KÖNYVEKRŐL

RÓZSA, P.: *Lineáris algebra és alkalmazásai.* Budapest, 1976.* Műszaki Könyvkiadó. 685 p.

KREKÓ, B.: *Lineáris algebra.* Budapest, 1976. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 573 p.

A lineáris algebra minden bizonnyal olyan területe a matematikának, amelynek a jelentőségét nem kell reklámozni. Ezt a tudományágat, mely a szemléletünkhöz annyira közelálló módon tükrözi a valóságot, szakemberek százai ismerik és alkalmazzák a műszaki és gazdasági élet, valamint a természettudományok legkülönbözőbb területein. A lineáris algebra szakirodalma közismerten óriási, és az érdeklődők számos kiváló kézikönyv közül válogathattak eddig is, elegendő például F. R. *Gantmacher*, E. *Bodewig*, G. *Hadley* vagy R. *Zuhrmühl* könyvére utalnunk. A magyar nyelvű matematikai szakirodalom azonban a legutóbbi időkig nem mutathatott fel olyan kézikönyvet, amely a lineáris algebra elemeiből kiindulva, elvezet annak legkorszerűbb eredményeihez, s ugyanakkor az alkalmazások széles skálájával is megismerteti az olvasót. Az alábbiakban ismertetett két mű ezt a hiányt pótolja.

Rózsa Pál „Lineáris algebra és alkalmazásai" című könyve három részre tagolódik: az első a lineáris algebra elméletének a kifejtését tartalmazza (1–4. fejezet), a másodikat speciális mátrixelméleti problémák ismertetésének szenteli a szerző (5–7. fejezet), a harmadik részben találhatók a különféle alkalmazások, valamint a numerikus módszerek (8–11. fejezet). Az egyes fejezetek a következő témaköröket foglalják magukban.

Az 1. fejezet tárgyalja a komplex elemű mátrixok és vektorok értelmezését, a mátrixmatematika műveleteit, a diád, a rang és az inverz mátrix fogalmát, a speciális tulajdonságú mátrixokat, foglalkozik továbbá a diádikus felbontásnak és a lineáris egyenletrendszerek megoldásának alapelveivel. A 2. fejezetben leírja a véges dimenziós euklideszi terek fogalmát, a bázisokat, bilineáris és kvadratikus alakokat, a lineáris transzformációkat. Foglalkozik a sajátértékfeladattal, az egyszerű struktúrájú (azaz hasonlósági transzformációval diagonizálható) mátrixokkal, továbbá az unitér és normál transzformációkkal, az önadjungált transzformációk sajátértékeinek szélsőértéktulajdonságaival. A 3. fejezet tárgya az egyszerű struktúrájú mátrixok spektrál-előállítása, a *Cayley–Hamilton*-tétel, a minimál-polinom és az egyszerű struktúrájú mátrixok hatványsorai. A 4. fejezetben rátér a nem egyszerű struktúrájú mátrixok hatványsoraira, tárgyalja a *Jordan*-alakot és az elemi osztók elméletét.

Az 5. fejezetben a hipermátrixokkal kapcsolatos problémákkal, a 6.-ban az $AX - XB = 0$ és $AX - XB = F$ alakú mátrixegyenletek megoldásával, a 7.-ben az $A + \lambda B$ alakú mátrixseregekre, valamint az általánosított sajátértékfeladatokra vonatkozó eredményekkel foglalkozik.

A 8. fejezetben tárgyalja a lineáris algebra alkalmazását a differenciálegyenletek elméletében, vizsgálja a közönséges elsőrendű lineáris, valamint a másodrendű lineáris, valamint a másodrendű lineáris, konstans együtthatós, továbbá n-rendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenleteket, a differenciaegyenleteket, ezek alkalmazását, a parciális differenciálegyenletek megoldására. Ismerteti a *Ljapunov*-féle stabilitás elmélet alapjait. A 9. fejezet a nemnegatív elemű mátrixok elméletével, a *Frobenius* és *Perron* tétellel, a sztochasztikus mátrixokkal, a *Markov* láncokkal, határvalószínűségekkel és az ergodicitással foglalkozik. A 10. fejezetben áttekinti a lineáris programozást, a 11.-ben foglalkozik a lineáris egyenletrendszerek

* Az 1. kiadás 1974-ben jelent meg.

és sajátérték-feladatok közelítő megoldásával.

A könyv érdemeinek méltatása előtt célszerű vázlatosan áttekinteni *Krekó Béla* „Lineáris algebrá"-jának tartalmi felépítését, mert ennek alapján össze lehet hasonlítani a két munka tárgyalásmódját. Ez a könyv 14 fejezetre tagolódik.

Az 1. fejezet foglalkozik a valós elemű mátrixok és vektorok értelmezésével, a speciális mátrixokkal (szimmetrikus és ortogonális, továbbá normális mátrixokkal, projektorokkal stb.), a gráfelméleti alkalmazásokkal. A 2. fejezet tárgyalja a lineáris terek fogalmát, a lineáris függetlenséget, a bázisokat, a mátrixok rangját, az elemi bázistranszformációt. A 3. fejezet rátér a lineáris egyenletrendszerek megoldásának alapelveire, az inverz mátrix fogalmára, az inverz szorzatalakjára, a hasonlósági transzformációra. A 4. fejezet a közgazdasági alkalmazásokat tárgyalja, például a költségelemzés, a termelés programozás, az ágazati kapcsolatok mérlege területén.

Az 5. fejezet tárgyalja a mátrixok rangjának csökkenését hatványozás esetén, továbbá a nilpotens mátrixok *Jordán*-féle normálalakját. A 6. fejezet az euklideszi tér fogalmával, konvex halmazokkal, poliéderikus halmazokkal, szeparáló hipersíkokkal, továbbá a legkisebb négyzetek módszerével és a *Moore—Penrosa*-féle általánosított inverz mátrix fogalmával foglalkozik. A 7. fejezet a lineáris egyenlőtlenség-rendszerek megoldási halmazának legfontosabb tulajdonságait, az extremális irányokat és pontokat tárgyalja, továbbá ismerteti a teljes leírás módszerét és a szimplex módszert. A 8. fejezet a bilineáris és kvadratikus alakokkal, a *Sylvester*-féle tétellel, a 9. fejezet a komplex euklideszi térrel foglalkozik. A 10. fejezet bemutatja a lineáris transzformáció sajátértékeit, az invariáns altereket, a *Jordán*-féle normálalakot és az általánosított sajátérték feladatot. A 11. fejezet tárgyalja a normális transzformációk spektrálos előállítását, a nemnegatív elemű mátrixok legfontontosabb tulajdonságait, a 12. fejezet pedig a mátrixsorozatok és hatványsorok konvergenciáját, a mátrixegyenleteket. A 13. fejezet foglalkozik a numerikus módszerekkel, a sajátérték feladatok és lineáris egyenletrendszerek közelítő megoldásával iteráció útján (*Jacobi* és *Gauss*-féle iteráció, a konjugált gradiensek módszere stb.). Végül a 14. fejezet tárgyalja a determinánsokat, a kovariancia és korrelációs mátrixokat, a faktoranalízis problémáit, a speciális struktúrákhoz tartozó elemekből álló mátrixokat.

A két könyv felépítése és a tárgyalt témák köre tehát némileg eltér egymástól.

Mind *Rózsa Pál*, mind pedig *Krekó Béla* könyvével kapcsolatban meg kell állapítani, hogy a szerzők jól hasznosították az egyetemi oktatás során szerzett sokéves didaktikai tapasztalataikat. A könyvek felépítése a nagy terjedelem ellenére világos, jól áttekinthető, a megértést számos numerikus példa, ábra és blokk-diagram mozdítja elő. Mindkét könyvet haszonnal forgathatják azok az olvasók is, akik nem rendelkeznek mélyebb matematikai előismeretekkel. A könyvek módszertani valamint célkitűzésből adódó sajátosságaival kapcsolatban a következőket célszerű kiemelni.

1. *Rózsa Pál* a fogalmak kiépítésében döntő mértékben támaszkodik a determinánselméletre így például adjungált aldeterminánsok segítségével definiálja az inverz mátrixot, és a sajátértékfeladat vizsgálatát is a determinánselméletre építi — a minimálpolinom értelmezése $\lambda E - A$ adjungált aldeterminánsainak segítségével, *Cayley—Hamilton*-tétel bizonyítása stb. — ami lényegében megfelel a klasszikus tárgyalásmódnak. Ezzel szemben *Krekó Béla* a determinánsmentes tárgyalásmódot részesíti előnyben, és az A mátrix minimálpolinomját úgy értelmezi, mint azt az egységnyi főegyütthatós, minimális fokszámú $m(\lambda)$ polinomot, amelyre $m(A) = 0$. Ebben a felépítésben a sajátértékek az $m(\lambda) = 0$ egyenlet gyökei, és kimutatható, hogy minden λ_i sajátérték esetén a $\lambda_i E - A$ mátrix szinguláris, tehát létezik olyan x_i sajátvektor, amelyre $Ax_i = \lambda_i x_i$. Természetesen mind a kétféle tárgyalásmódnak megvannak a maga előnyei, az azonban nem lehet vitás, hogy lehetőség szerint mind a kettővel érdemes megismerkedni.

2. A mátrixok hatványsorainak a vizsgálatánál *Rózsa Pál* az alábbi rendkívül elegáns utat választotta. Ha A egyszerű struktúrájú, helyettesítsük $s_N(A)$-t, a $\sum_{k=0}^{\infty}{}' c_k A^k$ sor N-edik részletösszegét $R_N(A)$-val, $s_N(A)$-nak az A minimálpolinomjára vonatkozó osztási maradékával. $R_N(A)$ a

$$\sum_{p=1}^{t}{}' s_N(\lambda_p)\, L_p(A)$$

alakba írható, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ az A mátrix különböző sajátértékeit, $L_1, \ldots, L_t$ pedig a sajátértékekhez mint alappontokhoz tartozó Lagrange-féle interpolációs alappolinomokat jelöli $L_p(\lambda_p) = 1$, $L_p(\lambda_q) = 0$, ha $p \neq q$). A konvergencia ilymódon tehát numerikus sorok konvergenciájának kérdésére redukálódik. Lényegében analóg eredmény adódik abban az esetben, amikor A nem egyszerű struktúrájú; $R_N(A)$ előállítása ekkor természetesen bonyolultabb. *Krekó Béla* könyvében a *Jordan*-féle normál-alakra való hivatkozással kapjuk meg a választ a hatványsorok konvergenciájának kérdésére ha $J = S^{-1}AS$ jelöli az A mátrix *Jordan*-féle normál-alakját, akkor $S_N(A) = S \cdot s_N(J) \cdot S^{-1}$. A konvergenciát végeredményben ezen az úton is numerikus sorok konvergenciájára lehet visszavezetni, ez a módszer azonban erősebb eszközöket használ, mint az előző, ti. a *Jordan*-féle normál-alakot és az S transzformációs mátrixot.

3. Az $Ax = b$ alakú, szabaságfokkal rendelkező lineáris egyenletrendszer megoldásával kapcsolatban mind a két könyvben találunk olyan eljárást, amely az A mátrix $A = A_1A_2$ alakú bázisfaktorizációján alapul (ez annyit jelent, hogy A_1-nek az oszlopai, A_2-nek pedig a sorai függetlenek). A bázisfaktorizáció eszköze *Rózsa Pálnál* a *diádikus felbontás*, *Krekó Bélánál* pedig a *bázistranszformáció*. Az előbbi valamely adott $A = A^{(0)}$ mátrixvól kiindulva, alkalmasan generált diádoknak az aktuális mátrixból való levonásával jön létre az eljárás r lépésben az A mátrixnak r számú diád összegeként való előállítását szolgáltatja, ahol r az A rangját jelöli. Számítástechnikailag ezzel gyakorlatilag egyenértékű a bázistranszformáció módszere, melyet a szimplex-algoritmussal való kapcsolata révén közismertnek tekinthetünk. A bázistranszformáció alkalmazására *Krekó Béla* könyvében további példákat is láthatunk: az inverz mátrix szorzat-alakjának előállítása, továbbá az n-edrendű determináns értelmezése egy igen szellemes, bár a hagyományostól nagyon eltérő módon stb.

4. Nagymértékben eltér egymástól a két könyv az alkalmazásokra bemutatott példák tekintetében, bár ez bizonyos vonatkozásban magától értetődő. *Rózsa Pál* könyvének a differenciálegyenletekkel kapcsolatos alkalmazásokat tárgyaló 8. fejezetéről kis túlzással azt lehetne mondani, hogy „könyv a könyvben", és a nemnegatív elemű valamint a sztochasztikus mátrixokról is teljes képet kap az olvasó a könyv 9. fejezetében. A 10. fejezet, amely a lineáris programozásról nyújt áttekintést, elsősorban a tárgyalásmód újszerűsége révén tarthat igényt az érdeklődésre. *Krekó Béla* „Lineáris algebrá"-jában fizikai és műszaki alkalmazásokat nem találunk, és valamivel kisebb súllyal szerepelnek a nemnegatív elemű mátrixok is, mint *Rózsa Pálnál*. *Krekó Béla* könyvében a hangsúly a közvetlen közgazdasági, valamint az ezzel rokon alkalmazásokon van — költségelemzés, ágazati kapcsolatok mérlege, statisztikai alkalmazások stb. —, s ez nem csupán azokra a fejezetekre és alfejezetekre nyomja rá a bélyegét, amelyekben a szerző konkrét példákat mutat be, hanem a könyvek olyan elméleti részeire is, amelyek további gazdaságmatematikai tanulmányok alapjául szolgálnak, mint például a konvex halmazok tulajdonságaival és a szeparáló hipersíkokkal foglalkozó alfejezetek.

A példák felsorolását még lehetne folytatni, annyit azonban mindenesetre le kell szögezni, hogy a két könyv igen sok tekintetben szerencsésen egészíti ki egymást. Gazdasági szakemberek számára természetesen elsősorban *Krekó Béla* „Lineáris algebrá"-ját, műszaki és természettudományos érdeklődésű olvasók számára pedig Rózsa Pál könyvét lehet ajánlani. Tekintettel azonban arra, hogy a két munka tartalma és tárgyalásmódja némileg eltér egymástól, közgazdászok számára hasznos lehet *Krekó Béla* könyve mellett *Rózsa Pál* munkáját is megismerni.

MIHÁLYFFY LÁSZLÓ

NIKAIDO, H.: *Convex structures and economic theory*. New York—London, 1968. Academic Press. 405 p.

H. Nikaido neve nem ismeretlen a magyar matematikus közgazdászok előtt. A szerző korunk egyik legaktívabb, legsokoldalúbb matematikus közgazdásza. Figyelemre méltó eredményei vannak a játékelmélet, az általános egyensúlyelmélet, a többszektoros növekedési modellek stb. területén.

„Convex Structures and Economic Theory" c. könyvében egyedülálló dologra vállalkozik. A matematikai közgazdaságtan háború utáni fejlődésére az a legjellemzőbb, hogy a figyelem — a klasszikus analízis eszközeinek alkalmazása helyett — egyre inkább bizonyos modernebb eszközök, elsősorban a topológia néhány ága felé fordult. A szerző a matematikai közgazdaságtanban alkalmazott topológikus módszerekbe és ezek szerteágazó alkalmazásaiba kíván alapos bevezetést nyújtani — bízvást mondhatjuk — a legnagyobb sikerrel. H. Nikaido művével azt kívánja megmutatni, hogy a matematikai közgazdaságtan modern ágai egységesen tárgyalhatók a véges dimenziós euklideszi tér konvex halmazai segítségével. A mű centrális fogalma a *konvexitás matematikai fogalma*. A mű közgazdasági ihletése — következetesen *egyensúlyelméleti*.

A mű a bevezetésen kívül hét fejezetet tartalmaz. Az első fejezet a konvex halmazok és függvények matematikai elméletét tartalmazza. Ezt a fejezetet matematikusok is nagy haszonnal forgathatják. Miután a szerző tárgyalta a konvex halmazok legáltalánosabb algebrai és topológikus tulajdonságait két alapvető matematikai eredményt vesz bonckés alá, a szeparációs hipersíkok tételét és a *Brouwer*-féle fixpont tételt.

A könyvben több alternatív bizonyítást találunk a szeparációs tételre. A tétel birtokában a szerző végigveszi a konvex kónuszokról, lineáris egyenlőtlenségekről, konvex poliéderekről szóló összes fontos tételt. Így pl. a könyvben található a *Stiemke*, *Tucker*, *Farkas—Minkowski*-féle tételek, *Krein—Milman*-tétel speciális esete, mely szerint minden konvex kompakt halmaz előállítható az extremális pontjainak konvex lineáris kombinációjaként. Nagy figyelmet szentel a konvex függvények elméletének. Tárgyalja pl. a klasszikus analízisből ismert tételeket, részletesen foglalkozik a feltételes szélsőérték problémával. Bebizonyítja a *Kuhn—Tukker*-féle nyeregpont tételt.

A véges dimenziós euklideszi terek konvex halmazairól szóló tételek közül a legfontosabb, legmélyebb a *Brouwer*-féle fixpont tétel, mely azt mondja ki, hogy egy konvex kompakt halmaznak önmagába való folytonos leképezésének mindig van fixpontja. A tételt az irodalomban legelterjedtebb úton: a (szimplexek részszimplex — felbontására vonatkozó) *Sperner* lemma segítségével bizonyítja. A tétel rendkívül bonyolult és nehéz bizonyítását pontosan, körültekintően végzi el. A *Brouwer*-tételt közvetlenül alkalmazni a közgazdasági elméletben gyakran nem lehet. Tárgyalja két általánosítását a *Kakutani*-féle fixpont tételt, amelynek az ötödik fejezetben az egyensúly létezésének bizonyításakor van kulcsszerepe. A *Kakutani*-tétel felhasználásával bizonyítja a Neumann-féle fixpont tételt.

A matematikai eredményeket tartalmazó fejezetet a differenciálható leképezésekről szóló rész zárja. Milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie a leképzés Jakobi mátrixának, hogy a leképezés lokálisan egy-egy értelmű legyen? A szakasz legfontosabb eredménye az implicit függvényekről szóló közismert tétel.

A könyv második fejezete a többszektoros lineáris modellekről szóló rész. Ebben a szakaszban részletesen tárgyalja a *Leontief*-féle statikus input-output modellt, röviden ismerteti annak egy dinamikus változatát, a lineáris programozást és a Neumann-féle növekedési modellt. A fejezet fő matematikai eredménye a nemnegatív elemű mátrixokra vonatkozó tételek kifejtése, így a nemnegatív elemű mátrixok domináns sajátértékének tulajdonságait vizsgáló *Peron—Frobenius*-tételeké, továbbá jelentős teret szentel a primitív-imprimitív, indekompozábilis mátrixok vizsgálatának. Ezek a tételek széles alkalmazást találnak nemcsak a matematikai közgazdaságtanban, hanem pl. a valószínűségszámításban is. A fenti tételek kifejtésével párhuzamosan megfogalmazza és vizsgálja a növekedés lineáris modelljeit.

A harmadik fejezetben az egyensúlyi növekedés problémáját vizsgálja meg nem lineáris rendszerekben. A gazdaság növekedését az $x(t+1) = H[x(t)]$ összefüggéssel ábázolja, ahol H egy homogén függvény. A fejezetben lényegileg az előző részben elért eredmények homogén, de nem feltétlenül lineáris rendszerekre való általánosítását találjuk. Pl. a *Brouwer*-féle fixpont tétel segítségével tárgyalja a *Peron—Frobenius*-tételek megfelelő — nem lineáris — analóg tételeit. Megfogalmazza a fenti rendszerekre a primitívség, imprimitívség, indekompozábilitás fogalmát. A fejezet problémája a rendszer viselkedése az időben. Megvizsgálja, hogy milyen feltételek mellett tart a megoldás stacionárius megoldáshoz.

A negyedik fejezetben a szerző két problémát vizsgál. Az erőforrások hatékony allokációjának kérdését és a gazdaság hatékony növekedésének problémáját. Először általánosan ismerteti a termelési lehetőségek halmazára vonatkozó legfontosabb matematikai — közgazdasági tételeket, majd ezeket dinamizálva, vizsgálja a növekedési pályák hatékonyságát, valamint azt, hogy milyen feltételek mellett lehet a leggazdaságosabbá tenni egy hatékony növekedési pályát. A maximális egyensúlyi növekedés problémáját is behatóan elemzi. A *Kakutani*-féle fixpont tétel segítségével bebizonyítja, hogy létezik maximális növekedési ütemet biztosító növekedési pálya. Ez a tétel a *Peron—Frobenius*-tételek mély általánosításának tekinthető. Több turnpike tételt fogalmaz meg és bizonyít.

A következő, ötödik fejezetet a versenyzői egyensúly statikus modelljének szenteli. Két kérdéskört vizsgál meg, az egyensúly létezését és jóléti közgazdasági implikációit. A modellben két fajta gazdasági személy van — fogyasztó és termelő. A termelőket az előző fejezethez hasonlóan a termelési lehetőségek halmazával ábrázolja, a fogyasztók viselkedését egy folytonos preferenciarendezéssel írja le. Részletesen vizsgálja a rendezés tulajdonságait.

Adott ár mellett ismert a fogyasztók kereslete és a termelők kínálata. A piac állapotát a kereslet és kínálat különbségével az ún. túlkereslet-leképezéssel írja le. Bebizonyítja, hogy létezik olyan árrendszer, ahol a kereslet összhangba kerül a kínálattal, megvalósul az egyensúly. Az egyensúly létezésének bizonyítását három modellben végzi el.

A fejezet második részében az egyensúly jóléti tulajdonságaival foglalkozik a szerző. Bebizonyítja, miszerint minden versenyzői egyensúly *Pareto*-i értelemben optimális erőforrás allokáció és minden *Pareto*-i értelemben optimális erőforrás allkoáció egyúttal egyensúlyi megoldás lehet — feltéve, ha a jövedelmeket megfelelő módon átcsoportosítjuk. A szerző nagy figyelmet szentel az egyensúly egy játékelméleti átfogalmazásának, a gazdaság „magjának" (core). A gazdaság magja az *Edgeworth*-féle szerződési görbe általánosítása. Bebizonyítja, hogy ha a gazdasági személyek száma minden határon túl nő, a „mag" tart az egyensúlyi allokációk halmazához.

A hatodik fejezetben a szabadversenyes gazdaság egyes dinamikus tulajdonságait vizsgálja. A fejezet fő problémája, hogy a kereslet-kínálat törvénye biztosítja-e azt, hogy a gazdaság egyensúlyi állapotba jut és így (lásd előző szakasz) Pareto-i értelemben optimális állapotot vesz fel. A kereslet-kínálat törvényét, a szabad piac mozgását a $\dot{p} = f[z(p)]$ differenciál egyenletrendszerrel ábrázolja, ahol f az árváltozás, $z(p)$ a túlkereslet függvény. Megfogalmazza a globális helyettesíthetőség (gross substitutibility) fogalmát. Bebizonyítja, hogy amennyiben minden áru globálisan helyettesíthető, akkor az egyensúly globálisan stabil, a kereslet—kínálat törvénye a gazdaságot mindig egyensúlyi állapotba tereli.

Külön felhívjuk a figyelmet a könyv utolsó fejezetére. Az utolsó fejezet az irodalomban egyedülálló. A fejezet problémája a következő: Milyen feltételek mellett lesz egy függvény az értelmezési tartománya felett *globálisan* egy-egy értelmű? Több alternatív feltevés mellett sikerül a problémát kielégítően megoldani. A tételeket több közgazdasági kérdés megoldására használja fel. Pl.: az egyensúly egyértelműsége, tényezőár kiegyenlítődés stb.

Nikaido könyve az utóbbi idők egyik legsikerültebb matematikai-közgazdasági monográfiája. Világos stílusa a szerző nagy didaktikai érzéke biztosíték arra, hogy bárki sikerrel forgathatja — a megfelelő alapok bitrokában. Ám ne higgye senki, hogy H. *Nikaido* műve könnyű olvasmány. Igen elmélyült türelmes munkát kíván. A mű kitűnő tankönyv és kitűnő kézikönyv. Sikerrel forgathatják mind közgazdászok, mind matematikusok.

MEDVEGYEV PÉTER

DUNCAN, O. D.: *Introduction to structural equation models.* (Bevezetés a strukturális egyenletek modelljeibe.) New York, 1975. Academic Press. 180 p.

A szerző, aki korábbi munkáiban városszociológiai és regionális problémákkal, a társadalmi mobilitással stb. foglalkozott, az elmúlt években a társadalmi folyamatok ökonometriai jellegű modellezésének úttörőjévé vált. Először az amerikai társadalmi mobilitást elemezte az útelemzés módszerével, majd kiterjesztette ezt a technikát és a többi ökonometriai becslési módszert más társadalmi folyamatok vizsgálatára. Ebben a könyvben összefoglalja ezeknek a technikáknak módszertani alapelveit a szociológiai alkalmazások területén. Ezek az alapelvek sok vonatkozásban megegyeznek az ökonometriai kutatások szokásos elveivel, de — a speciális alkalmazási terület és a szerző saját elgondolásai miatt — különböznek is azoktól.

Ilyen eltérés mutatkozik a strukturális egyenlet fogalmánál is. *Duncan* szerint valamely társadalmi folyamat modelljének strukturális formája az a megfogalmazás, amelyben az együtthatók a tényleges hatótényezők hatását tisztán, autonóman, keveredés nélkül fejezik ki. Másszóval a modell olyan specifikációjára gondol, amelyben a valóságos okozati kapcsolatok egyértelműen kifejezésre jutnak. Tehát a modell felépítésénél — ellentétben s sokváltozós elemzési technikákkal, amikor hajlamosak vagyunk mindent változót egymással korrelációban lévőnek tekinteni, — egy nagyon határozottan megfogalmazott elméletből kell kiindulni, amely megmondja, hogy milyen okozati összefüggések nem fordulhatnak elő a változók között (ez még fontosabb, Duncan szerint, mint annak megállapítása, hogy milyenek fordulhatnak elő). Ha nem megfelelő elméleti alapon áll a modell, akkor előfordulhat, hogy a különböző tényleges okok hatása összekeveredve jelentkezik a megbecsült együtthatókban.

Néhány évvel ezelőtt elsősorban útmodelleket használtak a szociológiában. Az ilyen modellben szereplő útegyütthatók lényegében standardizált regressziós együtthatók. Vagyis az útmodellek számításánál az

$$y = b_{yx}x + u$$

típusú egyenleteket standard alakra hozzák olyan módon, hogy az y, x és u változókat saját szórásuk egységeiben fejezik ki és bevezetik a szórások hányadosait a következő módon:

$$\frac{y}{\sigma_y} = b_{yx}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\cdot\frac{x}{\sigma_x} + \frac{\sigma_u}{\sigma_y}\cdot\frac{u}{\sigma_u}$$

Ebből kapják meg az útegyütthatókat, amelyeknek alkalmazását *Sewall Wright*, a strukturális egyenletekből álló modellek felépítésének úttörője, javasolta évtizedekkel ezelőtt:

$$b_{yx}\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = p_{yx}$$

$$\frac{\sigma_u}{\sigma_y} = p_{yu}$$

Az útegyütthatók egyben kifejezik a hozzájuk tartozó változóknak hozzájárulását a függő változó varianciájának megmagyarázásához, mert:

$$p_{yx}^2 + p_{yu}^2 = 1$$

ahol p_{yx}^2 az x változó által megmagyarázott rész és p_{yu}^2 a megmagyarázatlan rész.

Az útmodellek természetesen nemcsak egyetlen egyenletből, hanem több — legtöbbször rekurzív — egyenletből állnak és az egyes egyenletekben több magyarázó változó szerepel. Az útmodelleket az útábra alakjában szokták szemléltetni, az ábrán a változókat összekötő nyilak fejezik ki az okozati kapcsolatok irányát és a nyilak mellé írt útegyütthatók fejezik ki a kapcsolatok fontosságát.

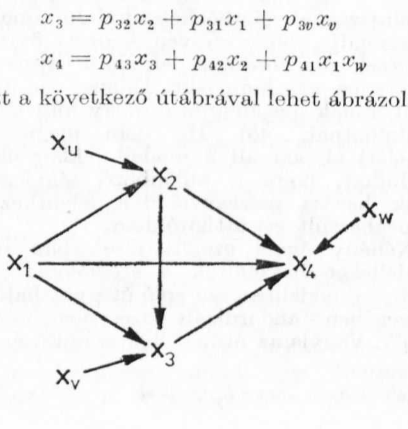
Egy tipikus négyváltozós háromegyenletes útmodell például az alábbi:

$$x_2 = p_{21}x_1 + p_{2u}x_u$$

$$x_3 = p_{32}x_2 + p_{31}x_1 + p_{3v}x_v$$

$$x_4 = p_{43}x_3 + p_{42}x_2 + p_{41}x_1x_w$$

Ezt a következő útábrával lehet ábrázolni:



Ebben a modellben tehát feltételezzük, hogy az X jelzésű okozati kapcsolatok fennállnak és az 0 jelzésűek nem állhatnak fenn:

Okozat	Ok			
	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	...	0	0	0
x_2	X	...	0	0
x_3	X	X	...	0
x_4	X	X	X	...

Az útegyütthatók és a változók közötti korrelációs együtthatók (*9*) közötti összefüggéseket az alábbi egyenletek fejezik ki:

$$\varrho_{12} = p_{21}$$

$$\varrho_{13} = p_{31} + p_{32}\varrho_{12}$$

$$\varrho_{23} = p_{31}\varrho_{12} + p_{32}$$

$$\varrho_{14} = p_{41} + p_{42}\varrho_{12} + p_{43}\varrho_{13}$$

$$\varrho_{24} = p_{41}\varrho_{12} + p_{42} + p_{42}\varrho_{23}$$

$$\varrho_{34} = p_{41}\varrho_{13} + p_{42}\varrho_{23} + p_{43}$$

Ezeknek az egyenleteknek segítségével — a korrelációs együtthatók kiszámítása után — meghatározhatjuk az útegyütthatókat.

Ezek az egyenletek ugyanakkor kifejezik a változók közötti hatások összetételét. Például az x_1 változó hatása az x_4 változóra összetevődik egyrészt a közvetlen hatásból (p_{41}), másrészt az x_2 változón keresztül megnyilvánuló hatásból ($p_{42}\varrho_{12}$), végül az x_3 változón keresztüli hatásból ($p_{43}\varrho_{13}$).

Az útmodellek bemutatása után *Duncan* — láthatóan szembefordulva saját korábbi kutatási gyakorlatával is — azt mondja, hogy előnyös lenne, ha a kutatók felhagynának azzal a gyakorlattal, hogy a változóikat standardizált alakban fejezik ki, és ehelyett az ökonometriában szokásos strukturális egyenletrendszereket alkalmaznák, amelyekben az együtthatók a közönséges regressziós együttható típusúak. A továbbiakban ilyen modellekkel foglalkozik.

Ezzel kapcsolatban kitér arra a problémára, hogy a kapott többszörös korrelációs együtthatókat, illetve azok négyzetét hogyan kell értelmezni. Ez azért lényeges probléma, mert az eddig megbecsült ilyen szociológiai modellekben az R^2 értéke többnyire meglehetősen kicsi volt. Duncan szerint az R^2 az együttható-becslések pontosságáról mond valamit, de ezen túlmenően hiba lenne az értékéből messzebbmenő következtetéseket levonni. Tehát egy magas R^2 érték nem mutatója a modell jóságának, alacsony értéke pedig nem mutatója a modell sikertelenségének, főképpen nem jelzi azt, hogy a vizsgált jelenség a modellben figyelembe nem vett tényezőktől igen erősen függ. Duncan érvelése ebben a kérdésben azonban szerintem nem dönti el az ekörül folyó széleskörű vitát.

A továbbiakban áttér a nem-rekurzív típusú modellek becslésére, vagyis arra az esetre, amikor a változók közötti összefüggések matrixa nem hozható a fenti háromszögű alakra. A szociológiában egyelőre kevés ilyen modellt becsültek.

Foglalkozik az identifikáció kérdéseivel, a nem-teljesen identifikált és túlidentifikált egyenletek becslésével. Az előbbi esetben további exogén változók hozzáadásával lehet kiutat találni, ennek azonban csak akkor van értelme, ha az új exogén változók valóban hatótényezők. Túlidentifikáltság esetén többféle megoldás lehetséges, például a kérdéses változó helyére a rá ható változókból (pl. faktoranalízissel) konstruált új változót lehet a modellbe felvenni.

Ez az utóbbi eset logikailag hasonló ahhoz, amikor a valóban vizsgálni kívánt változót nem tudjuk mérni, hanem helyette annak egy vagy több indikátorát építjük be a modellbe. Mivel ezek az indikátorok nem pontosan fejezik ki a vizsgálni kívánt változót, vagy annak a jelenségnek csak egy-egy oldalát, megnyilvánulását mérik, az előbbiekhez hasonlóan felmerül egy változó konstruálása az indikátorokból. Végül foglalkozik a könyv a specifikációs és a mérési hibák kérdéseivel.

Valószínűnek látszik, hogy a szociológiai modellek felépítésének és becslésének legsokatígérőbb útja az, amelyet Duncan képvisel ebben a munkában. Mivel ennek a módszernek ez az első ilyen összefoglalása, a könyv különös figyelmet érdemel.

ANDORKA RUDOLF