Dobó Andor — Szajcz Sándor

A software-termékek költségeinek megtérülése mint valószínűségi változó

A számítástechnikai szolgáltatások árai hazánkban igen széles határok között mozognak, mivel a számítóközpontok szolgáltató tevékenysége az úgynevezett „szabad árformá"-ba tartozik.

Nem ez a helyzet a szocialista országok zömében, olvashatjuk [1]-ben, amely részletesebben is bemutatja a számítástechnikai szolgáltatások árképzési és kalkulációs gyakorlatát a CSSZK-ban. Ebből megtudhatjuk azt is, hogy a Csehszlovákiában kialakított és érvényben levő számítástechnikai árrendszer hosszú évek tudományos kutatómunkájának eredménye. A cikk szerzője — *Glattfelder Péter* — felhívja a figyelmet arra, hogy „A magyar számítóközpontok software-értékesítési politikája szempontjából figyelemre méltó körülmény, hogy Csehszlovákiában azoknak a software-termékeknek az eladási ára, amelyeket nem egy, hanem több megbízó felé értékesítenek, alig haladja meg a 10 százalékát annak a díjszintnek, amit a kizárólag egy megrendelő részére készített software-termékeknél felszámíthatnak".

Ebben az anyagban a szolgáltatóknak és felhasználóknak egyaránt szeretnénk segítséget nyújtani azáltal, hogy megpróbálunk egy közelítő eljárást adni a software-termékek eladási árának meghatározására. A tárgyalás során a software-t egy olyan speciális terméknek tekintjük, amely bizonyos esetekben eladásra készül, s ezáltal speciális árúvá válik, amelyet elkészülte után lényegesebb ráfordítások nélkül többször is reprodukálni és eladni lehet. Reméljük, hogy az anyag már ebben a formában is hozzájárul a számítástechnikai szolgáltatások közgazdasági kérdéseinek tisztázásához, elősegíti mindazok munkáját, akik a hazai díjtételek aránytalanságainak megszüntetésén, illetve a helyes arányok kimunkálásán fáradoznak.

*

Ahhoz, hogy az eladási árat becsülni tudjuk, mindenekelőtt ismernünk kell: mennyibe került az előállítás? Ezenkívül meg kell becsülni, hogy összesen hányszor tudjuk eladni az elkészült software-terméket? Ezt a becslést úgy lehet elvégezni, hogy a már meglevő megrendelések számához hozzáadjuk az újabb rendelések várható számát.

Valamely software-termék előállítási költségének becslésére a szerzők [2]-ben adtak eljárást. (Ebben megtalálható a személyek által végzett különböző szolgáltatások, valamint a gépóra-költség meghatározási módja is!)

Ha a software-anyag előállítási árát forintban kifejezve A jelöli, akkor S-sel jelölve az eladási árát, a gyakorlatban az $S = A\delta$ összefüggéssel számolhatunk, ahol δ a software-anyag előállítási összköltségének megtérülési hányada egyszeri eladás után. (Sok esetben: $0{,}05 \leq \delta \leq 1$.)

Amikor több megrendelő részére készül a software-termék, a δ értéke, vagyis a megtérülés hányad már számottevően is ingadozhat, változhat, mivel konkrét értékének előzetes megválasztása függ a software-termék alkalmazási körének kiterjeszthetőségétől.

Tegyük fel, hogy δ Weibull-eloszlású valószínűségi változó[1], azaz

$$(1)\quad F(x) = P\{\delta < x\} = \begin{cases} 0, \text{ ha } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\beta x^\alpha}, \text{ ha } x > 0, \text{ továbbá } \alpha > 0,\ \beta > 0. \end{cases}$$

Ez esetben δ várható értéke:

$$(2)\qquad M\{\delta\} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\beta^{1/\alpha}},$$

a szórása pedig

$$(3)\qquad D\{\delta\} = \frac{1}{\beta^{1/\alpha}} \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)},$$

ahol

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-x} x^{u-1}\, dx \qquad u > 0$$

Ha például $\alpha = 2{,}17$ és $\beta = 100$, akkor

$$M\{\delta\} = 0{,}106 \sim 1/10;$$
$$D\{\delta\} = 0{,}051 \sim 1/20.$$

E szerint tehát egyetlen eladás esetén a software-termék előállítási összköltségének átlagosan 0,106-szorosa térül meg.[2]

Nyilvánvalóan az is valószínűségi változó, hogy összesen hányszor tudjuk eladni a software-anyagot. Jelölje ν ezt az értéket. Tegyük fel, hogy ν Poisson-eloszlású valószínűségi változó, vagyis

$$(4)\qquad P\{\nu = i\} = \frac{\gamma^i}{i!} e^{-\gamma},$$

ahol $\gamma > 0, \qquad i = 0,1,2, \ldots$.

Jelölje ezek után μ azt, hogy az összköltség hányszorosa térül meg az összes eladás után. Könnyen látható, hogy $\mu = \delta\nu$.

Ha δ és ν független (gyakorlatban ez a feltevés eléggé megengedhető) akkor a teljes valószínűség tétele alkalmazásával kapjuk, hogy

$$(5)\quad P\{\mu < x\} = P\{\delta\nu < x\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{\delta < \frac{x}{i} \mid \nu = i\}\, P\{\nu = i\} + P\{\nu = 0\} =$$
$$= 1 - e^{-\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\beta\left(\frac{x}{i}\right)^\alpha} \frac{\gamma^i}{i!}.$$

[1] Hogy δ milyen eloszlású, azt statisztikai módszerekkel — például hipotézis-vizsgálattal — lehet eldönteni. Adott esetben ez lehet például béta-eloszlás is.

[2] Mint látható, ez az érték egyezik a Csehszlovákiában kialakult gyakorlattal.

A μ-re nézve:

$$M\{\mu\} = M\{\nu\}\, M\{\delta\} = \gamma\, \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\beta^{1/\alpha}}, \tag{6}$$

$$D\{\mu\} = \sqrt{M\{\nu^2\}\, M\{\delta^2\} - M^2\{\nu\}\, M^2\{\delta\}} = \tag{7}$$

$$= \sqrt{\frac{\gamma^2}{\beta^{2/\alpha}}\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right] + \frac{\gamma}{\beta^{2/\alpha}}\,\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}.$$

Példaként tekintsük azt az esetet, amikor $\gamma = 15$, vagyis amikor átlagosan tizenötször adjuk el a software-anyagot.

Ha $\alpha = 2{,}17$ és $\beta = 100$, akkor

$$M\{\mu\} = 1{,}59$$
$$D\{\mu\} = 0{,}90.$$

Ez tehát azt jelenti, hogy amikor α, β és γ a fenti értékeket veszi fel, akkor átlagosan 1,59-szeresen térül meg a software-termék előállítási összköltsége.

Az (5) összefüggés alapján meghatározhatjuk például azt, hogy mi a valószínűsége annak, miszerint az összes eladás alkalmával befolyt összeg legalább annyi, mint a software-anyag előállítási költsége. Ugyanis ezt az értéket a

$$P\{\mu \geq 1\} = e^{-\gamma} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\beta\left(\frac{1}{i}\right)^{\alpha}}\, \frac{\gamma^i}{i!} \tag{8}$$

összefüggés szolgáltatja.

Amennyiben $\alpha = 2$, $\beta = 100$, $\gamma = 15$, akkor

$$M\{\delta\} = 0{,}09; \qquad M\{\mu\} = 1{,}33;$$
$$M\{\nu\} = 15; \qquad P\{\mu \geq 1\} = 0{,}60.$$

A közölt adatok mellett 100 eset közül átlag 60 esetben legalább a software-anyag előállítási költsége megtérül. Átlagosan pedig a költség 133%-a térül vissza.

A gyakorlatban a software-termék előállításának megkezdésekor már többnyire tudjuk, hogy hány felhasználó tart arra igényt. Ez más szóval azt jelenti, hogy az értékesítés szempontjából már előre ismert a biztos vevők száma.

Kérdés, hogy ha már k-szor ($k \geq 1$) eladtuk a software-anyagot, mi a valószínűsége annak, hogy összesen i-szer ($i \geq k$) adjuk el? Azaz, mi a $P\{\nu = i \mid \nu \geq k\}$ valószínűség értéke?

Könnyen látható, hogy

$$P\{\nu = i \mid \nu \geq k\} = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\gamma^i}{i!}\, e^{-\gamma}}{1 - \sum\limits_{j=0}^{k-1} \dfrac{\gamma^j}{j!}\, e^{-\gamma}}, & \text{ha } i = k, k+1, \ldots \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{9}$$

Ennek következtében az $M\{\nu \mid \nu \geq k\}$ feltételes várható értéket és a $D\{\nu \mid \nu \geq k\}$ szórást a következő összefüggésekkel számolhatjuk ki:

$$M\{\nu|\nu \geq k\} = \gamma + \frac{k}{1 + \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} \frac{\gamma^{(j-k)}}{j!} k!}, \tag{10}$$

s mivel

$$M\{\nu^2 \mid \nu \geq k\} = \frac{\gamma^2 + \gamma - \gamma^2 \sum\limits_{i=0}^{k-3} \frac{\gamma^i}{i!} e^{-\gamma} - \gamma \sum\limits_{i=0}^{k-2} \frac{\gamma^i}{i!} e^{-\gamma}}{1 - \sum\limits_{j=0}^{k-1} \frac{\gamma^j}{j!} e^{-\gamma}}, \tag{11}$$

ezért a szórást a

$$D\{\nu \mid \nu \geq k\} = \sqrt{M\{\nu^2 \mid \nu \geq k\} - M^2\{\nu \mid \nu \geq k\}} \tag{12}$$

összefüggés szolgáltatja.

Legyen $\zeta = (\nu \mid \nu \geq k)$, ekkor $(\mu \mid \nu \geq k) = \delta\zeta$. Minthogy ν és δ függetlenségéből ζ és δ függetlensége is következik, ezért

$$M\{\mu \mid \nu \geq k\} = M\{\delta\}\, M\{\nu \mid \nu \geq k)\} = \tag{13}$$

$$= \left(\gamma + \frac{k}{1 + \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} \frac{\gamma^{(j-k)}}{j!} k!}\right) \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\beta^{1/\alpha}}.$$

Az itt elmondottak arra az esetre vonatkoztak, amikor δ értékét nem választhattuk meg önkényesen, hanem az véletlentől függően vette fel az értékét. Ha módunkban áll δ értékét előre megválasztani, úgy felmerül a kérdés, hogy ha valamely software-termékre k megrendelés már van, akkor δ értéke végül is mennyi legyen?

I. módszer:

Tegyük fel: azt akarjuk elérni, hogy a software-anyag előállítási összköltségének átlagosan μ_0-szorosa $(\mu_0 \geq 1)$ térüljön meg az összes eladás során. Ekkor δ értékét az alábbi összefüggés alapján becsülhetjük:

$$\delta = \frac{\mu_0}{M\{\nu \mid \nu \geq k\}} \leq \frac{\mu_0}{k}. \tag{14}$$

II. módszer:

Ha pedig δ értékét úgy akarjuk meghatározni, hogy a software-anyag előállítási összköltsége legalább p valószínűséggel megtérüljön, akkor δ értékét az alábbi egyenlőtlenség alapján határozhatjuk meg:

$$\text{(15)} \qquad \frac{1 - \sum_{j=0}^{\left[\frac{1}{\delta}\right]+1} \frac{\gamma^j}{j!} e^{-\gamma}}{1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\gamma^j}{j!} e^{-\gamma}} \geq p, \qquad \left(\frac{1}{\delta} \geq k\right)$$

ahol $[x]$ az x egész értékét jelenti, s itt p 1-hez közel álló érték!

A δ-t pedig úgy kell meghatározni, hogy arra a (15) még teljesüljön, de kisebb δ esetén a amár ne.

Figyelembe véve, hogy

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\gamma^j}{j!} e^{-\gamma} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\gamma}^{\infty} t^{n-1} e^{-t} \mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{(n-1)!} \int_{0}^{\gamma} t^{n-1} e^{-t} \mathrm{d}t =$$

$$= 1 - \Gamma_n(\gamma) = 1 - \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\gamma^j}{j!} e^{-\gamma},$$

(15) az alábbi alakban írható:

$$\text{(15')} \qquad \frac{\Gamma_{\left[\frac{1}{\delta}\right]+2}(\gamma)}{\Gamma_k(\gamma)} \geq p$$

A $\Gamma_n(\gamma) = \int_0^{\gamma} t^{n-1} e^{-t} dt$ függvényt nem teljes gammafüggvénynek nevezik. A γ és n függvényében erre táblázat található például [3]-ban. E szerint, ha például $k = 5$, $\gamma = 15$, és $p = 0{,}90$, akkor $\left[\frac{1}{\delta}\right] = 8$, vagyis $\delta \sim 1/8$.

Minthogy a nem teljes gamma-függvény segítségével (10) az

$$\text{(10')} \qquad M\{\nu \mid \nu \geq k\} = \gamma + \frac{1}{\Gamma_k(\gamma)} \frac{\gamma^k}{(k-1)!} e^{-\gamma}$$

alakban írható, ezért a (14) alapján definiált δ értéke a

$$\text{(14')} \qquad \delta = \frac{\mu_0 \Gamma_k(\gamma)}{\gamma \Gamma_k(\gamma) + \frac{\gamma^k}{(k-1)!} e^{-\gamma}}$$

összefüggéssel számolható.

A vizsgálatok során érdekes lehet még a μ feltételes eloszlásfüggvénye, amely az alábbiak szerint határozható meg:

$$(16) \qquad P\{\mu < x \mid \nu \geq k\} = \int_0^\infty P\{(\mu < x \mid \nu \geq k) \mid \delta = y\}\, dF(y) =$$

$$= \int_0^\infty P\{(\nu < \frac{x}{y} \mid \nu \geq k) \mid \delta = y\}\, dF(y) =$$

$$= \frac{\alpha \beta e^{-\gamma}}{\Gamma_k(\gamma)} \int_0^{\frac{x}{k}} \sum_{j=k}^{\left[\frac{x}{y}\right]} \frac{\gamma^j}{j!} y^{\alpha-1} e^{-\beta y^\alpha} dy =$$

$$= 1 - \frac{1}{\Gamma_k(\gamma)} \sum_{i=k}^{\infty} e^{-\beta\left(\frac{x}{i}\right)^\alpha} \frac{\gamma^i}{i!} e^{-\gamma}.$$

Megemlítjük, hogy az értékesítéssel kapcsolatos fenti számítási eljárás nemcsak software-termékekre, hanem más ipari termékekre is hasonló módon alkalmazható. Az (5), (7), (12), (13) és (16) ,,alapösszefüggések'' pedig akkor is érvényesek, ha $F(x)$ és $P\{\nu = i\}$ nem az (1) és (4) által adottak.

(Beérkezett: 1976. október 12.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Glattfelder, P.: A számítástechnikai szolgáltatások kalkulációja és árai a CSSZK-ban. Számítástechnika, VII/1976/5.
2. Dobó, A.–Szajcz, S.: Számítógépes szolgáltatások költségalakulásának becslése; munkaközi anyag, (készült: 1976-ban a KGTMTI-ben, a Könnyűipari Minisztérium megbízásából).
3. Medgyessy, P.–Takács, L.: Valószínűségszámítás Budapest, 1966 Tankönyvkiadó.

THE RETURNS OF COSTS OF SOFTWARE PRODUCTS AS PROBABILITY VARIABLE

The paper deals with the estimation of sales price of software materials. The returns ratio of total production costs of software product through a single sale (δ) is regarded as a probability variable. Marking the number of total sales with ν (that is also a probability variable) the distribution, expected value and dispersion of $\mu = \delta\nu$ are examined under certain conditions, where, therefore, μ means how many times total costs will be refunded after total sales. Furthermore, the distribution function and expected value of μ will be examined with $\nu \geq k$. The results obtained are applied for estimating the value of δ. According to one procedure the relationships (14) and (14'), while according to an other (15) and (15'), respectively, are applied. The results obtained can be used in the examination of costs returns of products with multiple reproducibility.

ИЗУЧЕНИЕ ОКУПАЕМОСТИ ИЗДЕРЖЕК НА Т. Н. «СОФТВЕР» В КАЧЕСТВЕ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В своем труде авторы оценивают цену продажи материалов «софтвер». Они рассматривают долю окупаемости общих издержек на «софтвер» после первой продажи (δ) как вероятностную переменную. Обозначая через «ν» общее число продаж (являющееся также вероятностной переменной), они при определенных условиях изучают распределение математическое ожидание и дисперсию функции $\mu = \delta\nu$, где таким образом «μ» обозначает, сколько раз окупаются общие издержки после всех продаж. Далее авторы определяют условную функцию распределения «μ» и ее математическое ожидание в случае $\nu \geqslant$ k. Полученные результаты они используют для приблизительной оценки величины «μ». По одному методу применяется взаимозависимость согласно (14) и (14'), по другому же — согласно (15) и (15'). Полученные результаты, как правило, могут использоваться при изучении окупаемости товаров, репродуцируемых несколько раз.