Szép Jenő—Hegedüs Miklós

# Egyensúlyi rendszerek III.

A korábbi I. és II. közleményben* bevezettük azokat a legfontosabb alapfogalmakat, amelyek egy dinamikus, azaz időben változó rendszer matematikai vizsgálatához elengedhetetlenül szükségesnek látszanak. Bevezettük a stabilitási halmaz és egyensúlyhalmaz fogalmát, majd egzisztenciatételeket igazoltunk velük kapcsolatban.

Az ezt közvetlenül követő vizsgálatainkban egy új és a közgazdaságtudományban, vagy az operációkutatásban kevésbé használt fogalom fog központi szerepet játszani: a vonzási tartomány fogalma. Itt, kvalitatív megfogalmazásban, arról van szó, hogy létezik-e és milyen feltételek mellett létezik egy egyensúlyhalmaznak olyan környezete, melyből kiinduló monoton láncok szükségképpen a tekintett egyensúlyhalmazba vezetnek. (E fogalom mindenesetre mutat némi hasonlóságot a differenciálegyenletek vizsgálatainál vagy más speciális matematikai területen fellépő stabilitási problémakörrel.)

A vonzási tartomány kérdéskörének vizsgálata folyamán azonban számos olyan probléma merül fel, amelynek analízise szükségessé teszi a szóbajövő esetek alapos és finom szétválasztását. Az alább felsorolt esetek mindegyike önálló vizsgálatot igényel, amelyekből azután a közöttük fennálló kapcsolatok is napfényre kerülnek.

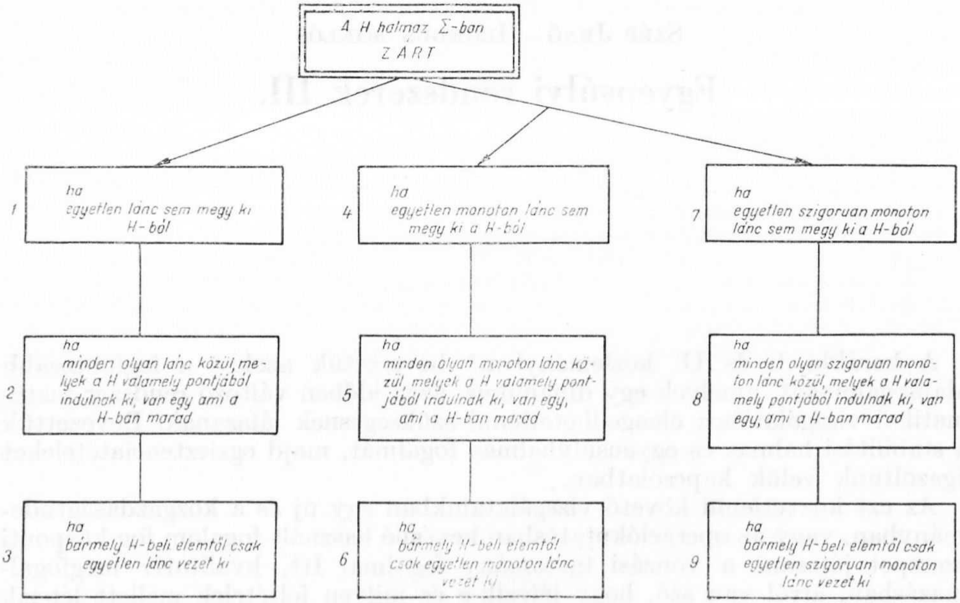
Bár a továbbiakban a jelölésekben és a megfogalmazásokban azt az esetet tekintjük, amikor egyszerre csak egy szerv végez állapotváltoztatást, a tárgyalás hasonló a több szerv egyidejű állapotváltoztatása esetén is. Láttuk ugyanis (II. közlemény), hogy az egyensúlyhalmazok (stabilitási halmazok) létezése általános feltételek mellett ekkor is biztosított.

## 3.1. Az esetek szétválasztása

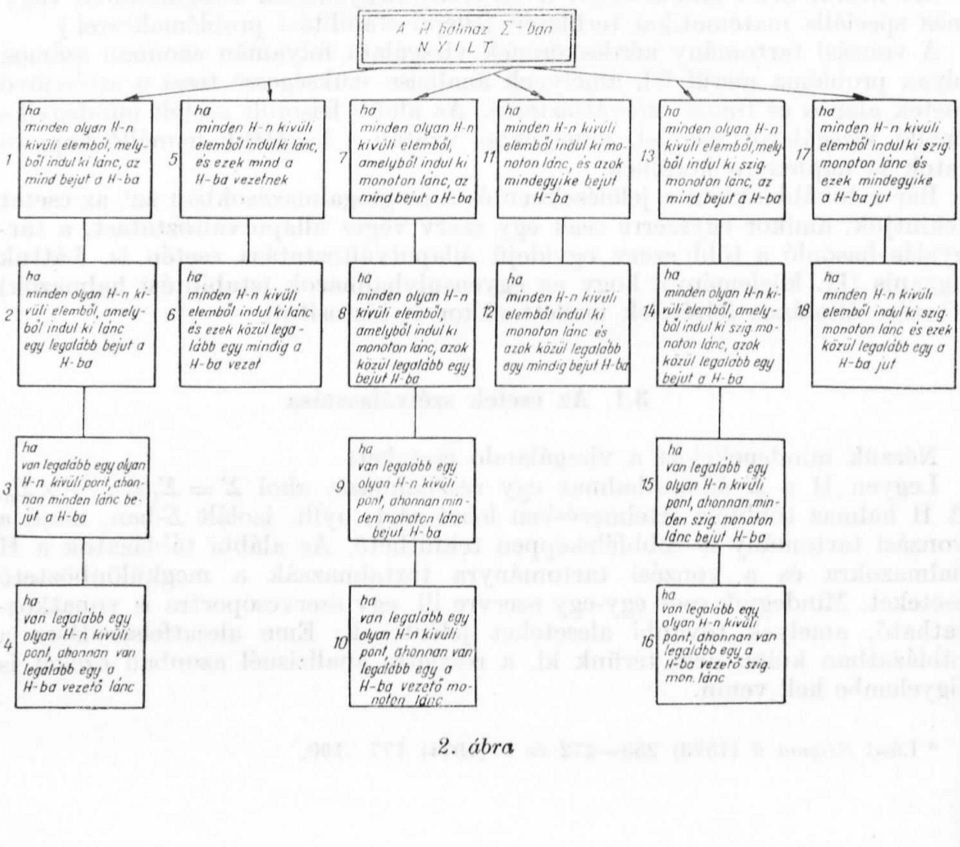
Nézzük mindenekelőtt a vizsgálandó eseteket!

Legyen H a $\Sigma$ állapothalmaz egy részhalmaza, ahol $\Sigma = \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n$. A H halmaz többféle értelmezésben lehet zárt, nyílt, izolált $\Sigma$-ban, majd a vonzási tartomány is többféleképpen tekinthető. Az alábbi táblázatok a H halmazokra és a vonzási tartományra tartalmazzák a megkülönböztető eseteket. Mindegyik eset egy-egy szervre ill. egy szervcsoportra is vonatkoztatható, amelyek további aleseteket jelentenek. Eme alesetfelsorolásra a táblázatban külön nem térünk ki, a részletes analízisnél azonban ezeket is figyelembe kell venni.

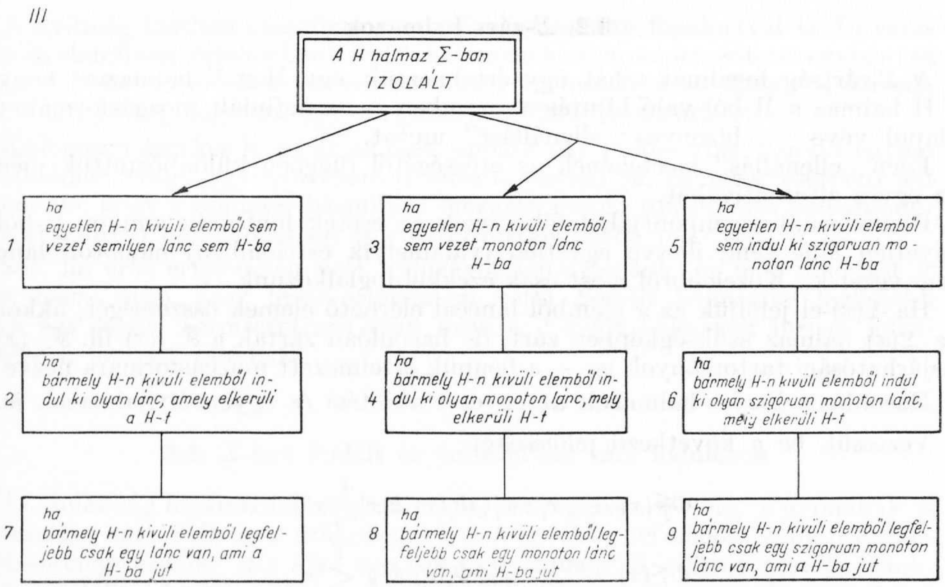
* Lásd *Szigma 6* (1973) 255—272 és *7* (1974) 177—190.


A H halmaz Σ-ban
ZÁRT
1
ha
egyetlen lánc sem megy ki H-ból
4
ha
egyetlen monoton lánc sem megy ki a H-ból
7
ha
egyetlen szigoruan monoton lánc sem megy ki a H-ból
2
ha
minden olyan lánc közül, melyek a H valamely pontjából indulnak ki, van egy ami a H-ban marad
5
ha
minden olyan monoton lánc közül, melyek a H valamely pontjából indulnak ki, van egy, ami a H-ban marad
8
ha
minden olyan szigoruan monoton lánc közül, melyek a H valamely pontjából indulnak ki, van egy, ami a H-ban marad
3
ha
bármely H-beli elemtől csak egyetlen lánc vezet ki
6
ha
bármely H-beli elemtől csak egyetlen monoton lánc vezet ki
9
ha
bármely H-beli elemtől csak egyetlen szigoruan monoton lánc vezet ki

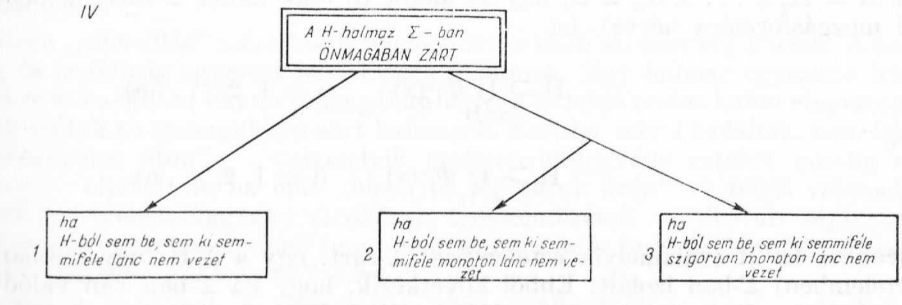
*1. ábra*


A H halmaz Σ-ban
NYILT
1
ha
minden olyan H-n kivüli elemből, melyből indul ki lánc, az mind bejut a H-ba
5
ha
minden H-n kivüli elemből indul ki lánc, és ezek mind a H-ba vezetnek
7
ha
minden olyan H-n kivüli elemből, amelyből indul ki monoton lánc, az mind bejut a H-ba
11
ha
minden H-n kivüli elemből indul ki monoton lánc, és azok mindegyike bejut H-ba
13
ha
minden olyan H-n kivüli elemből, melyből indul ki szig. monoton lánc, az mind bejut a H-ba
17
ha
minden H-n kivüli elemből indul ki szig. monoton lánc és ezek mindegyike a H-ba jut
2
ha
minden olyan H-n kivüli elemből, amelyből indul ki lánc egy legalább bejut a H-ba
6
ha
minden H-n kivüli elemből indul ki lánc és ezek közül legalább egy mindig a H-ba vezet
8
ha
minden olyan H-n kivüli elemből, amelyből indul ki monoton lánc, azok közül legalább egy bejut H-ba
12
ha
minden H-n kivüli elemből indul ki monoton lánc és azok közül legalább egy mindig bejut H-ba
14
ha
minden olyan H-n kivüli elemből, amelyből indul ki szig. monoton lánc, azok közül legalább egy bejut a H-ba
18
ha
minden H-n kivüli elemből indul ki szig. monoton lánc és ezek közül legalább egy a H-ba jut
3
ha
van legalább egy olyan H-n kivüli pont, ahonnan minden lánc bejut a H-ba
9
ha
van legalább egy olyan H-n kivüli pont, ahonnan minden monoton lánc bejut H-ba
15
ha
van legalább egy olyan H-n kivüli pont, ahonnan minden szig. monoton lánc bejut H-ba
4
ha
van legalább egy olyan H-n kivüli pont, ahonnan van legalább egy a H-ba vezető lánc
10
ha
van legalább egy olyan H-n kivüli pont, ahonnan van legalább egy a H-ba vezető monoton lánc
16
ha
van legalább egy olyan H-n kivüli pont, ahonnan van legalább egy a H-ba vezető szig. mon. lánc

*2. ábra*




*3. ábra*




*4. ábra*


*5. ábra*

### 3.2. $\Sigma$-zárt halmazok

A $\Sigma$-zártság fogalmát tehát úgy értelmeztük egy $H \subset \Sigma$ halmazra, hogy a H halmaz a H-ból való kijutással szemben —, a definiált mozgásformákat alapul véve —, bizonyos „ellenállást" mutat.

Ezen „ellenállás" mértékének az erősségétől függően különböztettük meg az egyes alternatívákat.

Rendszerünk szempontjából főleg azok az esetek fontosak, amikor H-ból egyetlen lánc sem, illetve egyetlen (valamelyik értelemben) monoton lánc sem vezet ki. Közelebbről most csak ezekkel foglalkozunk.

Ha $\mathfrak{L}(x)$-el jelöljük az $x$ elemből lánccal elérhető elemek összességét, akkor az $\mathfrak{L}(x)$ halmaz szükségképpen zárt, de hasonlóan zártak a $\mathfrak{T}_{\leqq}(x)$ ill. $\mathfrak{T}_{<}(x)$ bejárhatósági tartományok is, — a bennük értelmezett mozgásformára nézve.

Hasonlóan $\Sigma$-zárt halmazok az egyes stabilitási és egyensúlyhalmazok is.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\Phi_i^{\leqq}(x) = \langle x_i' : x_i' \in \Phi_i(x) \ \& \ x \overset{i}{\leqq} x' \rangle$$

$$\Phi_i^{<}(x) = \langle x_i' : x_i' \in \Phi_i(x) \ \& \ x \overset{i}{<} x' \rangle .$$

Ha $H = H_1 \times \ldots \times H_n \subset \Sigma$, úgy H akkor és csak akkor $\Sigma$-zárt (a megfelelő mozgásformára nézve), ha

$$H_i \supset \bigcup_{x \in H} \Phi_i^{\leqq}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

illetve

$$H_i \supset \bigcup_{x \in H} \Phi_i^{<}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Továbbá, ha H (valamelyik értelemben) $\Sigma$-zárt, úgy a $\Sigma$-H (ugyanabban az értelemben) $\Sigma$-ban izolált. Ebből következik, hogy ha $\Sigma$-ban van valódi $\Sigma$-zárt halmaz, úgy egyúttal van valódi izolált halmaz is.

A korábbiak szerint a stabilitási ill. egyensúlyhalmazok egyben $\Sigma$-zárt halmazok is. Ezért minden olyan korábbi feltételünk, mely a stabilitási ill. egyensúlyhalmazok létezését biztosította, egyúttal az izolált halmazok létezését is biztosítja. Továbbá abban az esetben, amikor az egyensúlyhalmaz egyetlen pontból áll, — azaz létezik egyensúlypont, — akkor a $\Sigma$ többi pontjai szükségképpen izolált halmazt alkotnak.

### 3.3. $\Sigma$- nyílt halmazok

A $\Sigma$-nyílt halmaz fogalmának értelmezésénél is természetes alapokról indultunk ki. A „nyílt"-ság fogalmát egy bizonyos „elérhetőséggel" értelmeztük, és attól függően, hogy ez az elérhetőség milyen mértékű, itt is több alternatíva kínálkozik. A $\Sigma$-zártság és $\Sigma$-nyíltság nem egymást kizáró fogalmak. Egy $H \subset \Sigma$ halmaz lehet egyszerre (valamilyen értelemben) zárt is és nyílt is.

Viszont az izoláltság és a nyíltság ellentétes fogalmak. Egy halmaz nem lehet egyszerre (valamilyen értelemben) izolált is és nyílt is.

A nyíltság kérdése összefügg a vonzási tartomány fogalmával is. Ugyanis egy (valamilyen értelemben) nyílt halmaznak a komplementere egyben az (ugyanabban az értelemben vett) vonzási tartománya is. Ebből is látszik, hogy a nyíltság fogalma egy meglehetősen erős megszorítás.

Különösen érdekes lehet az az eset, amikor egy rendszerben $\Sigma$-nyílt egyensúlyhalmaz (vagy egyensúlypont!) létezik, hiszen pl. ez (erős esetben) azt jelentené, hogy a rendszer bármilyen mozgása esetén (tetszőleges alapállapotból kiindulva) mindenképpen egy egyensúlyállapotba jut.

Sőt, ha erős értelemben vett nyíltságot feltételezünk, ez már unicitást is von maga után, azaz (erős értelemben vett) $\Sigma$-nyílt halmazból legfeljebb csak egy lehet. Természetesen csak azok a $\Sigma$-nyílt halmazok bírnak jelentőséggel, melyek valódiak.

### 3.4. $\Sigma$-ban izolált és önmagában zárt halmazok

Az izoláltság fogalmának, valamint az önmagában zártság fogalmának a bevezetése ezek után már szükségszerű és a korábbi definíciók alapján természetszerűleg adódik. Míg zárt esetben egy halmazból kijutni nem tudtunk, addig izolált halmaz esetén, — ha egy kinti állapotban vagyunk, — bejutni nem tudunk, ill. az izolált halmaz a „természetes bejutással" szemben mutat „ellenállást".

Ezen „ellenállás" mértékétől függően itt is több alternatíva létezik. A zártság és izoláltság egymást nem kizáró fogalmak. Egy halmaz egyszerre lehet zárt is és izolált is. Ezt az önmagában véve is érdekes esetet külön elneveztük: ezek voltak az önmagukban zárt halmazok. Ezekbe, mivel izoláltak, nem lehet „természetes úton" — valamelyik preferenciafüggvény értékét mindig növelve — eljutni, de ha már „bizonyos áldozatok árán" — tehát valamelyk szerv preferenciafüggvény értékének csökkentésével — sikerült eljutnunk, akkor „természetes módon" innen már kijönni nem tudunk, hanem már csak újabb esetleges „áldozatok" árán.

Ezek a halmazok a természetes állapotváltozásokra, mint „pályák"-ra nézve, amolyan „fekete foltok"-nak tekinthetők, és külön érdekességgel bírnak azon feltételek, melyek mellett léteznek ilyen (valódi) „fekete foltok". Sőt, ugyanolyan érdekességgel bír annak a feltárása is, hogy éppenséggel mely feltételek biztosítják azt, hogy ilyen „fekete foltok" ne létezzenek.

### 3.5. A vonzási tartomány fogalma

A vonzási tartomány fogalma — a rendszer általunk adott megfogalmazása mellett — alapvető jelentőséggel bír. Értelmezése természetes; azon pontok összessége, melyekre a H halmaz valamilyen értelemben „vonzást" gyakorol. A „vonzás" mértékétől függően itt is több alternatíva lehetséges. Mint már az elején arra utaltunk, ez rokon a több problémakörből ismert stabilitási kér déssel. Nevezetesen, ha a rendszer pl. egyensúlyállapotba (egyensúlyhalmazba) jutott, onnan egy kicsit kimozdítva vajon olyan állapotba jut-e, ahonnan mindig szükségképpen visszakerül az egyensúlyállapotba, ill. ahonnan visszakerülhet az egyensúlyi állapotba.

De itt többről is szó van. Mivel korábbi vizsgálataink azt mutatták, hogy ha nem is egyensúlypont, hanem egyensúlyhalmaz igen tág feltételek mellet létezik, mégpedig tetsző eges elemek bejárhatósági tartományában. Ez azt implikálja, hogy az egyensúlyhalmazok feltehetőleg, — ugyancsak igen tág feltételek mellett —, bizonyos vonzási tartománnyal bírnak.

Külön érdekességgel bír az egyensúlypont vonzási tartománya, amely esetben egyáltalán a létezés kérdésének a felvetése is, csak az általunk fent adott általánosítás, illetve szemlélet mellett vált lehetővé.

A fentiek mellett remény van arra, hogy a $\Sigma$ halmazt fel tudjuk osztani egyensúlyhalmazokra és az azokat körülvevő tartományokra, melyek elhelyezkedésének szerkezete a rendszer vizsgálata szempontjából alapvető.

### 3.6. Néhány megállapítás $\sum$-zárt és $\sum$-nyílt halmazokra

Mielőtt kimondanánk néhány megállapítást és tételt, a bevezetett definíciókra adott több alternatíva közül most lerögzítjük azt a néhányat, amelyekkel az alábbiakban foglalkozni fogunk.

Megállapodunk a következőkben:

Egy $H(\subset\Sigma)$ halmazt $\Sigma$-zártnak fogunk nevezni, ha nem megy ki H-ból egyetlen szigorúan monoton lánc sem, azaz

$$\mathfrak{T}_{<}(x) \subset H \qquad (x \in H).$$

A H-halmazt $\Sigma$-nyíltnak nevezzük, ha bármely H-n kívüli elemből indul ki olyan szigorúan monoton lánc, amely a H-ba vezet, azaz

$$\mathfrak{T}_{<}(x) \cap H \neq \emptyset \qquad (x \in \Sigma\text{-}H).$$

A V(H) halmazt a H vonzási tartományának nevezzük, ha minden V(H)-beli elemből indul ki H-ba vezető szigorúan monoton lánc, azaz

$$\mathfrak{T}_{<}(x) \cap H \neq \emptyset \qquad (x \in V(H)).$$

Végül a V*(H) halmazt a H erős vonzási tartomány-ának nevezzük, ha minden olyan szigorúan monoton lánc, ami a V*(H)-ból indul ki, a H-ba vezet, azaz

$$\mathfrak{L}_{<}(x) \cap H \neq \emptyset \qquad [x \in V^*(H)].$$

Világos, hogy

$$H \subset V^*(H) \subset V(H),$$

továbbá egy $H \subset \Sigma(H \neq \Sigma)$ halmaz akkor és csak akkor $\Sigma$-nyílt, ha

$$V(H) = \Sigma.$$

Mint már említettük, a $\Sigma$-zártság és a $\Sigma$-nyíltság nem egymást kizáró fogalmak, egy halmaz lehet egyszerre $\Sigma$-zárt is és $\Sigma$-nyílt is, sőt ha $H \subset \Sigma(H \neq \Sigma)$ halmaz $\Sigma$-zárt, akkor már nem is lehet a $\Sigma$-ban más $\Sigma$-nyílt halmaz, mint a H részhalmazai.

Ez megfordítva is igaz. Ha H a $\Sigma$-nak egy valódi $\Sigma$-nyílt halmaza, akkor $\Sigma$-zárt halmazok már csak a H részhalmazai lehetnek.

A fentiek alapján kiderül tehát, hogy a $\Sigma$-zártság és a $\Sigma$-nyíltság erősen összetartozó fogalmak, és ez annak a következménye, hogy a nyíltság egy igen erős fogalom ill. megszorítás.

Tegyük fel ezek után, hogy van a $\Sigma$-ban egy H valódi $\Sigma$-zárt halmaz.

Ezek után két eset lehetséges.

Vagy nem létezik a $\Sigma$-ban $\Sigma$-nyílt halmaz, vagy ha létezik, úgy az részhalmaza H-nak. Ez utóbbi esetben viszont nem létezik további olyan H $\Sigma$-zárt halmaz, mely diszjunkt a H-val, sőt ha $\hat{H} \subset H$ a nevezett $\Sigma$-nyílt halmaz, akkor minden további H' $\Sigma$-zárt halmazra $\hat{H} \cap H' \neq \emptyset$.

Mivel az egyensúly (stabilitási) halmazok szükségképpen zártak, ezért, ha van a rendszernek egyensúlyhalmaza, úgy vagy nincs a $\Sigma$-ban nyílt halmaz, vagy ha van, akkor az az egyensúlyhalmazon belül helyezkedik el.

Ez utóbbi esetben viszont az egyensúlyhalmaz definíciójából következik, hogy akkor több egyensúlyhalmaz nincs is.

Világos ezek után, hogy azok az egyensúlyhalmazok külön érdekességgel bírnak, melyeken belül $\Sigma$-nyílt halmazok találhatók, akkor ugyanis több egyensúlyhalmaz már nem is létezik.

Megfordítva, tegyük fel ezek után, hogy van a $\Sigma$-ban egy (valódi) H $\Sigma$-nyílt halmaz. A fentiekből következően ezek után a $\Sigma$-zárt halmazok a H részhalmazai között keresendők. Ezért a fentiekhez hasonlóan két eset lehetséges. Vagy nem létezik a rendszernek $\Sigma$-zárt halmaza, vagy ha van az részhalmaza H-nak.

Ez utóbbi esetben nincs a $\Sigma$-nak a H-val diszjunkt további $\Sigma$-nyílt halmaza, sőt ha $\hat{H}$ a nevezett $\Sigma$-zárt halmaz ($\hat{H} \subset H$), akkor minden további H' $\Sigma$-nyílt halmazra $H' \cap H \neq \emptyset$, továbbá az egyensúlyhalmazok is a H részhalmazai között keresendők.

Az alábbiakban elégséges feltételt fogunk adni arra nézve, hogy egy $\Sigma$-zárt halmaz egyszerre $\Sigma$-nyílt is legyen.

Előtte néhány alapfogalom bevezetése szükséges.

Az $n$ dimenziós euklidesi térben két halmaz „távolságán" a

$$\varrho(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} ||x - y||$$

mennyiséget értik. Ez a távolságfogalom azonban általában nem tesz eleget azoknak a követelményeknek, amelyeket egy „távolság-fogalom"-tól megkívánunk. Egy, a halmazok közötti metrikához jutunk azonban, ha a halmazok közötti távolságot az alábbi módon értelmezzük, (l. [1]).

Legyen

$$\mu(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} (||x - y||).$$

és legyen

$$d(A, B) = \max \{\mu(A, B), \mu(B, A)\}.$$

Könnyű megmutatni, hogy az $n$ dimenziós euklidesi tér nem üres, korlátos zárt halmazai a d(A, B) távolsággal metrikus teret alkotnak.[1]

[1] A d(A, B) távolságot szokás az A és B halmazok *Hausdorff-féle távolságának* nevezni.

A matematikai közgazdaságtanban (különösen az egyensúlyi problémák tárgyalásánál) sűrűn találkozhatunk ún. „pont-halmaz" leképezésekkel, vagy többértékű függvényekkel. Az ilyen leképezéseknél az $x$ képeként szereplő $J(x)$ nem egy pont, hanem egy halmaz. A szokásos jelölésekkel:

$$x \to J(x) \qquad (x \in E_n;\ J(x) \subset E_n).$$

A fenti távolságfogalomra építve értelmezni fogjuk a pont-halmaz leképezések folytonosságát.

Egy $x \to J(x)$ pont-halmaz leképezést az értelmezési tartományának egy $x_0$ pontjában folytonosnak nevezünk, ha minden $x_n \to x_0$ sorozat esetén

$$d\big(J(x_n),\ J(x_0)\big) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

felülről félig folytonosnak nevezzük, ha

$$\mu\big(J(x_n),\ J(x_0)\big) \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

és alulról félig folytonosnak nevezzük, ha

$$\mu\big(J(x_0),\ J(x_n)\big) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Világos, hogy a $J(x)$ akkor és csak akkor folytonos az $x_0$-ban, ha ott egyszerre alulról is és felülről is félig folytonos. Ezek után megfogalmazzuk a $\Sigma$-nyíltság egy elégséges feltételét.

14. *TÉTEL*

Legyen $\Sigma$ korlátos halmaz és legyen H a $\Sigma$ egy valódi részhalmaza. Ha az $x \to \mathfrak{T}_{<}(x)$ leképezés folytonos a $\Sigma$-n és a H-nak pozitív sugarú vonzási tartománya van, akkor H $\Sigma$-nyílt.

Mielőtt a tételt bizonyítanánk, előrebocsátjuk annak néhány következményét.

A fenti feltételek mellett, ha H egyben $\Sigma$-zárt is, akkor

1. a korábbiak alapján — mivel H $\Sigma$-nyílt és egyben $\Sigma$-zárt is, — nem létezik sem olyan $\Sigma$-zárt, vagy $\Sigma$-nyílt halmaz, ami a H-val diszjunkt lenne,
2. ha egy egyensúlyhalmaz pozitív sugarú vonzási tartománnyal bír, akkor nincs több egyensúlyhalmaz $\Sigma$-ban,
3. ha egy egyensúlypont pozitív sugarú vonzási tartománnyal bír, akkor rajta kívül sem egyensúlypont, sem egyensúlyhalmaz nem létezik a $\Sigma$-ban.

Ezek után rátérünk a 14. TÉTEL bizonyítására.

*BIZONYÍTÁS*

Első lépésben azt mutatjuk meg, hogy a H halmaz V(H) vonzási tartománya közönséges értelemben vett zárt halmaz, azaz minden torlódási pontját tartalmazza.

Legyen $x_0$ a V(H) egy torlódási pontja. Ha $\varrho(x_0, H) \leq \eta$, ahol $\eta$ a feltételekben kimondott pozitív sugarú környezet sugara, akkor definíció szerint $x_0 \in V(H)$. Feltehető tehát, hogy $\varrho(x_0, H) > \eta$.

[2] A $\varrho(J(x_n), J(x^0)) \to 0$ ($n \to \infty$) esetén *gyengén folytonosnak* nevezzük.

A feltételünk szerint a $\mathfrak{T}_<(x)$ leképezés folytonos az $x_0$-ban, ezért ott egyben felülről is félig folytonos. Ezért van olyan $\delta(\delta > 0,\ \delta = \delta(x_0, \eta))$, hogy valahányszor $||x - x_0|| < \delta$, mindannyiszor

$$\mu(\mathfrak{T}_<(x), \mathfrak{T}_<(x_0)) < \eta$$

Ezek után tegyük fel, hogy $x_0 \notin \mathrm{V(H)}$. Mivel $x_0$ torlódási pont, ezért a $\delta = \delta(x_0, \eta)$ sugarú környezetében is van legalább egy $x \in \mathrm{V(H)}$-pont. Ekkor viszont

$$\mu(\mathfrak{T}_<(x), \mathfrak{T}_<(x_0)) < \eta.$$

Másrészt mivel $x_0 \notin \mathrm{V(H)}$, ezért

$$\mathfrak{T}_<(x_0) \subset \Sigma - \mathrm{V(H)},$$

azaz minden pontja legalább $\eta$ távolságra van H-tól.

Viszont mivel $x \in \mathrm{V(H)}$, ezért

$$\mathfrak{T}_<(x) \cap \mathrm{H} \neq \Phi,$$

ahonnan szükségképpen a

$$\mu(\mathfrak{T}_<(x), \mathfrak{T}_<(x_0)) \geq \eta$$

ellentmondásra jutunk.

Ezek után megmutatjuk, hogy

$$\mathrm{V(H)} = \Sigma.$$

Ismét indirekt úton bizonyítunk.

Tegyük fel, hogy

$$\mathrm{V(H)} \neq \Sigma.$$

Ekkor a V(H) zártsága miatt van olyan $x^* \in \mathrm{V(H)}$ pont, melynek tetszőleges sugarú környezetében van legalább egy pont a $\Sigma - \mathrm{V(H)}$-ból.

Mivel a $\mathfrak{T}_<(x)$ folytonos az $x^*$-ban, így ott egyben alulról is félig folytonos. Ezért van olyan $\delta' \pm \delta'(x^*, \eta)$, hogy valahányszor $||x - x^*|| < \delta'$, mindannyiszor

$$\mu(\mathfrak{T}_<(x^*), \mathfrak{T}_<(x)) < \eta.$$

Legyen

$$||x - x^*|| < \delta' \quad (x \in \Sigma - \mathrm{V(H)}).$$

Ekkor, mivel $x \notin \mathrm{V(H)}$, így

$$\mathfrak{T}_<(x) \subset \Sigma - \mathrm{V(H)},$$

azaz $\mathfrak{T}_<(x)$-nek minden pontja legalább $\eta$ távolságra van H-tól. Másrészt $x^* \in \mathrm{V(H)}$, ezért

$$\mathfrak{T}_<(x^*) \cap \mathrm{H} \neq \Phi,$$

ahonnan a

$$\mu(\mathfrak{T}_<(x^*), \mathfrak{T}_<(x)) \geq \eta$$

ellentmondásra jutunk.

Ellentmondásra jutva a tételt bizonyítottuk.

Eddigi közleményeinkből, de különösen a harmadik közleményből világosan kiderül, hogy az elmélet szempontjából igen sok és alapvető szerepet játszó vizsgálat van hátra. Jelen cikksorozatunkat közvetlenül nem kívánjuk folytatni, hanem egy későbbi időpontban összefoglaló cikkben fogunk beszámolni további eredményeinkről, mind elméleti, mind számítástechnikai vonatkozásban.

*(Beérkezett: 1975. március 11.)*

## IRODALOM

1. CSÁSZÁR Á.: Bevezetés az általános topológiába. Budapest, 1970. Akadémiai Kiadó.
2. ALLINGHAM, M. G.: Equilibrium and stability. Econometrica, Vol. 42. (1974. (705—716 p.)

## EQUILIBRIUM SYSTEMS III.

In previous papers we were concerned with the existence problem of equilibrium sets and stability sets respectively. In the present paper it comes to the introduction of attraction domains of equilibrium sets. First of all the concepts of $\Sigma$-closed, $\Sigma$-open and $\Sigma$-isolated sets should be introduced that are related to conditions of getting into the equilibrium set or getting out of it. We list all those cases that are later investigated. We prove a sufficient condition for the openness of the equilibrium set. A consequence of this is e.g. that under given conditions there is no more equilibrium set in $\Sigma$ if the equilibrium set has an attraction domain with a positive radius. We shall return to further results of the research and numerical experiences on an other occasion.

## СИСТЕМЫ РАВНОВЕСИЯ III

В появившихся раньше сообщениях мы занимались вопросом существования множества равновесия, или же стабильности. В данной работе мы займемся введением области притяжения множеств равновесия. Прежде всего следует ввести понятие закрытого — $\Sigma$ —, открытого — $\Sigma$ —, изолирвванного — $\Sigma$ — множеств, которые связаны с условиями проникновения или выхода из множества равновесия. Мы перечисляем все те случаи, которые позднее являтся предметом исследования. Доказываем удовлетворительное условие в отношении открытости множества равновесия. В результате этого, например, если при данных условиях множество равновесия имеет область притяжения с положительным радиусом, то в — $\Sigma$ — нет больше множеств равновесия.

Дальнейшими результатами исследования и опытом, приобретенным в области числового программирования, мы займемся в следующий раз.