódik, hogyha s az f differenciálhatósági pontja, $t_1 < t_2$, akkor elég kis δ_1, $\delta_2 > 0$ mellett $\varphi_{\delta_1}^+(s, t_1) \geq \varphi_{\delta_2}^-(s, t_2)$. Tegyük fel ezután az állítással ellentétben, hogy $s_1 < s_2$ és $t_1 < t_2$. Minthogy f konkáv, létezik s_1 és s_2 között f-nek olyan pontja, ahol deriválható. Ha t_1 és t_2-re az 1. Lemma *c)* állítása érvényes, akkor elég kis $\delta > 0$ mellett

$$0 \leq \varphi_\delta^-(s_2, t_2) < \varphi_\delta^-(s, t_2) \leq \varphi_\delta^+(s, t_1) < \varphi_\delta^+(s_1, t_1) \leq 0,$$

amely nyilvánvaló ellentmondás. Ha t_1 vagy t_2-re az 1. Lemma *a)* vagy *b)* állítása igaz, a bizonyítás az előzőhöz hasonlóan végezhető el.

2. Tétel

Tegyük fel a következőket:

1. Létezik olyan $\xi > 0$ állandó, hogy

a) $s \geq \xi$ esetén $f(s) = 0$;

b) a $[0, \xi]$ intervallumon f folytonos, konkáv és szigorúan csökken;

2. $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén a $[0, L_k]$ intervallumon K_k folytonos, konvex és szigorúan növekszik.

Jelölje $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ és $(x_1^{**}, \ldots, x_n^{**})$ a játék két egyensúlypontját.

Ekkor $\sum_{k=1}^{n} x_k^* = \sum_{k=1}^{n} x_k^{**}$.

Bizonyítás.

Legyen $s^* = \sum_{k=1}^{n} x_k^*, s^{**} = \sum_{k=1}^{n} x_k^{**}$. Könnyű bebizonyítani (ld. [4] Tétele bizonyításának *a)* pontját), hogy $s^* \leq \xi$, $s^{**} \leq \xi$. Így $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén $x_k^* \in X_k(s^*)$, $x_k^{**} \in X_k(s^{**})$. Tegyük fel, hogy $s^* < s^{**}$, akkor a 3. Lemma alapján $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén $x_k^* \geq x_k^{**}$; amelyeket összeadva azonnal adódik, hogy

$$s^* = \sum_{k=1}^{n} x_k^* \geq \sum_{k=1}^{n} x_k^{**} = s^{**},$$

amely nyilvánvaló ellentmondás.

3. Tétel

A 2. Tétel feltételei mellett az oligopol játék rendelkezik legalább egy egyensúlyponttal.

Bizonyítás.

Legyen $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ egy $[0, \xi]$ intervallumon f-hez tartó differenciálható, szigorúan csökkenő, konkáv függvénysorozat. Jelölje ezen f_n árfüggvénnyel és a K_k költségfüggvényekkel rendelkező játék egyetlen egyensúlypontját $x^{(n)*}$. Ekkor — minthogy $\{x^{(n)*}\}$ korlátos sorozat — az $\{x^{(n)*}\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat rendelkezik torlódási ponttal: x^*. Az (1.2) egyenlőtlenségből egyszerű határátmenettel adódik, hogy x^* az eredeti oligopol játék egyensúlypontját adja.

Megjegyzés. A tétel állítása a Nikaido—Isoda tétel alapján és bebizonyítható (ld. [1]).

Vezessük be a következő jelöléseket ($s \in [0, L]$):

$$\alpha_k(s) = \min\{t | t \in X_k(s)\}, \beta_k(s) = \max\{t | t \in X_k(s)\}, \qquad (1 \leq k \leq n) \tag{2.6}$$

$$\alpha(s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(s), \beta(s) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k(s). \tag{2.7}$$

4. Tétel

A 2. Tétel feltételei mellett egy $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ vektor akkor és csak akkor adja az oligopol játék egyensúlypontját, ha

a) az $s^* = \sum_{k=1}^{n} x_k^*$ érték az

$$\alpha(s^*) \leq s^* \leq \beta(s^*) \tag{2.8}$$

egyenlőtlenség egyetlen megoldása;

b) $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén $x_k^* \in X_k(s^*)$.

Bizonyítás.

Az állítás az (1.2), (2.4) összefüggések, valamint a 2. és 3. Tétel nyilvánvaló következménye.

1. Következmény: A 2. Tétel feltételeinek fennállása esetén a játék egyensúlypontjai a (2.8) egyenlőtlenség egyértelmű megoldásával, valamint az

$$\alpha_k(s^*) \leq x_k \leq \beta_k(s^*) \qquad (1 \leq k \leq n) \tag{2.9}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = s^*$$

egyenlőtlenségrendszer megoldásaival állíthatók elő.

2. Következmény: A 2. Tétel feltételeinek fennállása esetén az oligopol játék egyensúlypontjainak halmaza a (2.9) szimplex.

(Beérkezett: 1976. október 20.)

IRODALOM

[1] Szép, J.—Forgó, F.: *Bevezetés a játékelméletbe.* Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

[2] Szidarovszky, F.: *On the Oligopol Game.* K. Marx University of Economics, Techn. Rep., 1970—1.

[3] Szidarovszky, F.: *A konkáv oligopol probléma*, ELTE.TTK. Numerikus és Gépi Mat. Tanszék kiadványa, 1976—2.

[4] Szidarovszky F.: *A többtermékes oligopol játék egyensúlyproblémájáról*, megj. alatt.

[5] Szidarovszky F.: *Bevezetés a numerikus módszerekbe.* Budapest, 1974. Közgazdasgi. és Jogi Könyvkiadó.

THE NON-DIFFERENTIABLE OLIGOPOLY PROBLEM

In the article the author examines the continuous, concave, one-product oligopoly game. Although existence of the Nash equilibrium point is demonstrable, unicity is not true in general. Yet, the sum of the equilibrium strategies is unique and the set of equilibrium points is a simplex.

ПРОБЛЕМА НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО ОЛИГОПОЛЯ

В рассматриваемой статье автор изучает непрерывную конкавную олигопольную игру на одно изделие. Не смотря на то, что существование точки равновесия типа Нэш является доказуемым, сама уницитатность чаще всего не является истиной. Совокупность стратегий, обеспечивающих равновесие, с другой стороны, будет явной и множество точек равновесия представляет собой симплекс.