Kornai János—Simonovits András

Rendelés-jelzésen alapuló szabályozás egy Neumann-gazdaságban

Cikkünk a „Szigma" előző számában közölt [3] modell átalakításával foglalkozik. Feltételezzük az előző cikk ismeretét, s a rövidség kedvéért kizárólag a módosításokat és azok következményeit írjuk le. Az előző cikkben ismertetett modellt röviden KS—I modellnek, a most kifejtésre kerülőt pedig KS—II modellnek nevezzük. Felső indexként is (I), illetve (II) megkülönböztető jelzéssel látjuk el az eltérő feltevéseket és megállapításokat.

1. Készletre vagy rendelésre termelés

A gazdasági életben megkülönböztethetjük a termelés megszervezésének két tiszta típusát. Az egyik: a vállalat *készletre termel*. Az eladónak csupán prognózisa van arra, hogy a vevő mit és mennyit vásárol majd. A termék az outputkészlet-raktárban vár, amíg a vevő „lehívja" onnét. A másik tiszta típus: a vállalat *rendelésre termel*. Addig el sem kezdi a termelést, amíg előre pontosan meg nem ismeri a vevő igényét. Itt a vevő vár, amíg rendelésének teljesítése sorra nem kerül a termelésben.

Ha egyetlen vállalatra tekintünk, akkor háromféle eset lehetséges: 1. kizárólag készletre termel, 2. kizárólag rendelésre termel vagy 3. egyes termékeit készletre, más termékeit rendelésre állítja elő. Ha azonban nagy aggregátumokat, széles szektorokat, vagy egész népgazdaságot vizsgálunk, általában azt tapasztaljuk: ugyanabban a rendszerben megtaláljuk — különböző arányokban — mindkét típust, mind a készletre, mind a rendelésre termelést.

A kétféle forma arányait részben műszaki-technológiai tényezők határozzák meg. Tengerjáró hajókat nem szokás készletre termelni. Egy szupermarket viszont nem a vevő egyedi megrendelései alapján szerzi be áruit, hanem vevőkörét készleteiből látja el. Minél inkább „egyedi" jellegű, „testreszabott" az áru, annál inkább előtérbe kerül a rendeléses forma. Minél „tömegszerűbb", szabványosított jellegű, nagy sorozatban termelt áruról van szó, annál inkább érvényesül a készletre termelés formája.

Az arányokat befolyásolja a piac általános helyzete is. Amennyiben a „vevők piaca" áll fenn, úgy ez a készletre-termelés növelésére készteti az eladókat. Az „eladók piaca" viszont a rendeléses forma felé tereli a gazdaságot. A vevők csak sorbanállás, várakozás után jutnak a kívánt áruhoz.[1]

[1] A kétféle formáról lásd az egyik szerző, *Kornai János* [2] tanulmányát. A tőkés gazdaságban szerzett tapasztalatokat ismerteti, ökonometriai modellek alapján, *Belsley* [1] könyve. Ugyanitt részletes bibliográfia található a készletre-termelés és rendelésre termelés irodalmáról.

A kétféle típust táblázatos formában is összehasonlítjuk.

	Termelés készletre	Termelés rendelésre
Melyik fél van a teljes vétel-eladási információ birtokában?	a vevő látja a kínálatot	az eladó látja a keresletet
Melyik fél vár?	az eladó vár, míg a készletben levő árut megveszik	a vevő vár, míg megrendelését teljesítik
Az áru tulajdonságai által kedvezményezett forma	„tömegszerű", szabványosított termék	egyedi termék
A piaci helyzet által előtérbe tolt forma	„Vevők piaca"	„Eladók piaca"

Mind a készletek, mind a rendelések megfigyelése *jelzőrendszerként* szolgálhat. A KS–I modell olyan rendszert írt le, amelyben mind a termékek beszerzése, mind pedig termelésük kizárólag készlet-jelzés alapján szabályozódik; előbbi a slackinputkészletek, utóbbi az output készletek megfigyelésére épül. A KS–II modell az előbbihez képest lényegében nem változtat a beszerzés szabályozásán, csak formailag; azaz inputkészlet-jelzéseken alapul. Viszont a termelés szabályozásában az outputkészlet jelzőrendszer szerepét a rendelés-jelzés váltja fel.

A lényeges különbség az I. és II. rendszer között: utóbbiban megjelenik a résztvevők közötti *kommunikáció*. A rendelés: közlésáramlás a megrendelő és a szállító között. A kommunikáció azonban ebben a modellben *nem ár-jellegű, hanem tisztán mennyiségi jellegű*. Ez tehát fontos közös vonása az I. és II. modellnek: mindkettő árjelzés nélkül működő rendszer.

Cikkünk részletesen foglalkozik azzal a tiszta esettel, amelyben valamennyi szektor termelése *egyöntetűen* a rendelés-jelzés alapján szabályozódik. (Mint ahogy KS–I olyan rendszert modellezett, amelyben valamennyi szektor termelése egyöntetűen az output-készlet jelzéséhez igazodott.) Könnyen elemezhető lenne a *kombinált* eset, amelyben egyes szektorok termelésének szabályozása készlet-jelzésen, másoké rendelés-jelzésen alapul. Kimutatható, hogy az I. és II. modellre érvényes megállapítások (működőképesség, stabilitás, növekedési ütem stb.) megfelelő módosításokkal kiterjeszthetők a kombinált esetre is. Elemzésétől azonban, a rövidség kedvéért eltekintünk.

2. A modell

Az I. modellt két variánsban dolgoztuk ki. Az egyikben egy állandó struktúrájú Neumann-gazdaságot vizsgáltunk, a másikban egy „aszimptotikus" gazdaságot, amely – kissé leegyszerűsítve a jellemzést – nagyon közel kerül egy állandó struktúrájú Neumann-gazdasághoz. A II. modellt a jelen cikkben csupán az első variánsra, azaz a Neumann-gazdaság esetére dolgozzuk ki. Megállapításaink lényege azonban, megfelelő korrekciókkal, kiterjeszthető lenne az aszimptotikus esetre is.

A rendelés-jelzés szerinti visszacsatolás alapgondolatai

Mindenekelőtt ismertetjük a rendelés-jelzéses szabályozás alapgondolatait. A j-edik *vevő* szektor – input-készleteinek jelzésére – a t-edik periódusban *rendelést* küld az i-edik *eladó* szektornak. Jelöljük ezt $z_{ij}(t)$-vel. A rendelés nem megy semilyen közvetítő közegen, központon át, hanem *közvetlenül* jut el a vevőtől az eladóhoz. Mivel a rendelések mindig csak egy-egy vevő—eladó pár közti közlésáramlást jelentenek, ebben az értelemben az információ-áramlás itt decentralizált.

Az i-edik szektor memóriájában tárolja a rendeléseket. Nyilvántartja a *rendelésállományt*. A j-edik szektortól érkezett és még teljesítetlen rendelések állományát a t-edik periódusban $k_{ij}(t)$-vel jelöljük:

$$k_{ij}(t+1) = k_{ij}(t) + z_{ij}(t) - y_{ij}(t), \tag{2.1}$$

ahol $y_{ij}(t)$ az i-edik szektor *eladása* a j-edik szektornak.

Feltesszük, hogy – ha már a j-edik szektor elküldte rendelését az i-ediknek – azt nem vonhatja vissza. Érvényben marad, amíg csak nem teljesítik. A teljesítés időpontjába a megrendelőnek nincs beleszólása. Ezt kizárólag az eladó i-edik szektor határozza meg. Amikor az i-edik szektor szállít, a j-edik szektor okvetlenül átveszi a szállítmányt.

A rendelés teljesítését a következő visszacsatolási szabály határozza meg:

$$y_{ij}(t) = \bar{y}_{ij}(t) - p_{ij}[\bar{k}_{ij}(t) - k_{ij}(t)]. \tag{2.2}$$

A szabályozás értelmezése a következő:

Az y_{ij} eladás először is $\bar{y}_{ij}$-hez, a normatív eladáshoz igazodik. Ha a gazdaság a normatív Neumann-pályán haladna, akkor ennyit kellene az i-edik szektorból a j-edik szektornak átadni.

A jobboldalon szereplő második tag korrigálja az elsőt, a visszacsatolás elve alapján. Összeveti egymással a *normatív rendelésállományt*, $\bar{k}_{ij}$-t a *tényleges* rendelésállománnyal, k_{ij}-vel. Ha az i-edik szektor a normálisnál nagyobb mennyiséggel tartozik a j-edik szektornak akkor többet szállít, fordított esetben kevesebbet.

A rendelés-teljesítési szabály nem kezeli uniformizáltan a szállítási kötelezettségek teljesítését. Kétféle módon is részesíthető előnyben vagy hátrányban az áramlás valamely iránya:

1. A $\bar{k}_{ij}(t)$ normatív rendelésállomány a következőképpen határozódik meg:

$$\bar{k}_{ij}(t) = l_{ij}\bar{r}_i(t), \tag{2.3}$$

ahol $r_i(t)$, akárcsak az I. modellben, az i-edik szektor termelése a t-edik periódusban, az l_{ij} együttható pedig a *rendelésállomány per termelés normatíva*. Ezt tekintik a felhalmozódott, teljesítetlen rendelésállomány normális arányának, a termeléshez viszonyítva. Ez (i, j) eladó—vevő páronként eltérő lehet.

2. A (2.2) formulában szereplő p_{ij} *alkalmazkodási sebesség* is (i, j) eladó—vevő páronként eltérhet. Ha pl. $p_{i1} > p_{i2}$, akkor a normatív rendelésállomány túllépése esetén nagyobb arányú eltolódás megy végbe a szállítmányban az 1., mint a 2. szektor javára.

A termelő i-edik szektorban nincs és nem is lehet output-készlet. Minden termelést azonnal a felhalmozott rendelések teljesítésére fordítanak:

$$r_i(t) = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t). \tag{2.4}$$

Az elmondottak a rendelés-jelzéses gazdaság egy lehetséges *speciális* formáját mutatják be. E konkrét forma nézetünk szerint realisztikus; tükrözi a valóság fontos vonásait, de nem lép fel az általánosság igényével. Más, nem kevésbé realisztikus formák ugyancsak elképzelhetőek lennének. Így például a mi modellünkben nincs igazi „sorbanállás", azaz nem érvényesül az az elv, hogy aki hamarabb rendelt, azt korábban szolgálják ki. A sorolást nem a megrendelés beérkezésének sorrendje dönti el, hanem az tulajdonképpen az l_{ij} rendelésállomány per termelés normatívákból, valamint a p_{ij} alkalmazkodási sebességekből vezetődik le. E paraméterek a modell világában állandóak, s exogén módon meghatározottak. Ennyiben tehát inkább olyan „kiutalásos" rendszerhez hasonlít, amelyben nem az igénylés beadásának sorrendje dönti el a szállítmány nagyságát, hanem meghatározott kiutalási preferenciák.

Az alapgondolat ismertetése után először — korábbi cikkünkhöz hasonlóan — összefoglaljuk a modell feltevéseit, majd leírjuk az egyenletrendszert.

Feltevések

A reálszférára vonatkozó, az I. modell ismertetésében szereplő R.1.—R.4. és R.5.N. feltevések változatlanul érvényben vannak. (Egyetlen, formai változás van: a folyó ráfordítások A mátrixa magában foglalja az egységnyi termelésre jutó selejtezést is.) A szabályozás rendelésjelzéses formája tehát *ugyanazt a reálszférát* irányítja, mint korábban a készletjelzéses forma.

A szabályozásra vonatkozó feltevések közül változatlan C.1., C.2.N. és C.7. A módosított feltevések a következők:

C.3.$^{(\mathrm{II})}$ *A döntés decentralizálása.* Adott normák mellett a döntés tökéletesen decentralizált. Az i-edik szektor határoz az r_i termelésről, az y_{ij} eladásról és a z_{ji} rendelésről.

C.4.—5.—6.$^{(\mathrm{II})}$ *Rendelés-jelzéses szabályozás.*[2]

a) *Kommunikáció.* Kommunikáció van: a vevő legalább egy periódussal az adás-vétel előtt közli megrendelését az eladóval. A kommunikáció decentralizált és közvetlen. Nincs közvetítő a közlés feladója és címzettje között.

b) *Memória.* A rendszernek van memóriája: a termelő tárolja a rendelésállományt. A rendelés nem vonható vissza.

c) *Az információ decentralizálása.* Adott normák mellett az információ decentralizált, de nem izolált.[3] Az információ decentralizált, mert az i-edik szektor kizárólag saját állapotváltozóit figyeli meg a döntéshez.

A C.3.$^{(\mathrm{II})}$ és a C.4.—5.—6.$^{(\mathrm{II})}$ *c)* feltevések együttesen biztosítják, hogy *a szabályozás vegetatív jellegű.*[4]

[2] Arra törekszünk, hogy az I. és II. modell könnyebb összehasonlítása kedvéért mindenütt megtartsuk a két modellben közös elemek szimbólumait; azonosan jelöljük az azonos változókat; azonos sorszámot kapjanak az azonos feltevések és megállapítások. A C.4.—C.6. feltevések esetében azonban — a két modell egymástól eltérő logikája miatt — most nem haladhatunk azonos sorrendben. Ezért inkább összevontuk a II. modellhez a C.4.—5.—6. feltevéseket és az összevont feltevésen belül betűjelekkel utalunk az új rész-feltevésekre.

[3] A tisztán készletjelzéses I. modellben decentralizált *és izolált* volt az információ; nem volt kommunikáció.

[4] A szabályozást akkor nevezzük vegetatív jellegűnek, ha mind a döntés, mind az információ decentralizált. A kommunikáció bevezetése nem szünteti meg a szabályozás vegetatív jellegét, ha az decentralizált és közvetlen.

d). *A rendelés-jelzés és a készlet-jelzés szerepe.* A *c)* feltevés úgy realizálódik, hogy az i-edik szektor kizárólag saját rendelésállományát figyeli meg az eladás és ezzel együtt a termelés, valamint saját inputkészletét a rendelés szabályozásához.

e) *Nincs outputkészlet.* Minden termelést azonnal a rendelések teljesítésére használnak fel. A megrendelő köteles átvenni a rendelt terméket.

A modell összefoglalása

Az I. modell (2.1)–(2.4) egyenletei helyébe az alábbi egyenletrendszer lép:

Termelés és eladás azonossága

$$r(t) = Y(t) \cdot 1. \tag{2.5}$$

Rendelésállomány

$$K(t+1) = K(t) + Z(t) - Y(t). \tag{2.6}$$

Inputkészlet-mérleg

$$V(t+1) = V(t) - A \langle Y(t+1) \cdot 1 \rangle + Y(t). \tag{2.7}$$

Az eladás szabályozása

$$Y(t) = \overline{Y}(t) - P \otimes [\overline{K}(t) - K(t)], \tag{2.8}$$

A rendelés szabályozása

$$Z(t) = \overline{Z}(t) - Q \otimes [V(t) - \overline{V}(t)]. \tag{2.9}$$

3. Megállapítások

Megállapításaink lényegében az I. modellel nyert megállapítások átfogalmazásai.

1.[II] *MEGÁLLAPITÁS. Normatív pálya létezése.* Neumann-pálya létezik és egyértelműen meghatározott. A

$$\lambda_0(B + F)r_0 = (I - A + B + F)r_0, \quad \lambda_0 > 1, \quad r_0 > 0, \quad 1'r_0 = 1 \tag{3.1}$$

feladat egyértelműen megoldható. Ennek ismeretében egyszerű számolással adódik a többi változó Neumann-pálya szerinti értéke is.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a termelés itt csak F-től, a slack inputkészlet normatívák mátrixától függ és *nem* függ L-től, a rendelésállomány per termelés normatívák matrixától. (Ezzel szemben az I. modellnél az 1.[I] megállapítás szerint a termelés függött $\langle g \rangle$-től, az outputkészletek normatíváinak mátrixától is.)

2.N.$^{(\mathrm{II})}$ *MEGÁLLAPITÁS. Ütköző készlet és növekedési ütem.*

a) Hasonlítsuk össze az 1. és 2. gazdaságot, amely tökéletesen azonos, kivéve ütköző készleteik normáit: $F^{(1)} \geq F^{(2)}$. Ebben az esetben az 1. gazdaság növekedési együtthatója kisebb, mint a 2.-é: $\lambda_0^{(1)} < \lambda_0^{(2)}$.

b) Hasonlítsuk össze az I. és a II. gazdaságot. Mindkettő azonos, beleértve azt is, hogy azonos az ütköző készlet per termelési normatíva mátrixuk is. Az I. gazdaság a KS – I modell szerint outputkészlet-jelzés alapján szabályozza termelését, míg a II. gazdaság a KS – II modell szerint rendelés-jelzés alapján szabályozza. Ez esetben az I. gazdaság növekedési tényezője kisebb, mint a II. gazdaságé.

A *b)* megállapítás jelentőségét külön is ki akarjuk emelni. Determinisztikus világunkban a növekedési ütem szempontjából előnyös zéró outputkészlettel, kizárólag rendelés-jelzés alapján, a vevőt várakoztatva működni. Persze, amint azt előző cikkünkben is megállapítottuk: a valóságos életben az ütközőkészletek növelésének, s ezen belül outputkészletek kialakításának is vannak előnyei: elősegíthetik a váratlan zavarok leküzdését, megkönnyíthetik a vevő rögtönzését, simábbá tehetik az alkalmazkodást stb. Ezeket az előnyöket azonban a jelen dolgozatban nem tudjuk bemutatni.

3.N.$^{(\mathrm{II})}$ *MEGÁLLAPITÁS. Stabilitás.* Az (2.5)-(2.9) egyenletekkel leírt szabályozás mellett a rendszer stabil, azaz az eltérésvektorok az időben nullához tartanak; feltéve, hogy az alkalmazkodási sebességek kielégítik az alábbi feltételeket:

$$\frac{2q_{ij}}{1-q_{ij}} \leq p_{ij} \leq 2 \quad \text{és} \quad 0 < q_{ij} \leq \frac{1}{2} \quad 1 \leq i, j \leq n. \tag{3.2}$$

Figyelemreméltó, hogy, ha az összes lehetséges struktúrát figyelembe veszszük és homogén alkalmazkodási sebességeket tételezünk fel ($q_{ij} = q$ és $p_{ij} = p$ $1 \leq i, j \leq n$), akkor a (3.2) feltétel szükséges is a stabilitáshoz. A bizonyítás nehézségét éppen az okozza, hogy a két korlát nem „független" egymástól. Az alkalmazkodási sebességeknek nemcsak elegendően kicsinynek kell lenniük, hanem p-nek q-hoz képest elegendő nagynak is kell lennie.

4$^{(\mathrm{II})}$ *MEGÁLLAPITÁS. Működőképesség.* Minden stabil rendszerben van működőképes indulási környezet, ahonnét elindítva a rendszert, a rendszer változói mindvégig pozitívak, köztük a slack input készletek is.

Míg KS – I 4.N. Megállapításnál ténylegesen meghatározható a működőképes kiindulási környezet valamilyen résztartománya, most ez nem sikerült.

A megállapítások végére érve, az I. és II. modellel nyert tételek összefoglalásaként a következőket mondhatjuk:

A készlet-jelzéses és a rendelés-jelzéses mechanizmus nem ekvivalens. A rendelés-jelzéses szabályozással működő rendszer (determinisztikus világban) gyorsabban nő, de egyéb hátránya van. Mégis, korlátozott értelemben, fennáll közöttük valamilyen „majdnem-egyenértékűség": mindkettő stabil és működőképes.

4. A megállapítások matematikai bizonyítása

Az 1.$^{(II)}$, 2.N$^{(II)}$ és a 4.N$^{(II)}$ megállapítások bizonyításától, a rövidség kedvéért, eltekintünk. Ezek ugyanis matematikai szempontból alig térnek el a KS—I cikk megfelelő részeitől. (Megjegyezzük, hogy a 4.N$^{(II)}$ megállapítás bizonyítása az előző cikk 4.A$^{(I)}$ megállapításának bizonyításával azonos.) Kizárólag a stabilitásra vonatkozó 3.N$^{(II)}$ megállapítás igényel bizonyítást.

A KS—I megfelelő részéhez hasonlóan az eltérés-rendszer domináns megoldására a következő $2n^2$-dimenziós lineáris sajátérték-sajátvektor feladatot kapjuk:

$$(4.1)\qquad (\hat{\lambda} - 1 + p_{ij})\,\hat{k}_{ij} = -q_{ij}\,\hat{v}_{ij}$$

és

$$(4.2)\qquad (\hat{\lambda} - 1)\,\hat{v}_{ij} = -a_{ij}\,p_{ij} \sum_{n=1}^{n} \hat{k}_{jh} + p_{ij}\,\hat{k}_{ij}.$$

Célunk olyan P és Q alkalmazkodási sebesség mátrixok találása, amelyeknél az eltérés-rendszer stabil, azaz $|\hat{\lambda}| < 1$.

Egyszerű számolással, $\hat{k}_i = \sum_{j=1}^{n} \hat{k}_{ij}$ jelöléssel

$$(4.3)\qquad \hat{k}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{p_{ij}q_{ij}}{\hat{\lambda}^2 - (2 - p_{ij})\,\hat{\lambda} + 1 - p_{ij}(1 - q_{ij})}\, a_{ij}\, k_j$$

n-dimenziós, nem-lineáris fix-pont feladatot kapjuk, amelynek sajátértékei azonosak (4.1—2.) sajátértékeivel.

Szükségünk lesz a következő

Lemmára (Morishima [4]).

Legyen U_1 $n \times n$-es nem-negatív elemű irreducibilis mátrix, U_2 pedig $n \times n$-es komplex elemű mátrix, ahol $u_{ij}^{(1)} > |u_{ij}^{(2)}|$, $1 \leq i, j \leq n$. Ekkor $\sigma(U_1) < \sigma(U_2)$.

A Lemmából közvetlenül adódik az abszolút stabilitás alábbi elégséges feltétele:

$$(4.4)\qquad \frac{p_{ij}q_{ij}}{|f_{ij}(\lambda)|} < \frac{1}{\sigma} \quad \text{ha} \quad |\lambda| \geq 1$$

ahol $f_{ij}(\lambda) = \lambda^2 - (2 - p_{ij})\,\lambda + 1 - p_{ij}(1 - q_{ij})$ és $\sigma = \sigma(A)$.

Ekkor ugyanis $U_2(\lambda)$ a (4.3)-ban szereplő mátrix, és $U_1 = A/\sigma$ (ami nem más, mint $U_2(1)$) szereposztásban $|\lambda| \geq 1$ esetén teljesül a Lemma feltétele, tehát $\sigma(U_2(\lambda)) < 1$, és így a fixpont feladatnak nincs instabil megoldása.

Egyelőre szorítkozzunk (4.4) elemzésénél a $|\lambda| = 1$ körvonalra. Ez viszont $\lambda = 1$ esetén $1 < 1/\sigma$ egyenlőtlenséget adja, amely éppen R.4. feltevés miatt teljesül, és amely annál élesebb, mennél közelebb van σ az 1-hez. Ezért a megszorított (4.4) teljesüléséhez nemcsak elégséges, de „majdnem" szükséges is

$$(4.5)\qquad \frac{pq}{|f(\lambda)|} \leq 1, \quad \text{ha} \quad |\lambda| = 1$$

teljesülése. (Mostantól kezdve az i, j indexpárt elhagyjuk, ahol ez nem okoz félreértést.)

$\lambda = \mu + i\nu$ (itt i kivételesen a komplex egységgyök) és $\mu^2 + \nu^2 = 1$ helyettesítéssel, megfelelő átalakítások után a

$$(4.6) \quad h(\mu) = 2\,[1 - p(1-q)]\,\mu^2 - (2-p)\,[2 - p(1-q)]\,\mu + h(p,q) \geq 0$$

$$-1 \leq \mu \leq 1$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amely ekvivalens (4.5)-tel. Mivel $h(1) = 0$, $h(p, q)$ is meghatározott, továbbá (4.6) teljesülésének szükséges és elégséges feltételei

$$(4.7) \qquad h'(1) \leq 0 \quad \text{azaz} \quad p \geq \frac{2q}{1-q}, \quad (q < 1)$$

és

$$(4.8) \qquad h(-1) \geq 0 \quad \text{azaz} \quad p \leq 2 \quad \text{vagy} \quad p \geq \frac{2}{1-q}.$$

Visszatérünk (4.4)-hez, amely teljesüléséhez nyilvánvalóan szükséges, hogy $f(\lambda)$ gyökei az egységkör belsejében legyenek.

Ha a két gyök valós, akkor a $(-1,1)$ intervallumba kell esniük, ami éppen

$$(4.9) \qquad f(1) = 1 - (2-p) + 1 + pq - p > 0 \quad \text{azaz} \quad pq > 0$$

és

$$(4.10) \quad f(-1) = 1 + 2 - p + 1 + pq - p > 0 \quad \text{azaz} \quad p < \frac{4}{(2-q)}, \quad (q < 2)$$

feltételek teljesülésével ekvivalens.

Ha a két gyök komplex, akkor egymás konjugáltjai, abszolút értékük tehát egyenlő. Mivel a gyökök szorzata $f(\lambda)$ konstans tagja — hiszen $f(\lambda)$ főegyütthatója 1 — a gyökök abszolút értéke $\sqrt{|1 - p + pq|}$, tehát teljesülnie kell a

$$(4.11) \qquad |1 - q + pq| < 1 \quad \text{azaz} \quad 0 < p(1-q) < 2$$

egyenlőtlenségnek.

Szükségünk lesz a (4.7)–(4.11) egyenlőtlenségeket egyszerre kielégítő (p, q) pontok $\mathcal{H}$ halmazára. $p, q > 0$ biztosítja (4.9) teljesülését. (4.10) felső korlát kisebb mint (4.8)-beli második alternatíva alsó korlátja, tehát (4.8) első alternatívája érvényes, amely viszont (4.7)-tel együtt maga után vonja (4.10) teljesülését. Hasonlóan, (4.7)-ből következik (4.11). Két független és nem kizáró feltétel marad: (4.7) és (4.8). Mind a kettő teljesül, ha a (4.7)-beli alsó korlát kisebb a (4.8)-beli felső korlátnál, ha $0 \leq q < 1/2$. Vagyis éppen a megállapításban szereplő halmazt kaptuk.

A bizonyítás befejezéséhez szükségünk lesz *Rouche tételére* (Szőkefalvi–Nagy, [5]).

Legyen $f(\lambda)$ és $g(\lambda)$ két komplex változás polinom (általánosabban: reguláris függvény). Tegyük föl, hogy

$$(4.12) \qquad |f(\lambda)| > |g(\lambda)| \quad \text{ha} \quad |\lambda| = 1.$$

Ekkor az $f(\lambda) + g(\lambda)$ és az $f(\lambda)$ polinomnak azonos számú gyöke esik a $|\lambda| < 1$ tartományba.

Tegyük föl, hogy teljesül a (3.2) feltétel. Legyen $f(\lambda)$ az előzőleg definiált másodfokú polinom és legyen $g(\lambda)$ tetszőleges komplex szám, ϑpq-nál kisebb-egyenlő abszolút értékkel, $0 < \vartheta < \sigma$. Ekkor (4.5) ill. (3.2) miatt teljesül a Rouche-tétel feltétele, tehát $f(\lambda) + e^{i\varphi}\,\vartheta pq$ polinom mindkét gyöke a nyílt egységkörbe esik, hiszen (4.9) és (4.10) miatt $f(\lambda)$ mindkét gyöke ide esik. Ekkor viszont igazoltuk a (4.4) feltételt, azaz a stabilitást.

(Beérkezett: 1975. szeptember 5.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. BELSLEY, D. A.: Industry Production Behavior: the Order-Stock Distinction, Amsterdam: North-Holland, 1969.
2. KORNAI J.: „A vevő reakciói áruhiány esetén", Kereskedelmi Szemle, 16. (1975) 4–11. o.
3. KORNAI J.–SIMONOVITS A.: „Szabályozási problémák Neumann-gazdaságokban/', Szigma, 8. (1975.) 81–99. o.
4. MORISHIMA, M.: Equilibrium, Stability and Growth, Oxford, 1964. Oxford University Press.
5. SZŐKEFALVI-NAGY B.: Komplex függvénytan (egyetemi jegyzet).

CONTROL BASED ON ORDER SIGNALS IN A NEUMANN-ECONOMY

The present paper deals with the transformation of the model described in [3], previously published in this Journal. The framework of the model is unvaried: a closed, time-invariant dynamic Leontief–Neumann model, in which the variables are stabilized by a decentralized feedback rule. In our new model we dropped our previous assumption on the coincidence of orders and transfers: the orders became communication variables. The operation of the real sphere is described by equations (2.6)–(2.7), and the control rules are specified by equations (2.8), (2.9) and (2.5): the deliveries depend on the backlogged orders, the orders depend on the input-stocks.

Our propositions are the variants of the corresponding propositions of [3]:

1. There exists a normative path and it is uniquely determined.

2. Compared with our previous model the present model assures higher growth rate, but it is payed for by the customers' waiting time.

3. If the adjustment rates satisfy equation (3.2), then the system is stable.

4. In every stable economy there exists a viable neighbourhood of initial states.

УПРАВЛЕНИЕ ЗАКАЗАМИ В НЕЙМАНОВСКИХ ЭКОНОМИКАХ

Данная статья занимается с одним вариантом модели в [3]. Рамки нашей модели не изменяются. Динамическая, закрытая модель Леонтьева—Неймана, структурные матрицы которой постоянны и ее переменные стабилизируются децентрализованной обратнойсвязью. В этой модели мы отклонились от раннего предположения о совпадении заказов с трансферами; заказы стали коммуникационными переменными.

Функционирование реальной сферы описывается при помощи уравнений (2.6)—(2.7), а управление — при помощи уравнений (2.8), (2.3) и (2.5): транспорты зависят от сумм невыполненных заказов и заказы зависит от потребительских запасов.

Наши предложения являются вариантами предложений в [3]:

1. Нормативная траектория существует и однозначно определена.

2. Виртуальное перемещение предыдущей модели с новой моделью повышает темп роста, но это оплачивается ожиданием конечных потребителей.

3. Если коэффициенты обратной связи удовлетворяют (3.2), тогда система стабильна.

4. В каждом стабильном хозяйстве есть окрестность начальных векторов положений, способная к функционированию.