LÁNYI KAMILLA

Egy előrejelzési paradoxon[1]

Az ökonométerek panaszkodnak némelykor, hogy a döntéshozó olyan eseményre kíván jóslatot, melynek bekövetkezte nagymértékben függ az ő döntésétől, miközben magát a döntést a kapott jóslattól teszi függővé. Ezt a korántsem ritka helyzetet az alábbi történet keretében vizsgáljuk:

A történet

Élt egyszer egy perzsa sah, aki annyira szenvedélyes vadász volt, hogy hosszú uralkodásának minden napján pompás vadászatot rendezett az udvarában, de több ízben előfordult, hogy az uralkodás gondjai megakadályozták, hogy részt vegyen rajtuk. Egy szép napon magához hívatta az ökonométerét, és megkérdezte tőle, mekkora valószínűséggel lesz jelen a másnapi vadászaton. Ez főként őfelsége óhajától függ, vélte az ökonométer. A sah tiltakozott: ő attól a kétségkívül tudományos jóslattól kívánja függővé tenni elhatározását, amelyet majd az ökonométertől fog kapni. Ezután megadott egy 0 és 1 közé eső q számot és megmagyarázta, hogy ha a kapott jóslatnak megfelelelően a részvételének valószínűsége legalább q, akkor úgy dönt, hogy elmegy a vadászatra, az ellenkező esetben viszont otthon szándékozik maradni. Az ökonométer még megkérdezte, mi történik akkor, ha nem tud a megadott feltételeknek eleget tevő jóslatot adni, mire az uralkodó azt válaszolta, hogy akkor is eldönti valahogyan a kérdést, de az ökonométert azon nyomban elkergeti az udvarából.

Mivelhogy mindez borzasztóan régen történt, a realitás sérelme nélkül feltehetjük, hogy az ökonométer, visszatérvén laboratóriumába, nem látott neki rögtön a számolásnak, hanem először megvizsgálta a feladatot, mégpedig három szempontból:

I. Van-e valami haszna az uralkodónak a jóslatból?

II. Mik a lehetséges jóslatok?

III. Mekkora valószínűséggel lehet bármilyen jóslatot adni?

A továbbiakban mi is nyomon követjük ökonométerünk gondolatmenetét és eljárásait, és megfigyeljük, hogy milyen eredményre jutott.

[1] A jelen cikk a Structures Economiques et Econométrie elnevezésű kollokviumra (Lyon, 1977. április 21–23.) benyújtott előadás szövegén alapul.

Először is definiálni fogjuk a következő eseményeket:

A: a sah részt vesz a vadászaton
$\bar{A}$: a sah otthon marad
B_1: a sah úgy dönt, hogy vadászni megy
B_2: a sah úgy dönt, hogy nem megy el
C_1: a kapott jóslat olyan, hogy maga után vonja B_1-et
C_2: a kapott jóslat olyan, hogy maga után vonja B_2-t
C_3: nincs a feltételeknek megfelelő jóslat.

Továbbá feltesszük a következőket:

— az összes fenti esemény valószínűsége pozitív [ezek közül csak $P(C_3)$ pozitív voltát kell belátnunk];

— $P(A)$, $P(B_1)$, $P(A|B_1)$, $P(A|B_2)$ valószínűségek becsülhetők az udvari feljegyzések alapján relatív gyakoriságukkal, mégpedig rendre $\bar{p}$, $\bar{r}$, $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$-vel;

— továbbá tudjuk, hogy a relatív gyakoriság elégséges becslése a valószínűségnek.

A mesében említett tudományos jóslatot a sah is és az ökonométer is úgy értelmezi, hogy az a megfelelő feltételes valószínűségek, vagyis $P(A|C_1)$, illetve $P(A|C_2)$ elégséges becslése kell hogy legyen. A továbbiakban az ilyen jóslatot fogjuk megengedett jóslatnak nevezni.

Szükségünk lesz még a következő események definíciójára:

$$D_1:\ P(A|B_2) < q < P(A|B_1)$$
$$D_2:\ P(A|B_1) < q < P(A|B_2)$$
$$D_3:\ q < P(A|B_1) \text{ és } q < P(A|B_2)$$
$$D_4:\ P(A|B_1) < q \text{ és } P(A|B_2) < q$$

Mint majd később látni fogjuk, a

$$D_5:\ P(A|B_1) = P(A|B_2) \text{ és } q = P(A)$$

0 valószínűségű eseménytől eltekintve a D_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ események teljes rendszert alkotnak.

A meséből és a megadott eseményekből kiindulva definiálhatjuk az $\mathcal{A}_1$ és az $\mathcal{A}_2$ σ-algebrát a következőképpen:

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}, B_i, C_j;\ i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3\}$$
$$\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \Omega, D_k;\ k = 1, 2, 3, 4\}$$

$\mathcal{A}_1$-et elnevezzük a sah σ-algebrájának, mert ő éppen ezt tudja elgondolni. $\mathcal{A}_2$-t az ökonométerének, mert ezen fogja megoldani a feladatot.

I. A sah problémája

Ökonométerünk először azt vizsgálja, hogy mi lehet a sah célja a feladattal! Feltehetően az, hogy növelje döntésének biztonságát, vagy ami ugyanaz, csökkentse annak a csalódásnak vagy presztizsveszteségnek a kockázatát, amely akkor éri, ha elhatározása nem teljesül.

Legyen S az az esemény, hogy a sah döntése teljesül, anélkül, hogy jósát meghallgatná. A megfelelő valószínűség:

$$P(S) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2).$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy mindig áll:

$$P(S) \leq \max\,[P(A|B_1),\ P(\bar{A}|B_2)].$$

Ezért, ha a sah gyakrabban tartja meg azt a döntését, hogy vadászni megy, mint azt, hogy otthon marad, akkor azt kell tanácsolni neki, hogy menjen vadászni; az ellenkező esetben azt, hogy maradjon otthon. Ha hallgat a tanácsra, akkor a sah döntése a legnagyobb valószínűség elvén fog alapulni.

A sah azonban nem tanácsot kért, hanem jóslatot. A feltételek értelmében

$$P(B_1|C_1) = 1 \text{ és } P(B_2|C_2) = 1, \text{ ezért}$$

$$C_1 \subset B_1 \text{ miatt } P^*_{C_1}(A) = P^*_{C_1}(A|B_1),$$

$$C_2 \subset B_2 \text{ miatt } P^*_{C_2}(\bar{A}) = P^*_{C_2}(\bar{A}|B_2),$$

ahol $P^*_{C_1}$ és $P^*_{C_2}$ a C_1-re, illetve C_2-re normált mérték az $\mathcal{A}_1$ σ-algebrán.

A jóslat után C_1 vagy C_2 már bekövetkezett. Az kell, hogy

$$C_1 \text{ után } P(A|B_1) \geq P(S)$$

$$C_2 \text{ után } P(\bar{A}|B_2) \geq P(S),$$

vagyis

$$C_1 \text{ után } P(A|B_1) \geq P(\bar{A}|B_2) = 1 - P(A|B_2)$$

$$C_2 \text{ után } P(A|B_1) \leq P(\bar{A}|B_2) = 1 - P(A|B_2)$$

fennálljon.

Ennek alapján máris megfogalmazható az

1. Állítás[2]

Ha van olyan megengedett jóslat, amely eleget tesz a legnagyobb valószínűség elvének is, akkor a sahnak érdemes hallgatnia a jóslatra.

II. A jóslási paradoxon

Ökonométerünket most az érdekli, mi volna a sah vadászatának legpontosabb előrejelzése, hiszen ezt kérték tőle. Eközben szem előtt tartja, hogy jóslata befolyásolja a vadászat valószínűségét, mégpedig nem közvetlenül, hanem a sah döntésén keresztül.

Mihelyt elhangzott a jóslat, annak valószínűsége, hogy a sah részt vesz a vadászaton, vagy $P(A|C_1)$, vagy $P(A|C_2)$. Hogyan lehet megjósolni, hogy melyik; és mi az értéke ennek a két feltételes valószínűségnek?

[2] Ezt és további állításainkat igyekeztünk úgy kimondani, hogy a meséből levonható tanulságok lehetőleg közérthető verbális megfogalmazását adjuk.

Tegyük fel egyelőre, hogy a sah által megadott q szám nem más, mint a sah szubjektív becslése P(A)-ra. Mint majd később látni fogjuk, ez a feltevés nem változtatja meg a probléma természetét, és a megoldását is alig.

$$P^*_{C_1}(A) = P^*_{C_1}(A|B_1)$$

és a döntési szabály miatt, amelyet most q helyett P(A)-ra vonatkoztatunk, ha

$$P(A|B_1) > P(A),$$

akkor $P(A|B_1)$ biztosan a legjobb jóslat, és ugyanilyen megfontolásokból, ha

$$P(A|B_2) < P(A),$$

akkor biztosan $P(A|B_2)$ a lehetséges legjobb jóslat.

Az első esetben ugyanis a sah biztosan a B_1 döntést választja, tehát éppen $P(A|B_1)$ valószínűséggel vesz részt a vadászaton, a második esetben pedig a döntés biztosan B_2, tehát csak $P(A|B_2)$ valószínűséggel kell elmennie, ha előbb nem akart is.

Úgy látszik tehát, hogy a feladat elvégzéséhez elég az ökonométernek a fenti két feltételes valószínűséget becsülnie, vagyis megadnia $\tilde{p}_1$-et vagy $\tilde{p}_2$-t. Mindkét esetben feltettük azonban, hogy a legjobb jóslatnak tekintett feltételes valószínűségre teljesül egy reláció. Ezt vizsgáljuk meg most. A teljes valószínűség tételéből

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2),$$

ahol P(A), $P(A|B_1)$ és $P(A|B_2)$ között

(i) vagy $P(A|B_2) < P(A) < P(A|B_1)$

(ii) vagy $P(A|B_2) = P(A) = P(A|B_1)$

(iii) vagy $P(A|B_1) < P(A) < P(A|B_2)$

reláció teljesül. Ahonnét rögtön következik a

2. *Állítás*

Ha az előbbi relációk közül az első áll fenn, az ökonométer nem egy, hanem két egyaránt jó jóslatot adhat, és mivel ezt az esetet a sah nem vette számításba, az ökonométernek kell eldöntenie, hogy melyik lesz az.

A második esetben a feltételek értelmében $P(A|B_1)$ még kielégítő jóslat.

A harmadik esetben az ökonométer egyáltalán nem tud a kívánságnak megfelelő jóslatot adni. Ha ugyanis P(A)-nál nagyobb számot ad meg, a sah ennél kisebb valószínűséggel lesz ott a vadászaton, ha P(A)-nál kisebb számot mond, a sah részvételi esélye ennél feltétlenül nagyobb.

Mindebből még az is kiderül, hogy a sah által megfogalmazott feladat tartalmazott egy implicit feltevést, mégpedig azt, hogy a döntései általában közelítik őt az óhajtott célhoz, holott ez nincs mindig így. Ha viszont a döntései jól teljesülnek, akkor két egyaránt jó jóslatot is kaphat, amelyek mindegyike determinálja az ő döntését, tehát befolyásolja a jövőjét is, és csak az ökonométertől függ, hogy milyen irányban.

Megjegyezhetjük még, hogy ha a sah a legnagyobb valószínűség elvének megtartására kötelezte volna ökonométerét, akkor az (i) esetben is mindig egy és csak egy megengedett jóslat volna, erről azonban nem volt szó a mesében. Az ökonométer természetesen elfogadhatja ezt a maga számára döntési szabályként, és ha jónak látja, közölheti is a sahhal.

III. Az ökonométer problémája

Azt megállapíthatjuk, hogy ökonométerünknek becslési problémája nincsen. Ha a minta elég nagy (az udvari feljegyzések eléggé régi időre mennek vissza), akkor a $\tilde{p}$, $\tilde{r}$, $\tilde{p}_1$, $\tilde{p}_2$ becslések között fennálló relációk, minthogy relatív gyakoriságokkal becsülheti őket, igen nagy valószínűséggel ugyanazok, mint a $\mathrm{P(A)}$, $\mathrm{P(B_1)}$, $\mathrm{P(A|B_1)}$, $\mathrm{P(A|B_2)}$ közöttiek. Ezért elég azt vizsgálnunk, hogy az ökonométer mekkora valószínűséggel tarthatja meg az állását, vagy ami ugyanaz: mekkora valószínűséggel tud valamilyen jóslatot adni.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$x = \mathrm{P(A)},\ y = \mathrm{P(B_1)},\ u = \mathrm{P(A|B_1)},\ v = \mathrm{P(A|B_2)}.$$

A teljes valószínűség tétele miatt bármely összetartozó (x, y, u, v) érték esetén az $x = yu + (1 - y)v$ összefüggés áll fenn a négy mennyiség között. Ezt fogjuk a továbbiakban felhasználni.

3. Állítás

Az ökonométer nem tud nagyobb valószínűséggel jósolni, mint a legnagyobbal azok közül, amekkorával ura vadászni megy vagy otthon marad, a vadászat vagy az otthon maradás mellett dönt; vagyis a jóslatadás valószínűsége nem lehet nagyobb, mint $\max\,[x, y, 1 - x, 1 - y]$.

Bizonyítás:

Tekintsük az $\{(x, y);\ 0 < x < 1;\ 0 < y < 1\}$ valós rendezett számpárok halmazát, és tegyük fel, hogy (x, y)-t egyenletesen választhatjuk az egységnégyzet belsejében. Az x szám álljon az ismeretlennek tekintett $\mathrm{P(A)}$, y az ismeretlen $\mathrm{P(B_1)}$ valószínűség helyett. Rendeljük hozzá ezután az (x, y) párokhoz az

$$I(x, y) = \{yu + (1 - y)v - x = 0;\ 0 \leq u \leq 1;\ 0 \leq v \leq 1\}$$

egyenes szakaszokat. Az $(x, y) \to I(x, y)$ hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű, és $I(x, y)$ nyilván átmegy a zárt egységnégyzet $(u, v) = (x, x)$ pontján. $I(x, y)$ végpontjai $(\min u,\ \max v)$ és $(\max u,\ \min v)$, úgy hogy

$$\max u = \min\left[\frac{x}{y}, 1\right] \qquad \min u = \max\left[0, \frac{x + y - 1}{y}\right]$$

$$\max v = \min\left[\frac{x}{1 - y}, 1\right] \qquad \min v = \max\left[0, \frac{x - y}{1 - y}\right]$$

Definiáljuk továbbá a ξ és az η valószínűségi változókat úgy, hogy

$$\eta = -a\xi + b; \quad a = \frac{y}{1-y}\,; \quad b = \frac{x}{1-y}\,.$$

A ξ valószínűségi változó az ismeretlennek tekintett $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}_1)$, az η valószínűségi változó az ismeretlen $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}_2)$ valószínűségek helyett áll. Az ökonométer szempontjából értelmes feltevésnek látszik, ha a $(\xi,\ \eta)$ változópár együttes eloszlását egyenletesnek tekintjük a

$$(\min u,\ \max u) \times (\max v,\ \min v) \subset \mathrm{R}^2$$

intervallumon, amely ξ és η lineáris összefüggése miatt $I(x,\ y)$-ra húzódik össze.

Az ökonométert a $\mathrm{P}(\xi > x,\ \eta < x)$ valószínűség érdekli minden rögzített $(x,\ y)$-ra.

Az előzőekből világos, hogy ξ egyenletes eloszlású a $(\min u,\ \max u)$, η pedig a $(\max v,\ \min v)$ intervallumon. Továbbá geometriai megfontolásokból az $(x,\ 0)$, illetve a $(0,\ x)$ pont ugyanolyan arányban osztja a $[\min u,\ \max u]$, illetve a $[\max v,\ \min v]$ szakaszokat, mint az $(x,\ x)$ pont az $I(x,\ y)$ szakaszt. Ezért a keresett valószínűségre igaz a következő:

$$\mathrm{P}(\xi > x,\ \eta < x) = \mathrm{P}(\xi > x) = \frac{\max u - x}{\max u - \min u} = \mathrm{P}(\eta < x) = \frac{x - \min v}{\max v - \min v}\,.$$

Behelyettesítés után a két tört értékére ezt kapjuk:

$$\mathrm{P}(\xi > x, \eta < x) = \begin{cases} 1-x, & \text{ha } \max u = 1, \quad \min u = 0, \text{ és} \\ & \quad\ \max v = \dfrac{x}{1-y}, \quad \min v = \dfrac{x-y}{1-y} \\ 1-y, & \text{ha } \max u = \dfrac{x}{y}, \quad \min u = 0, \text{ és} \\ & \quad\ \max v = \dfrac{x}{1-y}, \quad \min v = 0 \\ y, & \text{ha } \max u = 1, \quad \min u = \dfrac{x+y-1}{y}, \text{ és} \\ & \quad\ \max v = 1, \quad \min v = \dfrac{x-y}{1-y} \\ x, & \text{ha } \max u = \dfrac{x}{y}, \quad \min u = \dfrac{x+y-1}{y}, \text{ és} \\ & \quad\ \max v = 1, \quad \min v = 0 \end{cases}$$

Ezzel a 3. Állítást bizonyítottuk.

A továbbiakban kiszámolhatjuk, hogy a négy különböző eredményhez x és y milyen változási tartományai tartoznak. Ezt használva a következő feltételes valószínűségeket írhatjuk fel:

$$P\,(\xi > x, \eta < x \mid 0 < y \leq \min\,[x, 1 - x]) = 1 - x$$

$$P\left(\xi > x, \eta < x \mid x < y \leq 1 - x \text{ és } x < \frac{1}{2}\right) = 1 - y$$

$$P\left(\xi > x, \eta < x \mid 1 - x < y \leq x \text{ és } x > \frac{1}{2}\right) = y$$

$$P\,(\xi > x, \eta < x \mid \max\,[x, 1 - x] < y < 1) = x$$

Jelöljük a feltételekben szereplő eseményeket E_l-lel ($l = 1, 2, 3, 4$). Könnyen belátható, hogy $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$ esetén ezek teljes eseményrendszert alkotnak, és (geometriai) valószínűségük azonos, mégpedig:

$$P(0 < y \leq \min\,[x, 1 - x]) = P(E_1) = \frac{1}{4}$$

$$P\left(x < y \leq 1 - x \text{ és } x < \frac{1}{2}\right) = P(E_2) = \frac{1}{4}$$

$$P\left(1 - x < y \leq x \text{ és } x > \frac{1}{2}\right) = P(E_3) = \frac{1}{4}$$

$$P(\max\,[x, 1 - x] < y < 1) = P(E_4) = \frac{1}{4}$$

Végül jelöljük a keresett feltétel nélküli valószínűséget P(E)-vel. A fentiekből ennek értékére ezt kapjuk:

$$P(\xi > x, \eta < x) = P(E) = \sum_{l=1}^{4} P(E|E_l)\,P(E_l) = \frac{1}{2},$$

mint ez intuitív módon várható is volt. Ebből következik a

4. Állítás

Ha a $P(A)$ és $P(B_1)$ valószínűségek nem ismeretesek, akkor az ökonométer esélye nem nagyobb, mintha a sah pénzfeldobással döntené el, hogy maradhat-e az udvarnál vagy sem.

Mitől javulhat az ökonométer helyzete? A válasz ez:

5. Állítás

Az ökonométer helyzete akkor jobb, ha a sah által megadott q szám eléggé messze esik $P(A)$-tól, vagyis, ha a sah eléggé rosszul tájékozott a saját múltjáról.

Ahhoz, hogy ezt belássuk, tekintsük először, hogy q hogyan helyezkedhetik el a szóbanforgó valószínűségekhez képest, és a különböző helyzeteihez milyen lehetséges jóslatok tartoznak:

q elhelyezkedése	Milyen esemény következik be?	A megengedett jóslat
$P(A\|B_2) < q < P(A\|B_1)$	$D_1 \subset C_1 + C_2$	$P(A\|B_1)$ és $P(A\|B_2)$ akármelyike
$P(A\|B_1) < q < P(A\|B_2)$	$D_2 = C_3$	nincs jóslat
$q < P(A\|B_2) < P(A\|B_1)$, $q < P(A\|B_1) < P(A\|B_2)$	$D_3 \subset C_1$	$P(A\|B_1)$
$P(A\|B_2) < P(A\|B_1) < q$, $P(A\|B_1) < P(A\|B_2) < q$	$D_4 \subset C_2$	$P(A\|B_2)$

A jóslat létezésének valószínűsége most ez:

$$P(\xi > q) + P(\eta < q) - P(\xi > q, \eta < q)$$

és ez a valószínűség lehet nagyobb is, mint az előbbiek, tehát mint $\max\,[x, y, 1-x, 1-y]$.

Tekintve, hogy ekkor eléggé sok esetet kell végigvizsgálni, számoljunk ki közülük csak egyet. Mégpedig azt, amikor $\max u = \frac{x}{y}$, $\min u = \frac{x+y-1}{y}$, $\max v = 1$, $\min v = 0$, $q < \min u < x$.

Jelölje F azt az eseményt, hogy mindezek a feltételek teljesülnek. Számításba kell vennünk még azt is, hogy most a $v = q$ egyenes metszi az $I(x, y)$ szakaszt, és a metszéspontban

$$u = \frac{x-(1-y)q}{y}.$$

Mindezeket figyelembe véve a keresett valószínűségek a következők:

$$P(\xi > q|F) = \frac{\max u - \min u}{\max u - \min u} = 1$$

$$P(\eta < q|F) = \frac{q - \min v}{\max v - \min v} = q$$

$$P(\xi > q, \eta < q|F) = \frac{\sqrt{\left(\frac{x}{y} - \frac{x-(1-y)q}{y}\right)^2 + q^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{y} - \frac{x+y-1}{y}\right)^2 + 1}} = q$$

Tehát az ökonométer most 1 valószínűséggel tud valamilyen jóslatot adni, mégpedig q valószínűséggel $P(A|B_1)$ és $P(A|B_2)$ közül bármilyeket, $1-q$ valószínűséggel pedig $P(A|B_1)$-et.

Végül vegyül még észre, hogy ha az előbbi számolásban x nem $P(A)$ helyett, hanem a becsült értéke $\tilde{p}$ helyett állna; y nem $P(B_1)$ helyett, hanem a becsült értéke, $\tilde{r}$ helyett állna; ξ az ismeretlen $\tilde{p}_1$-et, η az ismeretlen $\tilde{p}_2$-t reprezentálná, akkor is ugyanezt az eredményt kapnánk.

Ezzel valójában vége is a történetnek. Vizsgálódása közben az ökonométer is rájön arra, hogy az az $\{\Omega, \mathcal{A}_2, \mathrm{P}\}$ valószínűségi mező, amelyen neki kell megoldania a feladatot, nem ekvivalens a sahéval, $\{\Omega, \mathcal{A}_1, \mathrm{P}\}$-vel. A jóslási problémában definiált $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{C}_j)$ $(j = 1, 2, 3)$ nem mérték $\mathcal{A}_2$-n, a megoldáshoz szükséges $\mathrm{P}(\mathrm{C}_j|\mathrm{D}_k)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ nem mértek sem $\mathcal{A}_1$-en, sem $\mathcal{A}_2$-n. Továbbá jóslatot kapni és jóslatot adni nem ugyanannak a kísérletnek az eredménye, bár a kapott és az adott jóslat mindig megegyezik.

Most már nincs más hátra, mint a

6. Állítás

A sah akkor tudná áttekinteni a saját helyzetét, ha meg tudná figyelni az ökonométer döntéseit. Az ökonométer helyzete akkor volna mindig biztos, ha csak alternatív jóslatot kérnének tőle.

IV. Epilógus, avagy modellünk és a valóság

Sokan megkérdezhetik, hogy a mesében miért nevezzük a jóst ökonométernek, és például miért nem asztrológusnak. Hiszen Ragnar Frisch óta, aki először használta az ,,ökonometria'' szót, az ökonometriának mint tudománynak változatlanul az a célja, hogy ,,az elméleti politikai gazdaságtan vagy más néven «tiszta» közgazdaságtan absztrakt törvényeit tapasztalati alapon és numerikusan verifikálja, és ezáltal, amennyire lehetséges, a tiszta közgazdaságtant a szó szoros értelmében tudománnyá változtassa''.[1] Ez biztosan igaz a tudományra, de azokat, akik az ökonometriai kutatásokat és főként az igen költséges nagy projektumokat finanszírozzák, rendszerint nem a közgazdaságtan absztrakt törvényei érdeklik, hanem inkább a jövőre kiváncsiak. Aki nagyon firtatja a jövőt, az nemcsak hajlamos arra, hogy a jóslat által vezettesse magát döntéseiben, hanem a jósnak is tudnia kell erről, különben rosszul jósol. Számos példát lehetne felhozni arra, hogy az előrejelzés hibája (különösen a hosszú és középtávú előrejelzéseké) akkor a legnagyobb, ha az, aki végzi, szándékosan nem veszi tekintetbe azokat a döntéseket, amelyeket például egy túlságosan sötétnek tűnő jövő elkerülésére hozni fognak. (A klasszikus példa erre A. Sauvy jóslata, aki a harmincas évek végén 25 millió főre becsülte Franciaország 2005. évi várható lakosságát.) A jóslat célja ilyenkor nyilvánvaló: kikényszeríteni azt a döntést, amely magát a jóslatot teszi semmissé. A mi történetünkben, amelyben kikötöttük, hogy pontos jóslatot kell adni, és a döntési szabály is előre adott, a jós nem tehet mást, mint hogy már jóslás közben figyelembe veszi a jóslat következményeit.

Azt mondhatja valaki, hogy az általunk vázolt szituáció nem reális, mégpedig két oknál fogva:

— a döntéshozók nem szokták közölni döntési szabályaikat;

— a döntéshozók nem kérnek jóslatot ugyanarra a változóra, amelynek további sorsáról dönteni szándékoznak.

Az első ellenvetésre azt mondhatjuk, hogy általában igaz. A döntéshozók viselkedése azonban ugyanúgy megfigyelhető, mint bármely véletlen tömegjelenség, és szükség esetén a döntési szabályra is kielégítő becslést lehet adni, (Érdekes kísérlet a tervező magatartásának megfigyelésére az, amelyről Gács J.–Lackó M. [2] cikkében olvashatunk.)

A második ellenvetéssel kapcsolatban pedig szeretnénk felhívni a figyelmet arra, hogy bármely állami tervezéskor – legyen az akár indikatív, akár direktív – mindig ki szoktak tűzni tervcélokat olyan aggregált mutatókra is, minamilyen a bruttó vagy a nettó nemzeti termék vagy a nemzeti jövedelem növekedése, az export értéke stb., és ezt mindig vagy majdnem mindig az ugyanezekre vonatkozó prognózisok birtokában teszik.

Ha egy tervszám elfogadását döntésnek tekintjük, és a döntésnek van valamilyen következménye a jövőre, akkor nehéz tagadnunk, hogy a történetünkben leírt szituáció létezik, és a bemutatott paradoxonokra vezethet. Hogy maga a prognózis mennyire befolyásolja a döntéshozókat, az kitűnik abból, hogy gyakran a prognosztizált értéket vagy ahhoz nagyon közel álló másikat fogadnak el terveikben.

(Beérkezett: 1977. március 15.)

IRODALOM

1. Frisch, R.: Kvantitatív és dinamikus közgazdaságtan. Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 36. o.
2. Gács, J.–Lackó, M.: *A népgazdasági szintű tervezési magatartás vizsgálata.* Közgazdasági Szemle, 1974. 3. sz. 257–274. o.

A PARADOX IN FORECASTING

Econometrists complain sometimes that decision-makers demand forecasts for events whose occurrence depends largely on their decision, while they make the decision dependent on the forecast received. We shall examine the problem on a highly simplified model which will be set up in the form of a parabola.

In a fairy tale the king charges his court econometrist with forecasting (providing sufficient estimation), what the probability of his participation in the following day's hunting is. With this he gives a number q between 0 and 1 saying that if the projection is higher than that, he will decide to go to the hunting, if it is lower, he will decide not to go and if the econometrist cannot make a forecast under these terms, he will be sacked from the court.

We assume that the econometrist has no estimation problem in the strict sense. In following his procedure, we come to the following results:

We recognize that the probability that either decision of the king will be executed is at least not reduced in possession of the forecast.

We recognize that the econometrist can either give two equally good projection or he can give one or he cannot give any.

In the first case, since this was not taken into account by the king, the econometrist has to decide which of the two projections he will give, by which he unambiguously determines the king's decision, thus influencing his own future as well. It also turns out that the first case is valid exactly if the king's decisions are well fulfilled, the second case is valid if it does not matter what decision he makes, and the third one is valid if probability is high that the contrary of his decision will happen.

We recognize further that if the probabilities of the problem are unknown, the econometrist will be able to give any forecast with 1/2 probability, if probabilities are known, he will not be able to forecast with larger probability than with what the king goes hunting or stays at home. The econometrist is in a better position only if the given number q lies far enough from the (unconditional) probability of the king's participation in the hunting.

ОДИН ИЗ ПАРАДОКСОВ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Эконометристы иногда жалуются, что принимающие решения желают получить прогноз относительно таких событий, свершение которых в значительной мере зависит от принимаемых ими самими решений в то время как принятие решения ставится в зависимость от получаемого прогноза. Данная проблема рассматривалась в рамках одной весьма упрощенной модели, которая была сформулирована в виде некой параболы.

В одной сказке король поручил своему придворному эконометристу погадать (дать в должной мере достоверный прогноз) относительно того, что насколько возможно его присутствие на охоте на следующий день. Таким образом король задал цифру «q», находящуюся в пределах 0—1 и при этом он заявил, что если прогноз будет лучше этого, то он пойдет на охоту, если хуже, то решит не ходить; в том случае, если эконометрист в данной случае не сможет дать прогноз, то он будет изгнан из двора.

Можно предположить, что наш эконометрист не имеет проблем в аспекте собственно прогнозирования. Если последовать его методике, то можно придти к следующему выводу:

Можно согласиться с тем, что с учетом прогноза любое решение, принимаемое королем может быть реальным. Во всяком случае об ограничениях нет и речи.

Можно согласиться с тем, что эконометрист в состоянии дать два равносильных хороши, прогноза;

в состоянии дать один прогноз или не в состоянии прогнозировать.

В первом случае, т. к. король его не принимает во внимание, сам эконометрист должен решить, что из двух прогнозов который будет выбран, посредством чего он со всей определенностью детерминирует решение, принимаемое королем и этим влияет и на будущее короля. Становится ясным и то, что первый случай будет реальным только тогда, когда решение короля будет удачно реализовано; второй в том случае, если все равно, какое решение примет король, а третье тогда, когда с большей вероятностью случится обратное того, что фигурировало в решении.

Можно согласиться, далее, с тем, что если возможности приводимые в задаче являются неизвестными, то эконометрист любой прогноз может выдать с достоверностью, равной $\frac{1}{2}$; если возможности известны, то и в таком случае его прогноз не более достоверен того, что пойдет ли король на охоту или останется дома, что обычно как он решает вопрос: на охоту или дома. Положение эконометриста будет лучшим только в том случае, если данная цифра «q» находится в достаточной мере далеко от возможности (без каких либо условий) того, что король пойдет на охоту.