Vita László

A főkomponens-elemzés alkalmazása az indexszámításban

1. Bevezetés

Mint ismeretes, az indexszámítás feladata a következő: adva van n termék (árucikk), és t számú időszakra nézve ismerjük e termékek egységárait és a belőlük termelt (eladott stb.) mennyiségeket. E mennyiségek ismeretében választ kell adnunk arra a kérdésre, hogy az n termék összességére nézve hogyan alakultak átlagosan az árak, illetve a termelt mennyiségek ([16]: 362. és 366. old.). Ez úgy is megfogalmazható, hogy az árszínvonal, illetve a termelési színvonal időbeli változásának mérése a cél.[1]

Jelölje a továbbiakban p_{ik} a k-adik termék i-edik időszakra vonatkozó egységárát, q_{ik} pedig a belőle az i-edik időszakban termelt mennyiséget. Alapadataink ekkor egy-egy $t \times n$ típusú ár- (**P**), illetve volumenmatrixba (**Q**) foglalhatók:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{t1} & p_{t2} & \cdots & p_{tn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{t1} & q_{t2} & \cdots & q_{tn} \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

A jelen cikkben a főkomponens-elemzést használjuk fel a vázolt indexszámítási probléma megoldására. Erre kétféle lehetőség is kínálkozik:

1. vagy az egyes termékre, termékcsoportokra (szektorokra stb.) vonatkozó ár- és volumen indexeket,

2. vagy a különböző időszakok mennyiségeinek (árainak) felhasználásával képzett árindexsorokat (volumenindexsorokat), esetleg aggregátumokat tekintjük változóknak.

Itt mindjárt meg kell jegyeznünk, hogy a főkomponens-elemzés fenti két alkalmazási módja között alapvető különbség van.

Az első *alkalmazási mód* esetén ugyanis az alapulvett egységek (termékek, termékcsoportok, szektorok stb.) árváltozás (volumenváltozás) szempontjából való *homogenitásának*, tehát annak a kérdésnek a vizsgálatán van a hangsúly, hogy az adott egységekhez tartozó indexek (a továbbiakban: *részindexek)* kielégítően jellemezhetők-e egyetlen index, az ún. *főindex* segítségével. Ha

[1] Sok esetben nem az időbeli változás, hanem a térbeli különbözőség elemzésére van szükség. Az egyszerűség kedvéért azonban most is és a továbbiakban is időbeli összehasonlításról beszélünk. Megfontolásaink nagy része azonban — értelemszerű módosításokkal — térbeli összehasonlítás esetén is érvényes. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy térbeli összehasonlítás esetén nem adódhatnak speciális problémák. Ezek vizsgálatára azonban csak egy későbbi tanulmányban szándékozunk kitérni.

ugyanis az alapulvett változók — azaz a részindexek — mind nagy (1-hez közeli) súllyal szerepelnek az első főkomponensben, biztosak lehetünk abban, hogy a főindex önmagában is jó jellemzője a vizsgált jelenségnek. Ha ezzel szemben azt találjuk, hogy a részindexek egyes csoportjai egy főkomponenshez nagy súllyal, az összes többihez pedig elhanyagolhatóan kis súllyal kapcsolódnak, akkor ezt úgy értelmezhetjük, hogy a főindex mellett feltétlenül szükség van a részindexek használatára is az elemzés során. A főkomponensekre vonatkozó súlyok minden más alakulási sémája esetén problematikussá válhat az eredmények interpretálása. Ha a főkomponens-elemzés eredményei azt jelzik, hogy a főindex, vagy a főindex és a részindexek együttesen jól jellemzik a vizsgált jelenséget, akkor — véleményünk szerint — a főindex a megfelelő részindexeknek (a részindex a megfelelő egyedi indexeknek) mindig valamilyen Σpq (pq) adatokkal, és semmiképpen sem a főkomponenselemzés során adódó súlyokkal súlyozott átlagaként állítandó elő, hiszen az utóbbiak kizárólag a részindexek különböző időszakokra vonatkozó értékei közötti korrelációktól függenek, ami önmagában semmiféle garanciát nem ad arra nézve, hogy az egységek közgazdasági fontossága kifejezésre jusson. ([16]: 360—363 és 373—376. old.) Az indexek számszerű értéke tehát ilyenkor nem közvetlenül a főkomponens-elemzés eredményeiből adódik, ami egyben a később ismertetendő *Tintner*-féle és *Rutherford*-féle módszerek előzetes kritikájának is tekinthető. Ezt még azzal egészíthetjük ki, hogy a főkomponens-elemzés ilyen alkalmazási módja során — különösen egyedi termékek alapulvétele esetén — problémát okozhat az is, hogy a változók száma meghaladhatja a megfigyelések számát.

A főkomponens-elemzés *másodiknak* említett *alkalmazási módja* esetén a fő cél az, hogy az alapulvett indexsorokat — a lehető legkisebb információveszteség mellett — egyetlen indexsorral helyettesítsük. Ebben az esetben tehát — az előbbi esettel ellentétben — az indexsor számszerű értékeinek meghatározásán van a hangsúly, s erre a főkomponens-elemzés eredményeit közvetlenül fel is használjuk.

G. Tintner, aki már egy 1946-ban publikált cikkében leírja a főkomponens-elemzésnek egy indexszámítási alkalmazását, s az alkalmazás módját és az eredmények interpretálását két számszerű példával is illusztrálja ([24]: 482—485. old.), az elsőnek említett lehetőséget választja. A főkomponens-elemzést négy cikkcsoport standardizált (0 átlagú és 1 szórású) volumenindexeire, illetve három cikkcsoport standardizált árindexeire alkalmazva arra az eredményre jut, hogy az első főkomponens mindkét esetben gyakorlatilag kielégítő mértékben megmagyarázza a megfelelő csoportindexek varianciáját, azaz, hogy „a vizsgált időszakban az amerikai gazdaságban minden bizonnyal létezett egy «általános termelésnek» nevezhető tényező" (483. old.), illetve egy olyan „általános árindex, ami nagyon jól megmagyarázná a cikkcsoport árindexeinek ingadozását". (485. old.) Azt is meghatározza, hogy a standardizált csoportindexek mekkora súllyal szerepelnek az első főkomponensben. Tintner módszere lényegében az *E. C. Rhodes* által 1937-ben javasolt „gazdasági aktivitási indexíí [19] tökéletesített változata. Rhodes a gazdasági aktivitás általános indexét ugyanis a gazdasági élet különböző parciális mutatóiból számított indexek súlyozott átlagaként határozta meg, és a súlyokat lényegében faktoranalitikus módszerrel, de igen kezdetleges módon becsülte.

Az *R. S. G. Rutherford*-tól származó „főfaktor-megközelítés" [20] részben a Tintner által javasolt módszer gyakorlati alkalmazásának, részben pedig a Tintner-féle gondolatmenet továbbfejlesztésének tekinthető. Rutherford ugyanis a különböző gazdasági szektorokra vonatkozó indexeket egy általános index indikátorainak tekinti, s a faktoranalízis modelljéből indul ki. A faktorsúlyokat a főkomponens-elemzés eredményeivel közelíti. Nem zárja azonban ki annak lehetőségét sem, hogy az egyes szektorokra vonatkozó indexek csak egynél több faktorral írhatók le, ami — saját bevallása szerint is — problematikussá teheti az eredmények interpretálását. A módszer problémájaként említi meg azt is, hogy az csak az általános index standardizált értékeinek meghatározására alkalmas, melyeknek valamilyen „természetes" skálára való visszatranszformálása nem egyértelmű.

Az eddig vázolt módszerek ezen túlmenő kritikájára már a főkomponens-elemzés kétféle alkalmazási módjának ismertetése során kitértünk.

A *H. Theil* által javasolt BL-módszernek[2] [22] az az elsődleges célja, hogy egy olyan árindexeket tartalmazó **p** és egy olyan volumenindexeket tartalmazó **q** vektort határozzon meg, melyeknek **pq**′ diadikus szorzata a lehető legjobban megközelíti az aggregátumok

$$\mathbf{A} = \mathbf{PQ}' = \left[\sum_{k=1}^{n} p_{ik} q_{jk}\right] \quad (i, j = 1, 2, \ldots, t) \tag{1.2}$$

matrixát, pontosabban, amelyekre nézve az

$$||\mathbf{A} - \mathbf{pq}'||^2 = \mathrm{tr}(\mathbf{AA}') - 2\mathbf{p}'\mathbf{Aq} + \mathbf{p}'\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}'\mathbf{q} \tag{1.3}$$

euklidészi normanégyzet minimális.[3] Ekkor a **p** vektor az **A** matrix oszlopainak megfelelő változók, a **q** vektor pedig az **A** matrix sorainak megfelelő változók első főkomponensének alkalmasan normált értékeiből áll.[4] Ebben a vonatkozásban a BL-módszer a főkomponens-elemzés második alkalmazási módjának egyik realizálása.

Kloek és *deWit* — a BL-módszer első numerikus alkalmazói — felismerték, hogy a BL-módszer alkalmazása egyirányú torzítást rejt magában [12], aminek kiküszöbölése céljából kidolgozták a BLAU-módszert.[5] A BLAU-módszer csak annyiban tér el a BL-módszertől, hogy az (1.3) kifejezést a

$$\mathrm{tr}(\mathbf{A} - \mathbf{pq}') = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) - \mathbf{p}'\mathbf{q} = 0 \tag{1.4}$$

feltétel mellett minimalizálja, ami nem jelent a BL-módszertől való lényeges eltérést.

Kloek és *vanRees* az aggregátumoktól való abszolút eltérések négyzetösszege helyett az azoktól való relatív eltérések négyzetösszegét minimalizálják, és az így módosított BL-módszert DBL-módszernek[6] nevezik [13]. E módosítást azzal indokolják, hogy az aggregátumoktól való abszolút eltérések figyelembe-

[2] A rövidítés a *B*est *L*inear Index Numbers (= Legjobb lineáris indexek) elnevezésre utal.

[3] A tr(·) szimbólum a zárójelbe tett matrix nyomát, azaz a matrix fődiagonálisában álló elemek összegét jelöli.

[4] Ez úgy értendő, hogy az első esetben az **A** oszlopai, a második esetben pedig az **A** sorai jelentik a szóbanforgó változókra vonatkozó megfigyeléseket. Vö. ezt még a 6. lábjegyzetben mondottakkal is.

[5] A *B*est *L*inear *A*varage *U*nbiased Index Numbers (= Legjobb lineáris átlagosan torzítatlan indexek) elnevezés rövidítése.

[6] A *D*eflated *B*est *L*inear Index Numbers (= Deflált legjobb lineáris indexek) elnevezés rövidítése.

vétele implicit súlyozást rejt magában, ami nem kívánatos. Ezt küszöböli ki az abszolút eltérésekről a relatív eltérésekre való áttérés. Mint látható, ez a módosítás sem jelent a BL-módszertől való lényeges eltérést.

A BL-módszer és módosított változatai abból a – nézetünk szerint hibás, pontosabban: csak speciális esetekben helytálló – feltevésből indulnak ki, hogy az

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} q_{jk} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, t)$$

aggregátumok egy csak i-től függő p_i átlagár és egy csak j-től függő átlagos mennyiség szorzatára bonthatók fel, hiszen éppen az e felbontás útján adódó $a_{ij} - p_i q_j$ eltérések négyzetösszegének minimalizálását tűzik ki célul. Ennek azonban – bár ez az indexek számszerű értékére általában nem hat ki – közgazdaságilag csak akkor van értelme, ha *egy bizonyos fajta árucikk* különböző területi egységekre, vagy különböző fajta minőségi változataira vonatkozó ár- és mennyiségi adatokról van szó ([16]: 428–429. old. és [18]). Ilyen esetben alkalmazza egyébként *F. Divisia* is ([7]: 1008. old.), akire e felbontás felfedezőjeként szoktak utalni ([1]; [9]). Ha azonban különnemű, közvetlenül nem összesíthető termékekről van szó, – márpedig a gyakorlatban a legtöbbször ez a helyzet – a szóbanforgó felbontás értelmét veszti, formálissá válik, s ugyanez a helyzet a BL, BLAU és DBL módszerekkel is.

A most következő 2. pontban mi is a másodiknak említett módon használjuk fel a főkomponens-elemzést az indexszámítás feladatának megoldására. E felhasználás azonban, mint látni fogjuk, jóval direktebb, mint a Theil-től származó BL-módszer és módosított változatai.

2. Az egzakt főkomponens-indexek

Tekintsük az aggregátumok (1.2) matrixa alapján igen egyszerűen meghatározható t számú, csak az állandó súlyként használt mennyiségek, illetve egységárak eredetében különböző, állandó súlyú

$$_{p}I_i^{(j)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_{ik} q_{jk}}{\sum_{k=1}^{n} p_{1k} q_{jk}} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, t) \tag{2.1}$$

bázis-árindexsort, illetve

$$_{q}I_i^{(j)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} p_{jk} q_{ik}}{\sum_{k=1}^{n} p_{jk} q_{1k}} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, t) \tag{2.2}$$

bázis-volumenindexsort, és foglaljuk ezeket egy-egy t-edrendű

$$\mathbf{I}_p = [_{p}I_i^{(j)}], \tag{2.3}$$

árindex-, illetve

$$\mathbf{I}_q = [_{q}I_i^{(j)}] \tag{2.4}$$

volumenindex-matrixba. Az indexsorok képzésekor — az általánosság megszorítása nélkül — feltettük, hogy a legelső időszak a bázis.

Ekkor nyilvánvaló, hogy a (2.1) alatti t számú bázisárindexsor (a (2.2) alatti t számú bázis-volumenindexsor) mindegyike az árszínvonal (termelési színvonal) időbeli változását mutatja a bázisként választott első időszak árszínvonalához (termelési színvonalához) képest, és semmi okunk sincs arra, hogy a t számú indexsor közül bármelyiket is előnyben részesítsük a többivel szemben, ha az árszínvonal (termelési színvonal) időbeli változását kívánjuk mérni. Ez úgy is interpretálható, hogy az ${}_pI_i^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, t)$ $[{}_qI_i^{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, t)]$ változók, — melyekre nézve a (2.3) alatti $\mathbf{I}_p$ matrix (a (2.4) alatti $\mathbf{I}_q$ matrix) egyes oszlopai t számú megfigyelést jelentenek, az ,,árszínvonal" (,,termelési színvonal") t számú indikátorának tekinthetők.[7] A csak az elméleti absztrakció síkján létező, közvetlenül nem mérhető ,,árszínvonal" (,,termelési színvonal") időbeli alakulásáról tehát a (2.1) bázis-árindexsorok ((2.2) bázis-volumenindexsorok) adnak képet.

Mivel a további tárgyalás szempontjából teljesen közömbös az, hogy ár-, vagy volumenindexsorokról van-e szó, a (2.1) és (2.2), illetve a (2.3) és (2.4) általánosításaként bevezetjük az

$$I_i^{(j)} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, t) \tag{2.5}$$

illetve az

$$\mathbf{I} = [I_i^{(j)}] \tag{2.6}$$

jelölést, ahol $I_i^{(j)}$ a j-edik időszak súlyaival képzett bázisindexsor i-edik időszakra vonatkozó értéke.

Az $I^{(j)}$ indikátorok mögött meghúzódó, közvetlenül nem mérhető változót I^*-gal jelölve, az $I^{(j)}$ indikátorok és az I^* közötti kapcsolat egyik legegyszerűbb leírása az

$$\begin{aligned} I^{(1)} &= a_1 I^* + u_1 \\ I^{(2)} &= a_2 I^* + u_2 \\ &\vdots \\ I^{(t)} &= a_t I^* + u_t \end{aligned} \tag{2.7}$$

statisztikai modell, amelyben az u_j $(j = 1, 2, \ldots, t)$ változók hibatagok.[8] Ez utóbbiakról feltesszük, hogy I^*-gal is és egymással is páronként korrelálatlanok. A (2.7) modell így nem más, mint egy olyan speciális faktornaalitikus modell, amelyben egyetlen közös faktor szerepel. A faktoranalízis becslési

[7] Megjegyezzük, hogy az aggregátumok (1.2) matrixának egyes oszlopai — a fentihez teljesen hasonló gondolatmenettel — olyan változókra vonatkozó t számú megfigyelésnek tekinthetők, mely változók az árváltozásoknak a termelési érték időbeli alakulására gyakorolt hatását mutatják. Itt is feltételezhető, hogy e változók egy közvetlenül nem mérhető, hipotetikus termelési érték indikátorai. Ezt a gondolatmenetet azonban túl erőltetettnek érezzük, s ezért úgy véljük, hogy a BL-indexeknek nem adható ilyen közvetlen és egyszerű interpretáció.

[8] Az elméleti változóknak indikátorok alapján történő vizsgálata az 1960-as évek szociológiai módszertanának egyik legfőbb eredménye. E módszer egyik legelső megfogalmazója *H. M. Blalock* [3]. Egzakt matematikai-statisztikai alapokra helyezése *R. M. Hauser* és *A. S. Goldberger* nevéhez fűződik [10].

módszereinek alkalmazásával[9] meghatározhatók e faktor egyes időszakokra vonatkozó értékei, amik azután — attól függően, hogy a (2.3) vagy a (2.4) adatmatrixból indultunk-e ki — ár- vagy volumenindexeknek tekinthetők. A probléma természete itt azt kívánja, hogy ne az indexek standardizált értékeiből, hanem az eredeti skálán mozgó (2.5) értékekből induljunk ki. Ez csak annyi eltérést jelent a szokásos faktoranalitikus módszerektől, hogy a változók korrelációs matrixa helyett azok nem-centrális második momentumainak matrixából indulunk ki.

A követendő becslési eljárást azonban nagymértékben leegyszerűsíthetjük azzal, ha a (2.7) faktoranalitikus modell helyett a főkomponens-elemzés

$$
\begin{aligned}
I^{(1)} &= a_{11}I_1 + a_{12}I_2 + \ldots + a_{1t}I_t \\
I^{(2)} &= a_{21}I_1 + a_{22}I_2 + \ldots + a_{2t}I_t \\
&\vdots \\
I^{(t)} &= a_{t1}I_1 + a_{t2}I_2 + \ldots + a_{tt}I_t
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

modelljéből indulunk ki, és az I_1 első főkomponensnek egyes időszakokra vonatkozó, alkalmasan normált értékeit tekintjük indexeknek. Az így adódó indexeket egzakt főkomponensindexeknek (vagy rövidebben FK-indexeknek) nevezzük, és attól függően, hogy ár- vagy volumenindexekről lesz-e szó, az $\mathrm{FKI_p}$ vagy $\mathrm{FKI_q}$ szimbólumokkal jelöljük.

A (2.7) modellnek a könnyebben kezelhető (2.8) modellel való helyettesítése azzal indokolható, hogy a (2.7) és (2.8) modellben közös $I^{(j)}$ változók speciális konstrukciója — különösen időbeli összehasonlítás esetén — biztosítja azt, hogy varianciájukat az első főkomponens gyakorlatilag teljes mértékben megmagyarázza, s így a

$$\sum_{p=2}^{t} a_{jp}\, I_p \quad (j = 1, 2, \ldots, t)$$

mennyiségeket hibatagnak lehessen tekinteni.

Particionáljuk most a (2.6) alatti $\mathbf{I}$ matrixot az

$$
\mathbf{I} = \left[\begin{array}{c:ccc}
1 & 1 & \ldots & 1 \\ \hdashline
I_2^{(1)} & I_2^{(2)} & \ldots & I_2^{(t)} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
I_t^{(1)} & I_t^{(2)} & \ldots & I_t^{(t)}
\end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{1}' \\ \mathbf{i}_2, & \mathbf{I}_{22} \end{bmatrix}
\tag{2.9}
$$

módon. Ekkor, az első főkomponens meghatározása egy olyan t-elemű $\mathbf{p}_1$ és $\mathbf{a}_1$ vektor meghatározásával ekvivalens ([23]: 46—48. old.), melyekre nézve

$$\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{a}) = \|\mathbf{I} - \mathbf{pa}'\|^2 = \mathrm{tr}(\mathbf{II}') - 2\mathbf{p}'\mathbf{Ia} + \mathbf{p}'\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}'\mathbf{a} \tag{2.10}$$

[9] E becslési módszerek leírása például [17]-ben találhatók meg.

euklidészi normanégyzet minimális.[10] A szokásos főkomponenselemzéstől[11] csak annyiban térünk el, hogy

a) az $I^{(j)}$ változóknak nem a standardizált, hanem az eredeti $I_i^{(j)}$ értékeit vesszük alapul

b) a szokásos $\mathbf{p}'\mathbf{p} = 1$ feltétel helyett a $\mathbf{p}$ vektort úgy normalizáljuk, hogy legelső eleme 1 legyen.

Mindkét eltérésre azért van szükség, hogy az FK-indexek, amelyek a $\mathbf{p}$ vektor elemei, közvetlenül összehasonlíthatók legyenek az $\mathbf{I}$ matrix azonos jelentésű elemeivel.

Könnyen belátható, hogy a (2.10)-et minimalizáló $\mathbf{p}_1$ vektor az $\mathbf{II}'$ matrix legnagyobb, λ_1 sajátértékéhez tartozó, céljainknak megfelelően normált sajátvektor, $\mathbf{a}_1$ pedig — $\mathbf{p}_1$ ismeretében — az

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\mathbf{p}_1'\mathbf{p}_1}\mathbf{I}'\mathbf{p}_1$$

módon határozható meg. Egyszerű számolással adódik az is, hogy

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{p}_1'\mathbf{II}'\mathbf{p}_1}{\mathbf{p}_1'\mathbf{p}_1} = (\mathbf{a}_1'\mathbf{a}_1)(\mathbf{p}_1'\mathbf{p}_1) \tag{2.11}$$

Az így adódó $\mathbf{p}_1$ vektor elemei, amelyek mind pozitívak ([25], 212. old.), az FK-indexek. A $\mathbf{p}_1$ vektor numerikus meghatározásának kérdéseivel, valamint

[10] A matrix nyomának definícióját felhasználva könnyen belátható, hogy $\mathrm{tr}(\mathbf{II}') = \mathrm{tr}(\mathbf{I}'\mathbf{I})$ az $\mathbf{I}$ matrix elemeinek négyzetösszegével egyenlő.

[11] Ismeretes [17], hogy a főkomponens-elemzés modellje

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}\mathbf{k},$$

amelyben $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_p]'$ a p számú eredeti változó vektora,

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \ldots & w_{1p} \\ w_{21} & w_{22} & \ldots & w_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{p1} & w_{p2} & \ldots & w_{pp} \end{bmatrix} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_p]$$

az ún. súlyok matrixa, és

$$\mathbf{k} = [k_1, k_2, \ldots, k_p]'$$

az ún. főkomponensek vektora. A $\mathbf{W}$ súlymatrix oszlopait olymódon szokás megválasztani, hogy

$$\mathbf{w}_i'\mathbf{w}_j = \begin{cases} \lambda_i, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, p)$$

álljon fenn, ahol λ_i — a kiindulástól függően — az x_i változók második nem-centrális momentum-matrixának, variancia-kovariancia matrixának, vagy korrelációs matrixának i-edik legnagyobb sajátértéke. Legtöbbször a korrelációs matrixból indulnak ki. Belátható, hogy az általunk meghatározandó $\mathbf{a}_1$ vektor a $\mathbf{W}$ súlymatrix első oszlopától csak egy konstans szorzóban tér el, valamint azt is, hogy — egy normalizáló tényezőtől eltekintve —

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\lambda_1}\mathbf{X}\mathbf{w}_1,$$

ahol $\mathbf{X}$ az x_i változókra vonatkozó megfigyeléseket tartalmazó $n \times p$ típusú matrix.

az FK-indexek egy igen egyszerű közelítésével a következő két pontban foglalkozunk.

Ugyanott szükség lesz még a következő eredményekre is:

1. A (2.10) függvény φ_0-lal jelölt, minimális értéke

$$\varphi_0 = \varphi(\mathbf{p}_1, \mathbf{a}_1) = \mathrm{tr}(\mathbf{II}') - \lambda_1 \tag{2.12}$$

Ez a (2.10) és (2.11) felhasználásával igen könnyen igazolható.

2. Az

$$I_{kl} = \sum_{j=1}^{t} I_k^{(j)} I_l^{(j)} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, t)$$

elemekből felépülő $\mathbf{II}'$ matrix (2.9)-nek megfelelő particionálása

$$\mathbf{II}' = \begin{bmatrix} 1 + \mathbf{l}'\mathbf{l}; & \mathbf{i}_2' + \mathbf{l}'\mathbf{I}_{22}' \\ \mathbf{i}_2 + \mathbf{I}_{22}\,\mathbf{l}; & \mathbf{i}_2\,\mathbf{i}_2' + \mathbf{I}_{22}\,\mathbf{I}_{22}' \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

ahol a szimbólumok jelentése ugyanaz, mint (2.9)-ben. Bizonyos esetekben célszerűbbnek fog mutatkozni az $\mathbf{II}'$ matrix

$$\mathbf{II}' = t \begin{bmatrix} 1 & \bar{\mathbf{i}}_2' \\ \bar{\mathbf{i}}_2 & \bar{\mathbf{I}}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

particionálása, amelyben

$$\bar{\mathbf{i}}_2' = [\bar{I}_2, \bar{I}_3, \ldots, \bar{I}_t]; \quad \bar{I}_k = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{t} I_k^{(j)} \qquad (k = 2, \ldots, t)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_{22} = [\bar{I}_{kl}]; \qquad \bar{I}_{kl} = \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{t} I_k^{(j)}\, I_l^{(j)} \qquad (k, l = 2, \ldots, t). \tag{2.15}$$

A kétféle particionálás közötti összefüggés a (2.13) és (2.14) blokkonkénti összehasonlításából közvetlenül adódik.

3. Egy gyakorlati alkalmazás

Az előző pontban vázolt eljárást most 39 cikk budapesti piacokra való, 1960—1970. évi felhozatalának adataira alkalmazzuk.[12]

A számítások kiindulópontját képező (2.3) és (2.4) indexmatrixokat az 1. és 2. tábla tartalmazza. (A bázisidőszak 1960.)

A megfelelő $\mathbf{II}'$ matrixokhoz tartozó legnagyobb sajátérték és egy ahhoz tartozó sajátvektor meghatározására az ún. Mises-féle iterációt használtuk,[13]

[12] Az alapadatok forrása [5]. Az itt közölt számítások alapjául szolgáló összes lehetséges állandó súlyú bázis ár- és volumenindexsort (1. és 2. tábla) *dr. Köves Pál* bocsátotta rendelkezésemre, amiért ezúton is köszönetet mondok.

[13] A módszer leírását lásd például a [21] 258—259. oldalán.

1. sz. tábla

Állandó sulyu bázis-árindexsorok (1960 = 100)

Év	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
	évi mennyiségekkel számolva (%)										
	$_pI^{(1)}$	$_pI^{(2)}$	$_pI^{(3)}$	$_pI^{(4)}$	$_pI^{(5)}$	$_pI^{(6)}$	$_pI^{(7)}$	$_pI^{(8)}$	$_pI^{(9)}$	$_pI^{(10)}$	$_pI^{(11)}$
1960	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
1961	106,10	104,25	105,09	104,50	104,73	104,92	105,34	104,74	104,82	104,02	103,94
1962	113,14	111,72	108,81	109,91	109,85	111,39	111,75	111,18	110,83	109,59	109,28
1963	99,93	99,44	98,44	96,21	97,44	98,46	97,99	97,88	98,74	98,01	98,52
1964	109,81	107,92	105,93	105,01	104,82	106,41	106,61	105,59	105,54	104,37	103,99
1965	121,90	119,93	118,33	117,33	116,13	116,47	117,49	115,94	114,89	114,36	113,12
1966	115,88	113,99	112,97	111,61	110,65	110,60	110,80	109,89	109,29	108,67	108,37
1967	114,64	112,38	110,82	108,94	107,58	107,52	107,27	105,28	104,46	103,89	103,27
1968	126,66	123,74	121,10	120,99	117,83	118,61	118,51	116,83	113,51	114,13	111,80
1969	125,13	120,68	117,98	117,94	115,73	116,21	116,49	114,48	112,31	111,08	109,93
1970	138,02	133,27	129,25	129,18	125,27	125,61	127,63	125,49	120,77	121,45	116,58

2. sz. tábla

Állandó sulyu bázis-volumenindexsorok (1960 = 100)

Év	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
	évi árakkal számolva (%)										
	$_qI^{(1)}$	$_qI^{(2)}$	$_qI^{(3)}$	$_qI^{(4)}$	$_qI^{(5)}$	$_qI^{(6)}$	$_qI^{(7)}$	$_qI^{(8)}$	$_qI^{(9)}$	$_qI^{(10)}$	$_qI^{(11)}$
1960	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
1961	89,29	87,73	88,16	88,85	87,75	87,85	87,84	87,53	87,23	86,11	86,22
1962	79,30	78,55	76,27	78,11	76,50	76,98	77,31	76,66	75,82	74,77	74,26
1963	94,48	93,05	91,79	90,97	90,36	90,94	91,00	89,78	90,25	89,06	88,43
1964	100,90	99,59	97,97	98,39	96,32	96,13	96,35	94,69	93,87	93,32	91,58
1965	99,02	97,92	97,49	97,57	95,95	94,61	94,52	92,88	92,73	91,96	90,12
1966	119,51	118,65	118,04	117,19	116,04	115,19	114,28	111,83	111,82	111,26	110,51
1967	132,24	130,54	129,95	129,52	127,15	125,78	125,41	121,45	121,98	120,98	120,23
1968	141,26	139,55	138,37	139,58	135,76	133,13	133,24	128,72	126,59	126,78	123,60
1969	147,08	144,19	142,46	144,25	139,79	137,98	137,93	133,29	132,52	130,56	129,42
1970	153,12	150,00	147,90	150,97	145,00	142,09	143,21	137,94	135,16	134,52	129,33

és mindkét esetben igen gyors konvergenciát tapasztaltunk. Ennek okára a következő pontban mutatunk majd rá. Az FK ár- és volumenindexeket, valamint a tényleges (I_v) és az

$$\mathrm{FK}\,\mathbf{I}_v = \mathrm{FK}\,\mathbf{I}_p \cdot \mathrm{FK}\,\mathbf{I}_q \tag{3.1}$$

módon definiált FK-értékindexeket a 3. tábla tartalmazza. Ugyancsak a 3. táblában tüntettük fel az

$$\bar{\mathbf{i}}_p' = \left[1; \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} pI_2^{(j)}; \ldots ; \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} pI_t^{(j)}\right] = \frac{1}{t}\mathbf{I}_p\mathbf{1} \tag{3.2}$$

átlag-árindexeket (AI_p) és

$$\bar{\mathbf{i}}_q' = \left[1; \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} qI_2^{(j)}; \ldots ; \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} qI_t^{(j)}\right] = \frac{1}{t}\mathbf{I}_q\mathbf{1} \tag{3.3}$$

átlag-volumenindexeket (AI_q), melyek a $\mathbf{I}_p$, illetve $\mathbf{I}_q$ index-matrixok egyes soraiban levő elemek súlyozatlan számtani átlagai.

3. tábla

Az eredmények összefoglalása

Év	$FK\mathbf{I}_p$	$A\mathbf{I}_p$	$FK\mathbf{I}_q$	$A\mathbf{I}_q$	$FK\mathbf{I}_v$	$A\mathbf{I}_v$	I_v
1960	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00
1961	104,78	104,77	87,71	87,69	91,90	91,87	93,08
1962	110,69	110,68	76,82	76,78	85,03	84,97	86,29
1963	98,29	98,28	90,97	90,92	89,41	89,35	90,90
1964	106,03	106,00	96,37	96,28	102,18	102,06	105,76
1965	116,95	116,90	95,06	94,98	111,18	111,03	115,33
1966	111,20	111,16	115,03	114,94	127,92	127,76	132,42
1967	107,90	107,82	126,06	125,93	136,01	135,78	139,22
1968	118,61	118,52	133,51	133,33	158,35	158,02	160,34
1969	116,27	116,18	138,31	138,13	160,81	160,48	163,37
1970	126,71	126,59	142,89	142,66	181,06	180,60	178,50

A 3. tábla eredményeit még azzal egészíthetjük ki, hogy

$$\mathrm{tr}(\mathbf{I}_p\mathbf{I}_p') = 148{,}975\,987, \quad \lambda_1^{(p)} = 148{,}870\,906$$

$$\mathrm{tr}(\mathbf{I}_q\mathbf{I}_q') = 150{,}244\,017, \quad \lambda_1^{(q)} = 150{,}208\,052,$$

ahol $\lambda_1^{(p)}$ az $\mathbf{I}_p\mathbf{I}_p'$, $\lambda_1^{(q)}$ pedig az $\mathbf{I}_q\mathbf{I}_q'$ matrix legnagyobb sajátértéke.

A közölt eredmények alapján megállapíthatjuk, hogy

a) Az 1. illetve 2. tábla indexsorai gyakorlatilag információveszteség nélkül helyettesíthetők a megfelelő FK-indexekkel.

b) a (3.2), illetve (3.3) átlag-indexek igen jól közelítik az $\mathrm{FK}\mathbf{I}_p$ illetve $\mathrm{FK}\mathbf{I}_q$ indexeket.

c) Úgy tűnik, hogy az FK-indexek az ún. tényezőpróba szempontjából egyirányúan torzítottak, mivel az utolsó év kivételével

$$\mathrm{FKI}_v < \mathrm{I}_v \tag{3.4}$$

figyelhető meg.

Az *a)* megállapítás illusztrálása céljából mindkét esetben meghatározzuk az

$$I^2 = \frac{\lambda_1}{\mathrm{tr}(\mathbf{II}')} \tag{3.5}$$

módon definiálható illeszkedési együtthatókat[14] ([22], 474. old.), valamint az egyes $I^{(j)}$ indikátorok és a megfelelő első főkomponens közötti korrelációs együtthatókat.

A korrelációs együttható definícióját felhasználva, és figyelembevéve a 10. lábjegyzetben mondottakat, belátható, hogy azok az

$$r_{j1} = r_{I^{(j)}I_1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{t}} w_{j1} - \bar{I}^{(j)}\alpha}{\sigma^{(j)}\sigma_1} \tag{3.6}$$

módon számíthatók. A (3.6) formulában w_{j1} a

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{p}_1'\mathbf{p}_1}} \mathbf{I}'\mathbf{p}_1$$

vektor j-edik eleme, $\bar{I}^{(j)}$ az $I^{(j)}$ indikátor

$$\bar{I}^{(j)} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} I_i^{(j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, t) \tag{3.7}$$

átlaga, $\sigma^{(j)}$ az $I^{(j)}$ indikátor

$$\sigma^{(j)} = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t} (I_i^{(j)} - \bar{I}^{(j)})^2} \qquad (j = 1, 2, \ldots, t) \tag{3.8}$$

szórása,

$$\alpha = \frac{\sqrt{t}\,[\bar{I}^{(1)}, \bar{I}^{(2)}, \ldots, \bar{I}^{(t)}]\,\mathbf{w}_1}{\lambda_1}$$

és

$$\sigma_1 = \sqrt{1 - \alpha^2}\,. \tag{3.9}$$

A (3.4) illeszkedési együttható értéke az árindexek esetében 0,9993, a volumenindexek esetében pedig 0,9998, ami igen jó illeszkedésre utal. A (3.6) korrelációs együtthatókat, azok négyzeteit, valamint az ${}_pI^{(j)}$ és ${}_qI^{(j)}$ indikátorok relatív szórásait a 4. tábla tartalmazza.

[14] A (3.5) módon definiált együttható az $1/t$ és 1 határok között mozog. A (2.12)-ből látható, hogy $I^2 = 1$ esetén a (2.10) függvény értéke 0, azaz a $\mathbf{p}_1\mathbf{a}_1'$ diád pontosan leírja az $\mathbf{I}$ mátrixot.

4. tábla

Az indikátorok és az FK-indexek közötti korreláció

Indikátor sorszáma (j)	Állandó súly éve	Árindexek $r_{p^{I^{(j)}}I_1^{(p)}}$	$r^2_{j_1}$	Relatív szórás (%)	Volumenindexek $r_{q^{I^{(j)}}I_1^{(p)}}$	$r^2_{j_1}$	Relatív szórás (%)
1	1960	0,9896	0,9793	9,7	0,9982	0,9964	21,3
2	1961	0,9927	0,9854	8,8	0,9990	0,9980	21,0
3	1962	0,9915	0,9832	8,0	0,9996	0,9992	21,0
4	1963	0,9964	0,9929	8,3	0,9987	0,9975	21,3
5	1964	0,9990	0,9980	7,2	0,9998	0,9997	20,5
6	1965	0,9988	0,9976	7,1	1,0000	0,9999	19,7
7	1966	0,9983	0,9966	7,5	0,9999	0,9997	19,8
8	1967	0,9947	0,9895	7,1	0,9994	0,9989	18,6
9	1968	0,9841	0,9684	5,8	0,9986	0,9973	18,3
10	1969	0,9886	0,9774	6,1	0,9983	0,9966	18,4
11	1970	0,9749	0,9504	5,0	0,9942	0,9884	17,8

A 4. tábla rendkívül magas korrelációs együtthatói is azt a megállapítást támasztják alá, hogy az első főkomponens értékeivel szinte minden információveszteség nélkül lehet helyettesíteni az 1., illetve a 2. tábla indexsorait.

Azzal a kérdéssel, hogy a *b)* megállapítás mennyiben tekinthető általánosnak, a következő pontban foglalkozunk. E kérdés elméleti és gyakorlati fontosságát úgy véljük, nem kell külön hangsúlyozni.

A tényezőpróba megsértésének kérdésével itt nem kívánunk foglalkozni, mert úgy véljük, hogy a (3.4) torzítás kiküszöbölése az eredményhez képest túl sok erőfeszítést igényelne.

4. Az átlagindexek mint közelítő FK-indexek

Ebben a pontban olyan kritériumokat adunk meg, melyek alapján kevés és egyszerű számolással eldönthető, hogy az előző pontban definiált átlagvektorok elég jól közelítik-e az egzakt főkomponens-indexeket.

Írjuk fel ennek érdekében a (2.9) matrixot az

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ \bar{I}_2(1+\eta_{21}) & \bar{I}_2(1+\eta_{22}) & \dots & \bar{I}_2(1+\eta_{2t}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{I}_t(1+\eta_{t1}) & \bar{I}_t(1+\eta_{t2}) & \dots & \bar{I}_t(1+\eta_{tt}) \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

módon az

$$\eta_{ij} = \frac{I_i^{(j)} - \bar{I}_i}{\bar{I}_i} \quad (i = 2, \dots, t; \quad j = 1, 2, \dots, t) \tag{4.2}$$

mennyiségek felhasználásával, és válasszuk meg az η_i mennyiségeket az

$$\eta_i = \max_{1 \le j \le t} |\eta_{ij}| \quad (i = 2, \dots, t) \tag{4.3}$$

előírásnak megfelelően.

Tekintsük most az

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \bar{\mathbf{i}}_2 & \bar{\mathbf{i}}_2 & \dots & \bar{\mathbf{i}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\mathbf{i}}_2 \end{bmatrix} [1, \mathbf{1}'] = \tilde{\mathbf{p}}_1 \tilde{\mathbf{a}}_1' \tag{4.4}$$

matrixot, amelynek saját transzponáltjával való szorzata

$$\tilde{\mathbf{I}}\,\tilde{\mathbf{I}}' = \mathrm{t} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\mathbf{i}}_2' \\ \bar{\mathbf{i}}_2 & \bar{\mathbf{i}}_2 \bar{\mathbf{i}}_2' \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Az $\tilde{\mathbf{I}}\,\tilde{\mathbf{I}}'$ szorzat az alábbi, könnyen igazolható tulajdonságokkal rendelkezik:

a) $\varrho(\tilde{\mathbf{I}}\,\tilde{\mathbf{I}}') = 1$, azaz a (4.5) matrix rangja 1,

b) egyetlen 0-tól különböző — s így legnagyobb — sajátértéke

$$\tilde{\lambda}_1 = \mathrm{tr}(\tilde{\mathbf{I}}\,\tilde{\mathbf{I}}') = \mathrm{t}(1 + \bar{\mathbf{i}}_2' \bar{\mathbf{i}}_2) \tag{4.6}$$

c) a $\tilde{\lambda}_1$ sajátértékhez tartozó, céljainknak megfelelően normált sajátvektora

$$\bar{\mathbf{i}} = \frac{1}{t} \mathbf{I}\,\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{\mathbf{i}}_2 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{p}}_1. \tag{4.7}$$

Definiáljuk végül az

$$\mathbf{y}_0 = \bar{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{y}_k = (\mathbf{II}')^k \mathbf{y}_0 \qquad (k = 1, 2, \dots,) \tag{4.8}$$

iterált vektor-sorozatot, valamint az

$$\varepsilon = \frac{t \sum_{i=2}^{t} \eta_i \bar{I}_i^2}{\tilde{\lambda}_1} \tag{4.9}$$

és

$$\delta = \frac{t \sum_{i=2}^{t} \eta_i^2 \bar{I}_i^2}{\tilde{\lambda}_1} \tag{4.10}$$

mennyiségeket.

Most bebizonyítjuk a következő három állítást, amelyek közül a harmadik tartalmazza azokat a kritériumokat, melyek alapján a pont elején jelzett kérdés igen egyszerűen vizsgálható.

1. Az eredeti $\mathbf{II}'$ matrix legnagyobb, λ_1 sajátértékére nézve mindig teljesül a

$$\tilde{\lambda}_1 \leq \lambda_1 \leq \mathrm{tr}(\mathbf{II}') \leq \tilde{\lambda}_1(1 + \delta) \tag{4.11}$$

egyenlőtlenség.

2. A (4.7) sajátvektor az $\mathbf{a} = \mathbf{1}$ választás mellett minimalizálja a (2.10) függvényt, és

$$\varphi(\bar{\mathbf{i}}, \mathbf{1}) - \varphi_0 \leq \tilde{\lambda}_1 \delta, \tag{4.12}$$

ahol φ_0 a (2.10) függvény (2.12) minimális értéke.

3. A (4.8) iterált vektorok (4.7)-hez hasonlóan normalizált $\mathbf{y}_k^*$ változataira nézve

$$|\mathbf{y}_1^* - \mathbf{y}_0^*| \leq \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \eta_t \bar{I}_t \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

áll fenn.

Ha ε, és δ elég kicsi ahhoz, hogy jó közelítéssel $\dfrac{1}{1+\varepsilon^2} \approx 1 - \varepsilon^2$ álljon fenn, illetve, hogy $\varepsilon\delta$ elhanyagolható legyen, akkor még az is teljesül, hogy

$$|\mathbf{y}_2^* - \mathbf{y}_1^*| \approx \begin{bmatrix} 0 \\ |\bar{I}_2(\gamma_2 - \alpha\beta_2)| \\ \vdots \\ |\bar{I}_t(\gamma_t - \alpha\beta_t)| \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \eta_t \bar{I}_t \end{bmatrix} \varepsilon(\varepsilon + \delta) \approx \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \eta_t \bar{I}_t \end{bmatrix} \varepsilon^2, \tag{4.14}$$

ahol

$$\alpha = \frac{t \sum\limits_{k=2}^{t} \bar{I}_k^2 \sum\limits_{i=2}^{t} \bar{I}_i^2 \sum\limits_{j=1}^{t} \eta_{kj}\eta_{ij}}{\tilde{\lambda}_1^2}$$

$$\beta_r = \frac{\sum\limits_{i=2}^{t} \bar{I}_i^2 \sum\limits_{j=1}^{t} \eta_{rj}\eta_{ij}}{\tilde{\lambda}_1} \qquad (r = 2, \ldots, t)$$

és

$$\gamma_r = \frac{\sum\limits_{k=2}^{t} \bar{I}_k^2 \sum\limits_{j=1}^{t} \eta_{rj}\eta_{kj} \sum\limits_{i=2}^{t} \bar{I}_i^2 \sum\limits_{j=1}^{t} \eta_{kj}\eta_{ij}}{\tilde{\lambda}_1^2} \qquad (r = 2, \ldots, t).$$

Bizonyítás:

1. Tekintsük a (2.10) függvény

$$\tilde{\varphi} = \varphi(\tilde{\mathbf{p}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_1) = ||\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{I}}||^2 = \mathrm{tr}(\mathbf{II}') - 2\tilde{\mathbf{p}}_1'\mathbf{I}\tilde{\mathbf{a}}_1 + \tilde{\mathbf{p}}_1'\tilde{\mathbf{I}}\tilde{\mathbf{a}}_1$$

helyettesítési értékét, ami a (2.13), (2.15), valamint a közvetlenül belátható $\tilde{\mathbf{p}}_1'\tilde{\mathbf{I}}\tilde{\mathbf{a}}_1 = \tilde{\lambda}_1$ egyenlőség felhasználásával a (2.12)-höz igen hasonló

$$\tilde{\varphi} = \mathrm{tr}(\mathbf{II}') - \tilde{\lambda}_1$$

alakra hozható. Mivel azonban φ_0 a (2.10) függvény minimális értéke, nyilván

$$\tilde{\varphi} - \varphi_0 = \lambda_1 - \tilde{\lambda}_1 \geq 0$$

áll fenn, ami a (4.11) egyenlőtlenség bal oldalát igazolja. Mivel a $\tilde{\lambda}_1 \leq \mathrm{tr}(\mathbf{II}')$ egyenlőtlenség a sajátértékek összegére vonatkozó ismert tétel nyilvánvaló következménye, már csak a $\mathrm{tr}(\mathbf{II}') \leq \tilde{\lambda}_1(1 + \delta)$ egyenlőtlenség igazolása van hátra.

Mivel a (4.2) értékek összege minden i érték mellett 0, és így

$$\sum_{j=1}^{t} (1 + \eta_{kj})(1 + \eta_{lj}) = \begin{cases} t + \sum\limits_{j=1}^{t} \eta_{kj}^2 & \text{ha} \quad k = l \\ t + \sum\limits_{j=1}^{t} \eta_{kj}\eta_{lj} & \text{ha} \quad k \neq l \end{cases}$$

az $\mathbf{I}\mathbf{I}'$ szorzat (4.1) felhasználásával a következő:

$$\mathbf{I}\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} t & t\bar{I}_2 & \dots\dots\dots & t\bar{I}_t \\ t\bar{I}_2 & \bar{I}_2^2\left(t + \sum\limits_{j=1}^{t} \eta_{2j}^2\right) & \dots\dots & \bar{I}_2\bar{I}_t\left((t + \sum\limits_{j=1}^{t} \eta_{2j}\eta_{tj}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t\bar{I}_t & \bar{I}_t\bar{I}_2\left(t + \sum\limits_{j=1}^{t} \eta_{tj}\eta_{2j}\right) & \dots & \bar{I}_t^2\left(t + \sum\limits_{j=1}^{t} \eta_{tj}^2\right) \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

Így a $\mathrm{tr}(\mathbf{I}\mathbf{I}')$ definíciója alapján, figyelembevéve az η_i értékek (4.3) megválasztását

$$\mathrm{tr}(\mathbf{I}\mathbf{I}') = t\left(1 + \sum_{i=2}^{t} \bar{I}_i^2\right) + \sum_{i=2}^{t}\sum_{j=1}^{t} \eta_{ij}^2 \bar{I}_i^2 \leq \tilde{\lambda}_1 + t\sum_{i=2}^{t} \eta_i^2 \bar{I}_i^2 = \tilde{\lambda}_1(1 + \delta),$$

ami bizonyítandó volt. Ezzel a (4.11) egyenlőtlenséget igazoltuk.

2. A szokásos módszerekkel egyszerűen megállapítható ,hogy a

$$\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{1}) = ||\mathbf{I} - \mathbf{p}\mathbf{1}'||^2 = \mathrm{tr}(\mathbf{I}\mathbf{I}') - 2\mathbf{p}'\mathbf{I}\mathbf{1} + t\mathbf{p}'\mathbf{p}$$

függvény a $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{i}}$ helyen veszi fel a minimumát. Ezt $\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{1})$-be helyettesítve, (2.12) és (4.11) felhasználásával adódik a (4.12) egyenlőtlenség.

3. A (4.7) és (4.15) alapján egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\mathbf{y}_1^* = \frac{1}{\tilde{\lambda}_1}\mathbf{y}_1 = \frac{1}{\tilde{\lambda}_1}\mathbf{I}\mathbf{I}'\bar{\mathbf{i}} = \bar{\mathbf{i}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_2\bar{I}_2 \\ \vdots \\ \beta_t\bar{I}_t \end{bmatrix}, \tag{4.16}$$

amelyben a korábban definiált β_r mennyiségek szerepelnek. Az $\mathbf{y}_1^*$ vektorból $\mathbf{y}_0^* = \mathbf{y}_0 = \bar{\mathbf{i}}$-ot levonva és alkalmazva a β_r mennyiségek definíciója alapján nyilvánvaló

$$|\beta_r| \leq \frac{\eta_r t \sum\limits_{i=2}^{t} \eta_i \bar{I}_i^2}{\tilde{\lambda}} = \eta_r\varepsilon \quad (r = 2, \dots, t)$$

egyenlőtlenséget, éppen a bizonyítandó (4.13) egyenlőtlenséget kapjuk.

A (4.15) és (4.16) felhasználásával közvetlenül adódik, hogy

$$\mathbf{y}_2 = (\mathbf{I}\mathbf{I}')^2\bar{\mathbf{i}} = \tilde{\lambda}_1^2\bar{\mathbf{i}} + \tilde{\lambda}_1^2\begin{bmatrix} \alpha \\ \bar{I}_2(\alpha + \beta_2 + \gamma_2) \\ \vdots \\ \bar{I}_t(\alpha + \beta_t + \gamma_t) \end{bmatrix}. \tag{4.17}$$

Az α-ra adott korábbi definíció alapján nyilvánvaló, hogy

$$|\alpha| \leq \varepsilon^2$$

s így — ε általában kicsi lévén — igen jó közelítéssel

$$\mathbf{y}_2^* = \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2(1+\alpha)}\,\mathbf{y}_2 \approx \frac{1-\alpha}{\bar{\lambda}_1^2}\,\mathbf{y}_2$$

áll fenn. Elhanyagolva, az ε^4 és $\varepsilon^3\delta$ nagyságrendű α^2 és $\alpha\gamma_r$ tényezőket, (4.16) és (4.17) figyelembevételével

$$\mathbf{y}_2^* - \mathbf{y}_1^* \approx \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{I}_2(\gamma_2 - \alpha\beta_2) \\ \vdots \\ \bar{I}_t(\gamma_t - \alpha\beta_t) \end{bmatrix},$$

aminek r-edik komponensére alkalmazva az

$$\bar{I}_r\,|\gamma_r - \alpha\beta_r| \leq \bar{I}_r\,\eta_r\varepsilon(\delta+\varepsilon) \quad (r = 2, \ldots, t)$$

egyenlőtlenséget, éppen (4.14)-hez jutunk. Ezzel mindhárom állítás helyességét igazoltuk.

Mint már jeleztük, a (4.11)–(4.14) eredmények közül gyakorlati szempontból a (4.13) és (4.14) egyenlőtlenségek a legfontosabbak. A (4.13) szerint ugyanis ha az η_i mennyiségek elég kicsik ahhoz, hogy $\varepsilon\eta_i$ elhanyagolható legyen minden 2-nél nagyobb i-re nézve,[15] akkor jó közelítéssel

$$\mathbf{y}_0^* = \bar{\mathbf{i}} \approx \mathbf{y}_1^* \approx \mathbf{p}_1, \tag{4.18}$$

s így el sem érdemes kezdeni a λ_1 és $\mathbf{p}_1$ meghatározására szolgáló Mises-féle iterációs eljárást. A (4.14) szerint azonban az első iterációs lépés után még akkor is meg lehet állni, ha ε nem volt elég kicsi ahhoz, hogy (4.18)-at el lehessen fogadni, mert ε^2 és $\varepsilon\delta$ már az esetek többségében elég kicsi ahhoz,[16] hogy jó közelítéssel

$$\mathbf{y}_2^* \approx \mathbf{y}_1^* \approx \mathbf{p}_1$$

álljon fenn.

A fentieket a (4.11) alapján még annyival egészíthetjük ki, hogy nem túl nagy δ esetén a λ_1 domináns sajátérték, ami miatt a λ_1 és $\mathbf{p}_1$ meghatározására szolgáló Mises-féle iterációs eljárás igen gyorsan konvergál. Végül a (4.12) egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy bizonyos szempontból az átlagindexek is optimálisak, mert minimalizálják $\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{1})$-et, s e minimum nincs túl messze az FK-indexek adta φ_0 minimális értéktől, ha δ nem túl nagy.

[15] Ez — megintcsak elsősorban időbeli összehasonlításokra gondolva — nem tűnik túl szigorú megkötésnek.

[16] A bázisidőszak alkalmas megválasztásával általában elérhető, hogy $\varepsilon, \delta < 1$ álljon fenn. (A 2. pont képletei továbbra is érvényesek maradnak, ha az I matrix első sorát akkor is a bázisidőszakra vonatkoztatjuk, ha az nem a legelső időszak.) Itt jegyezzük meg, hogy a 3. pontbeli gyakorlati alkalmazás esetén az árindexsorokra $\varepsilon = 0{,}054$ és $\delta = 0{,}004$, a volumenindexsorokra pedig $\varepsilon = 0{,}047$ és $\delta = 0{,}003$.

5. A t = 2 speciális eset

A $t = 2$ eset azért érdemel külön figyelmet, mert ebben a speciális esetben az FK-indexek és az átlagindexek közelségére nézve az előző pontbelinél precízebb megállapítások is tehetők. A jelen esetben a (2.6) matrix az

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ I_2^{(1)} & I_2^{(2)} \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

alakba megy át, amelyben $I_2^{(1)}$ egy Laspeyres-féle, $I_2^{(2)}$ pedig egy Paasche-fée index. Legyen

$$\varepsilon = | I_2^{(2)} - I_2^{(1)} | \tag{5.2}$$

a kétféle súlyozású index eltérését mutató mennyiség.

Most igazoljuk a következő tételt. Amennyiben ε elég kicsi, a

$$\bar{\lambda}_1 = 2 + \frac{1}{2}(I_2^{(1)} + I_2^{(2)})^2 \tag{5.3}$$

érték jó közelítése az $\mathbf{II}'$ matrix legnagyobb, λ_1 sajátértékének, az

$$\bar{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{I}_2 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

vektor pedig az $\mathbf{II}'$ egy λ_1-hez tartozó, (5.4)-hez hasonlóan normált sajátvektorának. Pontosabban:

$$\lambda_1 - \bar{\lambda}_1 < \frac{\varepsilon^2}{2} \tag{5.5}$$

és

$$\| \mathbf{p}_1 - \bar{\mathbf{i}} \| < \frac{\varepsilon^2}{4\bar{I}_2} \tag{5.6}$$

áll fenn, ahol $\bar{I}_2 = \frac{1}{2}(I_2^{(1)} + I_2^{(2)})$.

Bizonyítás: Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\mathbf{II}' = \begin{bmatrix} 2 & I_2^{(1)} + I_2^{(2)} \\ I_2^{(1)} + I_2^{(2)} & (I_2^{(1)})^2 + (I_2^{(2)})^2 \end{bmatrix}$$

Ismeretes, hogy az $\mathbf{II}'$ matrix legnagyobb sajátértéke a

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{II}')\,\lambda - |\mathbf{II}'| = 0$$

karakterisztikus egyenlet nagyobbik gyöke, ahol $|\mathbf{II}'|$ most az $\mathbf{II}'$ determinánsát jelöli. A fenti karakterisztikus egyenlet nagyobbik gyöke — $|\mathbf{II}'| = \varepsilon^2$ lévén —

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}(\mathbf{II}') + \sqrt{\mathrm{tr}^2(\mathbf{II}') - 4\varepsilon^2}\right]. \tag{5.7}$$

Figyelembevéve, hogy

$$\operatorname{tr}(\mathbf{\Pi}') = 2 + (I_2^{(1)})^2 + (I_2^{(2)})^2, \tag{5.8}$$

és (5.7)-et felhasználva egyszerű számolással kapjuk, hogy a λ_1-hez tartozó, céljainknak megfelelően normált sajátvektor

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{\lambda_1 - 2}{I_2^{(1)} + I_2^{(2)}} \end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

(5.3) és (5.8) alapján

$$\operatorname{tr}(\mathbf{\Pi}') = \tilde{\lambda}_1 + \frac{\varepsilon^2}{2}$$

amiből (5.7) felhasználásával

$$\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1 = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(1 - \frac{2}{\lambda_1}\right)$$

következik. Mivel elég kis ε-értékek esetén $\lambda_1 \geq 2$, és így

$$0 \leq 1 - \frac{2}{\lambda_1} < 1,$$

az (5.5) egyenlőtlenség valóban teljesül.

Az (5.9) és (5.4) felhasználásával közvetlenül adódik, hogy

$$||\mathbf{p}_1 - \bar{\mathbf{i}}|| = \frac{\lambda_1 - 2}{I_2^{(1)} + I_2^{(2)}} - \frac{1}{2}(I_2^{(1)} + I_2^{(2)}),$$

ami (5.3) miatt a

$$||\mathbf{p}_1 - \bar{\mathbf{i}}|| = \frac{\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1}{I_2^{(1)} + I_2^{(2)}}$$

módon is felírható. Ebből az imént bizonyított (5.5) egyenlőtlenség miatt már következik az (5.6) helyessége. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

A jelen speciális esettel kapcsolatban még annyit jegyzünk meg, hogy amennyiben

$$\eta = \frac{I_2^{(2)}}{I_2^{(1)}} - 1 \tag{5.10}$$

elég kicsi ahhoz, hogy η^2 elhanyagolható legyen, akkor az FK-indexeket közelítő átlagindexek közelítőleg eleget tesznek a tényezőpróbának. E feltétel teljesülése esetén ugyanis

$$\bar{I}_p \bar{I}_q = \frac{1}{4}(I_p^{(1)} + I_p^{(2)})(I_q^{(1)} + I_q^{(2)}) \approx \frac{1}{2}[I_v + (1+\eta) I_q^{(1)} I_p^{(1)}] = I_v,$$

ahol I_p az árindex, I_q a volumenindex, I_v az értékindex az (1) felső index a Laspeyres-féle, a (2) felső index pedig a Paasche-féle súlyozásra utal, és kihasználtuk a nyilvánvaló

$$\frac{I_p^{(2)}}{I_p^{(1)}} = \frac{I_q^{(2)}}{I_q^{(1)}} = 1 + \eta \quad \text{és} \quad I_p^{(1)} I_q^{(2)} = I_p^{(2)} I_q^{(1)} = I_v$$

összefüggéseket.

6. Néhány megjegyzés és következtetés

Az index-elmélet szempontjából tanulmányunk legfőbb eredményét abban látjuk, hogy matematikailag támasztja alá a különböző súlyozású indexformulák átlagolását, amit az indexelméleti irodalom formulakeresztezésnek nevez [10].

A 4. pontban kimutattuk ugyanis, hogy a 2. pontbeli egzakt FK-indexek — legalábbis időbeli összehasonlitás esetén — általában igen jól közelíthetők az egyszerűen meghatározható átlag-indexekkel. Mivel ez utóbbiak a különböző súlyozású indexsorok azonos időszakra vonatkozó tagjainak egyszerű számtani átlagai, az FK-indexek — legalábbis közelítő értelemben — az indexformula-keresztezés egyik lehetséges, több időszakra történő általánosításának tekinthetők, s mint ilyenek közeli rokonságban állnak a ma már általánosan használt Fisher-féle „ideális" formulával, de a Marshall—Edgeworth-féle indexekkel is.[17]

Az tehát, hogy aggregátumok helyett a 2. pontban definiált $I^{(j)}$ változókra alkalmazzuk a főkomponens-elemzést, a különböző súlyozású indexformulák átlagolásához vezet, ami közgazdaságilag is megengedett és alátámasztható ([20], [21]), s egyszersmind egy olyan egyszerű interpretációját adja az FK-indexeknek, amilyennel a BL-indexek és módosított változataik nem rendelkeznek.

Ami az FK-indexek vagy az azokat közelítő átlag-indexek gyakorlati alkalmazhatóságát illeti, szükségesnek tartjuk a következő megjegyzést. Mindkét módszer esetén fennáll annak a lehetősége, hogy új időszakok adatainak bevonása az elemzésbe visszamenőleg is megváltoztatja az előző időszakokra vonatkozó index-értékeket. Ez a statisztika *tájékoztató funkciója* szempontjából nyilván nem engedhető meg, mert a nem szakembert még kellő magyarázat esetén is megzavarja. Annak viszont semmi akadályát sem látjuk, hogy a *közgazdasági elemző munka* során alkalmazni lehessen az itt javasolt indexeket.

Végül a főkomponens-elemzés jelen gyakorlati alkalmazásával kapcsolatban kívánunk két megjegyzést tenni. Az első az, hogy a jelen esetben a megfigyelések száma pontosan megegyezik az alapulvett $I^{(j)}$ változók számával, ami szokatlannak tűnhet. Ez azonban most nem az adatok hiányának, hanem a változók konstrukciójának a következménye, ami viszont a vizsgált probléma természetéhez igazodik. Ezért most *a vizsgált probléma természete* és nem a kevés számú megfigyelés az oka annak, hogy a változók szórásnégyzete már egy főkomponenssel is szinte tökéletesen megmagyarázható.[18] Másik meg jegyzésünkkel arra kívánunk utalni, hogy itt a főkomponens elemzésnek nem a szokásosabb, exploratívnak nevezhető, hanem az ún. konfirmatív alkalmazá-

[17] A Laspeyres-féle indexet $I^{(1)}$-gyel, a Paasche-félét pedig $I^{(2)}$-vel jelölve, a Fisher által „ideálisnak" nevezett index formulája

$$I^{(F)} = \sqrt{I^{(1)}\,I^{(2)}}$$

amitől az átlag-index csak annyiban különbözik, hogy a kétféle súlyozású indexnek nem mértani, hanem számtani átlaga. Amennyiben a kétféle súlyozású index közötti eltérés nem túl nagy, a kétféle átlag is közel esik egymáshoz. Az átlag-indexek, s így az FK-indexek is, kapcsolatba hozhatók még az ún. Marshall—Edgeworth-féle indexekkel is, amelyek a Laspeyres- és Paashe-féle formulák súlyozott számtani átlagai. Ez a kapcsolat azonban az előbbinél lazább, mert ugyanazon értékek súlyozatlan és súlyozott számtani átlaga általában jobban eltér egymástól, mint a súlyozatlan számtani és mértani átlag.

[18] Egyébként annak szükséges feltétele, hogy $\varrho(\mathbf{I}) = t$ legyen, már éppen teljesül.

sáról van szó, amikoris annak a határozott hipotézisnek a vizsgálata a cél, hogy a változók szórásnégyzete megmagyarázható-e egyetlen főkomponens segítségével. A főkomponens-elemzés és a faktoranalízis ilyen és hasonó konfirmatív jellegű alkalmazásainak részleteire azonban itt nem áll módunkban kitérni, azokat egy későbbi tanulmányban szándékozunk tárgyalni.

(Beérkezett: 1975. június 13.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. BANERJEE, K. S.: A Unified Statistical Approach to Index Number Problem, Econometrica, Vol. 29. (1961.) pp. 591–601.
2. BANERJEE, K. S.: Best Linear Unbiased Index Numbers and Index Numbers Obtained Through a Factorial Approach, Econometrica, Vol. 31. (1963.): pp. 712–728.
3. BLALOCK, H. M.: Making Causal Inferences for Unmeasured Variables from Correlations Among Indicators. American Journal of Sociology, Vol. 69. (1963.): 53–62.
4. BODEWIG, E.: Matrix Calculus, North-Holland Publishing Co, Amsterdam 1959.
5. Budapest Statisztikai Évkönyve, 1964, 1966., 1971.
6. COSTNER, H. L.: Theory, Deduction and Rules of Correspondence, American Journal of Sociology, Vol. 75. (1969.): 245–263.
7. DIVISIA, F.: L/indice monétaire et la théorie de la monnaie, Revue d'Économie Politique, (1925.): 842–861; 980–1008; 1121–1151 és (1926.): 49–81.
8. FISHER, I.: The Making of Index Numbers, (Third, Revised Edition) Houghton Mifflin Co, 1927.
9. FRISCH, R.: Az indexszámok problémája. Kvantitatív és dinamikus közgazdaságtan. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1974., 137–180. old.
10. HAUSER, R. M.–A. S. GOLDBERGER: The Treatment of Unobservable Variables in Path Analysis, H. L. COSTNER (ed.): Sociological Methodology 1971. Jossey-Bass, San Francisco 1971. Chapter 4, pp. 81–117.
11. JAZAIRI, N. T.: An Empirical Study of the Conventional and;Statistical Theories of Index Numbers, Bulletin, Oxford University Institute of Economics and Statistics, Vol. 33., No. 3. (1971.): 181–195.
12. KLOEK, T.–G. M. DEWIT: Best Linear Unbiased Index Numbers, Econometrica, Vol. 29. (1961.) No. 4. pp. 602–616.
13. KLOEK, T.–REES, G. J. VAN: On the Method of „Deflated" Best Linear Index Numbers, Bulletin of the International Statistical Institute, Vo. 39. (1962.), Part. 4., pp. 451–462.
14. KÖVES P.: Statisztikai indexek. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Bp. 1956.
15. KÖVES P.: Az életszínvonal vizsgálatánál alkalmazott indexszámítás módszertani problémái. Az indexformulák közgazdasági tartalmáról, Az életszínvonal elemzésének és nemzetközi összehasonlításának kérdései, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959. 42–53. old.
16. KÖVES P.–PÁRNICZKY G.: Általános statisztika. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1973.
17. LAWLEY, D. N.–A. E. MAXWELL: Factor Analyis as a Statistical Method (Second Edition) American Elsevier Publishing Co., New York, 1971.
18. MARTON Á.: Az átlagárak statisztikai vizsgálata, Statisztikai Szemle, 1966. évi 2. szám: 176–187. old.
19. RHODES, E. C.: The Construction of An Index of Business Activity, Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 100. (1937.): pp. 18–39.
20. RUTHERFORD, R. S. G.: The „Principal Factors" Approach to Index Number Theory, Economic Record, Melbourne, Vol. 30. (1954.) pp. 200–208.
21. SZIDAROVSZKY F.: Bevezetés a numerikus módszerekbe. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1974.
22. THEIL, H.: Best Linear Index Numbers of Prices and Quantities, Econometrica, Vol. 28. (1960.) No. 4. pp. 464–480.
23. THEIL, H.: Principles of Econometrics, John Wiley & Sons, New York 1971.
24. TINTNER, G.: Some Applications of Multivariate Analysis to Economic Data, Journal of the American Statistical Association, Volt 41. (1946.): pp. 472–500.
25. ZURMÜHL, R.: Matrizen (Zweite Aufl.), Springer, Berlin, 1958.

A PRINCIPAL COMPONENT APPROACH TO INDEX NUMBERS

After a short critical review of the previous applications of principal component analysis and factor analysis to index numbers, a new ~~principal component~~ approach is suggested ~~in the article~~.

The main point of the new approach is that the variables $I^{(j)}$ taking on the values $I_i^{(j)}$ — with $I_i^{(j)}$ being the i^{th} member of the series of base price (quantity) index numbers with fixed weights of the j^{th} period — are considered as multiple indicators of the unobservable variable "price level" ("volume" of production, sales, etc.) which calls for the use of a one-factor factor-analytical model. This is why the suitably normalized values of the first principal component of the above indicators — as reasonable substitutes for those of the single factor of the factor-analytic model — have been taken for price (quantity) index numbers.

A numerical application is given is section 3, which, among others, shows that the mean index numbers (3.2) and (3.3) respectively, are extremely good approximations to the respective principal component index numbers. The conditions of the goodness of this approximation are dealt with in Section 4. In Section 5 the special case of two periods is investigated in some more details, while in Section 6 it is pointed out that the present approach can be regarded as a new mathematical validation for the cross-breeding of differently weighted index number formulas.

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИЗА ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТОВ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНДЕКСОВ

После краткого критического обзора применения анализов главных компонентов и факторного анализа при вычислении индексов эта статья предлагает применение нового способа вычисления индексов при помощи анализа главных компонентов.

Сущность нового подхода заключается в том, что переменные $I^{(j)}$, принимающие величину $I_i^{(j)}$ (где $I_i^{(j)}$ является i-тым членом базисного ряда индексов цен или объемов, рассчитанного при помощи j-той периодической постоянной величины), принимаются за индикаторы не поддающегося непосредственному измерению »уровня цен« (»объем« производства, реализации, и т. д.), что требует применения одной однофакторной модели факторного анализа. Вместо содержащихся в ней величин единственного фактора определяются нормированные величины первых главных компонентов вышеуказанных индикаторов, в качестве их удовлетворительного приближения. Полученные таким образом величины являются индексами главных компонентов.

На третьем этапе описан один числовой подход, который показывает, что средние индексы (3.2) и (3.3) являются хорошими приближениями к соответствующих индексов главных компонентов. 4-ый занимается условиями правильности этого приближения. 5-ый этап занимается подробным исследованием специального случая, который содержит только два периода, в то время, как 6-ой этап указывает на то, что данный подход дает новое математическое обоснование перекрещиванию формул индексов с различными величинами.