Stahl János

Egy LP-dekompozíciós eljárásról

1. A korlátos eset összefoglalása

Ebben a részben azon lineáris programozási dekompozíciós eljárásra vonatkozó eredményeket foglaljuk össze és egészítjük ki némileg, mellyel [5]-ben foglalkoztunk. A külön összefoglalást az említett kiegészítésen túl az indokolja, hogy egyrészt a jelöléseket egyszerűsítendő [5]-höz képest — különösebb magyarázatot nem igénylő — más jelöléseket használunk, másrészt a megértést szeretnénk megkönnyíteni, mivel az [5]-beliekre, mint eredeti eljárásra több alkalommal is hivatkozunk majd.

[5]-ben az

$$\begin{aligned} A_{01}x_1 &\le b_0 \\ A_{10}x_0 + A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &\le b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 &\le b_2 \\ x_0,\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \\ \max\,(c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2)& \end{aligned} \tag{1.1}$$

és

$$\begin{aligned} p_1A_{10} &\ge c_0 \\ p_0A_{01} + p_1A_{11} + p_2A_{21} &\ge c_1 \\ p_1A_{12} + p_2A_{22} &\ge c_2 \\ p_0,\ p_1,\ p_2 &\ge 0 \\ \min\,(p_0b_0 + p_1b_1 + p_2b_2)& \end{aligned} \tag{1.2}$$

primál-duál lineáris programozási feladatpárt vizsgáltuk és feltettük, hogy az

$$\mathscr{X}_1 = \{x_1 : A_{01}x_1 \le b_0,\ x_1 \ge 0\}$$

és

$$\mathscr{P}_1 = \{p_1 : p_1A_{10} \le c_0,\ p_1 \ge 0\}$$

halmazok nem üresek és korlátosak. (Kisbetűvel, az indexektől eltekintve, sor vagy oszlopvektort jelölünk, nagybetű mátrixot, írott nagybetű poliédert, görög kisbetű skalárt jelöl.)

p_1-re vonatkozó feladatnak neveztünk egy

$$
\begin{gathered}
A_{10} x_0 + \sum_i \lambda_i (A_{11} \tilde{x}_{1i} + A_{12} \tilde{x}_{2i}) + \sum_j \mu_j (A_{11} \tilde{\tilde{x}}_{1j} + A_{12} \tilde{\tilde{x}}_{2j}) \leq b_1 \\
\sum_i \lambda_i = 1 \\
x_0,\ \lambda_i,\ \mu_j \geq 0 \\
\max \left[c_0 x_0 + \sum_i \lambda_i (c_1 \tilde{x}_{1i} + c_2 \tilde{x}_{2i}) + \sum_j \mu_j (c_1 \tilde{\tilde{x}}_{1j} + c_2 \tilde{\tilde{x}}_{2j})\right]
\end{gathered} \tag{1.3}
$$

alakú programozási feladatot, ahol az $(\tilde{x}_{1i}, \tilde{x}_{2i})$-k illetve az $(\tilde{\tilde{x}}_{1j}, \tilde{\tilde{x}}_{2j})$-k az

$$
\mathscr{X} = \{(x_1, x_2) : A_{01} x_1 \leq b_0,\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 \leq b_2,\ x_1, x_2 \geq 0\}
$$

poliéder elemei illetve irányai, és hasonlóan, x_1-re vonatkozó feladat egy

$$
\begin{gathered}
p_0 A_{01} + \sum_i \sigma_i (\tilde{p}_{1i} A_{11} + \tilde{p}_{2i} A_{21}) + \sum_j \tau_j (\tilde{\tilde{p}}_{1j} A_{11} + \tilde{\tilde{p}}_{2j} A_{21}) \geq c_1 \\
\sum_i \sigma_i = 1 \\
p_0,\ \sigma_i,\ \tau_j \geq 0 \\
\min \left[p_0 b_0 + \sum_i \sigma_i (\tilde{p}_{1i} b_1 + \tilde{p}_{2i} b_2) + \sum_j \tau_j (\tilde{\tilde{p}}_{1j} A_{11} + \tilde{\tilde{p}}_{2j} A_{21})\right]
\end{gathered}
$$

alakú lineáris programozási feladat volt, ahol a $(\tilde{p}_{1i}, \tilde{p}_{2i})$-k illetve a $(\tilde{\tilde{p}}_{1j}, \tilde{\tilde{p}}_{2j})$-k

$$
\mathscr{P} = \{(p_1, p_2) : p_1 A_{10} \geq c_0,\ p_1 A_{12} + p_2 A_{22} \geq c_2,\ p_1, p_2 \geq 0\}
$$

poliéder elemei illetve irányai.

$\mathscr{X}_1$ illetve $\mathscr{P}_1$ korlátosságából (1.3)-ban illetve (1.4)-ben $\tilde{\tilde{x}}_{1j} = 0$ illetve $\tilde{\tilde{p}}_{1j} = 0$ és ugyanezen feltevésekből egy (1.3) illetve (1.4) feladatnak mindig van lehetséges megoldása. Az is egyszerűen belátható, hogy amennyiben egy (1.3) illetve (1.4) alakú feladat nem korlátos, akkor az (1.2) duális feladatnak illetve (1.1)-nak nincs lehetséges megoldása. Sőt ekkor már $\mathscr{P} = \emptyset$ illetve $\mathscr{X} = \emptyset$ és ezen állítások érvényességéhez nem szükséges $\mathscr{X}_1$ illetve $\mathscr{P}_1$ korlátossága.

A javasolt dekompozíciós eljárás egy iterációs lépésében először megoldunk egy (1.3) és egy (1.4) alakú feladatot.

A lépés második felében az előbbi feladatok $(\tilde{p}_1, \tilde{\pi}_0)$ illetve $(\tilde{x}_1, \tilde{\zeta}_0)$ megoldása alapján adódik az

$$
\begin{gathered}
A_{22} x_2 \leq b_2 - A_{21} \tilde{x}_1 \\
x_2 \geq 0 \\
\max\ (c_2 - \tilde{p}_1 A_{12})\, x_2
\end{gathered} \tag{1.5}
$$

lineáris programozási feladat. Legfeljebb végesszámú alkalommal fordulhat elő, hogy (1.5)-nek nincs lehetséges megoldása, vagy a feladat nem korlátos, mikoris az (1.4) feladatba egy alkalmas τ illetve az (1.3) feladatba egy alkalmas μ változót bevezetve a megfelelő feladat megoldása után új $\tilde{x}_1$ illetve $\tilde{p}_1$ adódik.

Ellenkező esetben, ha $\tilde{x}_2$ (1.5), $\tilde{p}_2$ pedig (1.5) duálisának optimális extremális megoldása, $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathcal{X}$ illetve $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \in \mathcal{P}$ és ezen elemeknek megfelelő λ illetve σ változókkal bővítjük az (1.3) illetve (1.4) feladatokat, melyek megoldása után adódik az új $\tilde{p}_1$ és $\tilde{x}_1$.

Ha az (1.1) feladatnak nincs optimális megoldása, az eljárás lépéseinek végesszámú végrehajtása után befejeződik. Ellenkező esetben vagy az eljárás végesszámú lépésben megoldja a feladatot, vagy az adódó p_1-re és x_1-re vonatkozó feladatok optimumértékeinek monoton nem csökkenő illetve monoton nem növekvő sorozata konvergál az (1.1) feladat optimumértékéhez. Ha egy p_1-re (x_1-re) vonatkozó feladat tartalmaz λ (σ) változót és a feladatnak van lehetséges megoldása, ennek alapján nyilvánvaló módon adódik az (1.1) [a duális (1.2)] feladat egy lehetséges megoldása.

[5]-ben megmutattuk továbbá, hogy ha az eljárás végtelen, végtelen sokszor változik $\tilde{x}_1$ is és $\tilde{p}_1$ is, valamint azt, hogy az eljárásra vonatkozó előbbi állítások akkor is érvényesek, ha a p_1-re (az x_1-re) vonatkozó feladatba csak akkor vezetjük be az $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ [a $(\tilde{p}_1\, \tilde{p}_2)$] meghatározta λ (σ) változót, ha

$$[\text{ha} \quad \begin{gathered} c_1\tilde{x}_1 + c_2\tilde{x}_2 > \tilde{p}_1(A_{11}\tilde{x}_1 + A_{12}\tilde{x}_2) + \tilde{\pi}_0 \\ \tilde{p}_1 b_1 + \tilde{p}_2 b_2 < (\tilde{p}_1 A_{11} + \tilde{p}_2 A_{21})\tilde{x}_1 + \tilde{\zeta}_0] \end{gathered}$$

azaz a bevezetendő új változó a meglevő feladat duálisának egy optimális megoldása alapján a célfüggvény javulását igéri.

Az $\mathcal{X}_1$-re és $\mathcal{P}_1$-re tett feltevés alapján az eddig elmondottakat korlátos esetnek nevezhetjük.

A továbbiakban először egyrészt az eljárás azon esetre történő kiterjesztésével foglalkozunk, mikor az $\mathcal{X}_1$-re és $\mathcal{P}_1$-re vonatkozó ezen feltevéseket elhagyjuk (általános eset), másrészt pedig azzal, ha csak az egyiket tartjuk meg (félig korlátos eset). Utóbbi külön vizsgálatát az indokolja, hogy gyakorlati alkalmazás szempontjából több-kevesebb joggal a szóbajövő legáltalánosabb esetnek tekinthető.

A befejező részben a szóbanforgó eljárások alkalmazásaként egy olyan dekompozíciós eljárást származtatunk, mikor egy lineáris programozási feladatot olyan részfeladatok megoldásain keresztül oldunk meg, mely feladatok mátrixai az eredeti feladatok mátrixának tetszőleges részei. Ezt a lehetőséget nevezzük teljes dekompozíciónak.

2. Az általános és félig korlátos eset

Tekintsük az eredeti (1.1)—(1.2) primál-duál lineáris programozási feladatpár helyett az

$$(2.1) \qquad \begin{gathered} e x_1 \leq \beta \\ A_{01}x_1 \leq b_0 \\ -e\zeta + A_{10}x_0 + A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \leq b_2 \\ \zeta, x_0, x_1, x_2 \geq 0 \\ \max(-\gamma\zeta + c_0 x_0 + c_1 x_1 + x_2 c_2) \end{gathered}$$

és

$$-p_1 e \geq -\gamma$$
$$p_1 A_{10} \geq c_0$$
$$\pi e + p_0 A_{01} + p_1 A_{11} + p_2 A_{21} \geq c_1$$
$$p_1 A_{12} + p_2 A_{22} \geq c_2 \tag{2.2}$$
$$\pi, p_0, p_1, p_2 \geq 0$$
$$\min\,(\pi\beta + p_0 b_0 + p_1 b_1 + p_2 b_2)$$

primál-duál lineáris programozási feladatpárt, ahol β és γ rögzített nem-negatív számok, az e-k pedig olyan alkalmas méretű vektorok, melyeknek minden komponense 1.

Az eredeti (1.1)—(1.2) és amost bevezetett (2.1)—(2.2) feladatpár kapcsolatát foglalják össze a következő egyszerű lemmák.

2.1. *lemma*: Ha az

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \geq b_2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

és a

$$p_1 A_{12} + p_2 A_{22} \geq c_2$$
$$p_1, p_2 \geq 0$$

feltételrendszereknek van lehetséges megoldása, akkor (2.1)-nek van olyan bázisa, mely optimális minden alkalmasan nagy (β, γ)-ra.

Bizonyítás:

Tekintve (2.1) egy tetszőleges bázisát és megvizsgálva a szóbanforgó bázis primál lehetséges voltának feltételeit, ezen feltételek teljesülnek, ha β egy zárt (esetleg üres) intervallumba esik. Ugyanígy adódik minden bázishoz γ-értékek egy olyan zárt (és esetleg ugyancsak üres) intervalluma, melybe eső γ-k esetén a bázis duál lehetséges.

Ha a szóbanforgó feltételrendszereknek van lehetséges megoldásuk, akkor (2.1) és (2.2) minden elég nagy (β, γ)-ra megoldható, tehát van olyan bázis, mely egy ilyen (β, γ) esetén egyszerre primál és duál lehetséges. Minthogy a szóbajövő bázisok száma véges, van olyan bázis, mely optimális minden alkalmasan nagy (β, γ)-ra.

(1.1) megoldásához nem szükséges egy rögzített (β, γ) esetén (2.1) optimális megoldását meghatározni.

Rögzítsünk a továbbiakhoz egy olyan bázist, melynek létezését a 2.1. lemma állítása biztosítja. A változók (2.1)-beli sorrendjét megtartva jelöljük az ehhez tartozó mátrixot B-vel és legyenek (ζ^*, x_1^*, x_2^*) és (π^*, p_1^*, p_2^*) a bázishoz tartozó — optimális — primál és duál bázismegoldások.

2.2. *lemma*. A 2.1. lemma feltételei mellett ζ^* és π^* mindegyike konstans, azaz nagyságuk független (β, γ)-tól

Bizonyítás:

Ha ζ bázis változó, akkor

$$(\zeta^*, \underline{x}_1^*, \underline{x}_2^*) = B^{-1}\,(\beta, b_1, b_2)$$

ahol az aláhúzások azt jelölik, hogy csak bázisváltozókra szorítkozunk. Innen

$$\zeta^* = \alpha\beta + (c_1, c_2)b'$$

adódii, ahol (α, b') a B^{-1}-nek első sorát jelöli. Abból, hogy minden elég nagy β-ra $\zeta^* \geq 0$ teljesül, $\alpha \geq 0$ következik.

Hasonlóan,

$$(\pi^*, \underline{p}_1^*, \underline{p}_2^*) = (-\gamma, \underline{c}_1, \underline{c}_2)\, B^{-1}$$

amiből

$$\pi^* = -\gamma\alpha + (\underline{c}_1, \underline{c}_2)\, b''$$

és $\alpha \leq 0$ következik. Így $\alpha = 0$, amivel az erre az esetre vonatkozó állítást igazoltuk.

Ha ζ nem bázisváltozó, akkor $\zeta^* = 0$ és $\pi^* = (c_1, c_2)\ (\alpha, b'')$, amivel a másik esetet is elintéztük.

2.3. *lemma.* Tegyük fel, hogy teljesülnek a (2.1) lemma feltételei. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített és (β, γ) olyan, hogy (2.1)-nek van optimális megoldása. Legyen $(\tilde{\zeta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ (2.1) egy olyan lehetséges megoldása, melyhez tartozó célfüggvényérték (2.1) optimumértékénél legfeljebb ε-nal kisebb. Akkor $\lim\limits_{(\beta,\gamma)\to\infty} \tilde{\zeta} = \zeta^*$. (A határértékképzés nyilván úgy értendő, hogy ∞-hez tartozó β-k és γ-k egy sorozatára, illetve az ezekhez tartozó (2.1) feladatok fenti tulajdonságú lehetséges megoldásaira szorítkozunk.)

Bizonyítás:

Induljunk ki az alábbi egyenlőségből

$$-\gamma\tilde{\zeta} + c_1\tilde{x}_1 + c_2\tilde{x}_2 = -\gamma\,\zeta^* + c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + \Sigma\pi_j^*\zeta_j$$

ahol az összegzés a bázisba nem tartozó j indexekre vonatkozik, π_j^*-a j-edik változóhoz tartozó, ezen bázisra vonatkozó relatív költség, $\tilde{\zeta}_j$ pedig $(\tilde{\zeta}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ megfelelő komponense. Minthogy $\pi_j^* \leq 0$ és $\tilde{\zeta}_j \geq 0$ minden j-re és feltételünk szerint $-\Sigma\pi_j^*\tilde{\zeta}_j \leq \varepsilon$, azért $-\pi_j^*\tilde{\zeta}_j \leq \varepsilon$ is fennáll minden nem bázisváltozóhoz tartozó j indexre.

Különböztessünk meg két esetet aszerint, hogy ζ bázisváltozó-e vagy sem. Az első esetben valamennyi π_j^* a γ-nak lineáris függvénye, azaz $\pi_j^* = \alpha_j\gamma + \alpha_j^*$ és $\pi_j^* \leq 0$-ból $\alpha_j \leq 0$ következik. $-\pi_j^*\tilde{\zeta}_j \leq \varepsilon$ alapján viszont adódik, hogy olyan esetben, mikor $\alpha_j < 0$ teljesül, $\tilde{\zeta}_j$ tetszőlegesen kicsiny lesz. Másrészt fennáll most a $\tilde{\zeta} = \zeta^* + \Sigma\alpha_j\tilde{\zeta}_j$ egyenlőség is. Minthogy $\tilde{\zeta}$ értékében csak olyan $\tilde{\zeta}_j$-knek van szerepük, melyekre $\alpha_j \neq 0$ és ezekre $\tilde{\zeta}_j$ tetszőlegesen kicsiny lesz, ezért ugyanez igaz $\tilde{\zeta}$ és ζ^* eltérésére is.

Ha ζ nem bázisváltozozó, akkor a változóhoz tartozó relatív költség $-\gamma-\alpha^*$ alakú és a $(\gamma + \alpha^*)\tilde{\zeta}' < \varepsilon$ egyenlőtlenségből adódik az állítás.

A $(\gamma + \alpha^*)\tilde{\zeta} < \varepsilon$ egyenlőtlenségből egyébként az is következik, hogy $\gamma\tilde{\zeta}'$ tetszőlegesen kevéssel nagyobb ε-nál. Egy megfelelő állítás az első esetben is érvényes akkor, ha $\zeta^* = 0$, azaz az (1.1) feladat megoldható. Ugyanis $\gamma\tilde{\zeta} = \Sigma\alpha_j\gamma\tilde{\zeta}_j$, az összeg egyes tagjai ε-nál legfeljebb $\alpha^*\tilde{\zeta}_j$-mal, azaz tetszőlegesen kevéssel nagyobbak és meghatározott számú tagot kell összegeznünk.

Hasonló állítás és megjegyzés érvényes a (1.2) és (2.2) duális feladatokkal kapcsolatban is.

Legyen most $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen rögzített szám. Legyen továbbá $0 < \beta_1 < < \beta_2 < \ldots$, $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots$, $\beta_n \to \infty$, $\gamma_n \to \infty$. Rögzített β_h és γ_h mellett alkalmazzuk a korlátos esetre vonatkozó eljárást a (2.1) feladat megoldására. Az 1.-beliek szerint az eljárás lépéseinek végesszámú alkalmazása után az alábbi három eset valamelyike adódik:

2.a (2.1) egy $(\zeta, x^*_{0h}, x^*_{1h}, x^*_{2h})$ megoldását és (2.2) egy $(\pi^*, p^*_{0h}, p^*_{1h}, p^*_{2h})$ megoldását kapjuk, melyekre $-\pi^*_h\beta_h + p^*_{0h}b_0 + p^*_{1h}b_1 + p^*_{2h}b_2 + \gamma_h\zeta^*_h - c_2x^*_{0h} - c_1x^*_{1h} - c_2x^*_{2h} < \varepsilon$.

2.b (2.1)-nek nincs lehetséges megoldása;

2.c (2.2)-nek nincs lehetséges megoldása.

Feltehető, hogy valahonnan kezdve mindig a 2.a eset áll fenn. Ugyanis, ha pl. (2.1)-nek valamilyen β_h-ra van lehetséges megoldása, akkor van lehetséges megoldása minden ennél nagyobb β_h esetén is, illetve ha pl. a 2.b eset végtelen sokszor fordulna elő, akkor az

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \leq b_2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

feltételrendszer nem oldható meg, mert ellenkező esetben alkalmas β_h-ra az

$$x_1 \leq \gamma_h$$
$$A_{21}x_2 + A_{22}x_2 \leq b_2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

feltételrendszernek is lenne megoldása. (Az 1. részben ezerint az eljárás tulajdonképpen a most felírt feltételrendszernek nem megoldható voltát jelzi 2. b esetén.)

1. *tétel*. (1.1)-nek akkor és csak akkor van lehetséges megoldása, ha $\lim\limits_{h\to\infty} \zeta^*_h = 0$,

(1.2)-nek akkor és csak akkor van lehetséges megoldása, ha $\lim\limits_{h\to\infty} \pi^*_h = 0$.

Bizonyítás:

Ha (1.1)-nek van lehetséges megoldása, akkor a 2.1 lemma alapján $\zeta^* = 0$. $\zeta^* = 0$ esetén nyilván van (1.1)-nek lehetséges megoldása. A 2.3 lemma szerint azonban $\lim\limits_{h\to\infty} \zeta^*_h = \zeta^*$. Ugyanígy adódik az (1.2)-re vonatkozó állítás is.

A továbbiakhoz szükségünk van még a következő tételre:

2. *tétel* [13]: Ha egy h-ra $\zeta^*_h = 0$ és $\pi^*_h = 0$ és az aktuális p_1-re és x_1-re vonatkozó feladatból a ζ illetve π változót elhagyva a megmaradó (1.3) és (1.4) feladatoknak van nem degenerált bázismegoldásuk, akkor a továbbiakban az eredeti eljárás szerint eljárva az adódó $\tilde{p}_1$-k és $\tilde{x}_1$-k egy-egy korlátos halmaz elemei.

Ebből következik, hogy amennyiben bárhonnan kezdve $\zeta^*_h = 0$ és $\pi^*_h = 0$, lényegében a korlátos feladatnál tárgyalt azon esetnél vagyunk, mikor a p_1-re és x_1-re vonatkozó feladatok optimumértékei konvergálnak (2.1) optimumértékéhez. Azért lényegében, mert még be kell vezetnünk a nemdegenerált bázismegoldások létezésére vonatkozó feltevést, amit nem tekintünk különösebb megszorításnak.

Tulajdonképpen az sem problematikus, hogy egy adott feladat vagy számológép esetén milyen határtól tekinthető ζ_h^* és π_h^* zérusnak. Ha ζ_h^* és π_h^* elég kicsiny, ami mindig bekövetkezik, ha (1.1)-nek van optimális megoldása, a ζ és π változókat elhagyjuk és az (1.3) és (1.4) feladatokat megoldhatónak tekintjük. Esetleg megváltoztatjuk b_1-t és c_1-t a kis ζ_h^* és π_h^*-nak és annak megfelelően, hogy nemdegenerált bázismegoldásokat kapjunk és az eredeti eljárásnak megfelelően folytatjuk tovább. Tulajdonképpen az eljárás folytatása is esetleges, hiszen a (2.3) lemma utáni megjegyzés szerint $\gamma_h\zeta_h^*$ és $\pi_h^*\beta_h$ mindegyike egyike kis ε esetén maga is kicsiny elég nagy h-ra. Azaz $(x_{0h}^*, x_{1h}^*, x_{2h}^*)$ és $(p_{0h}^*, p_{1h}^*, p_{2h}^*)$ egy majdnem lehetséges és majdnem optimális megoldása az (1.1)—(1.2) primál-duál lineáris programozási feladatpárnak.

Problematikus azonban a β_h és γ_h értékek hatékony megválasztása és változtatása. Azaz, hogy milyen β_h és γ_h értékek mellett oldjuk meg (1.2)-t és egy-egy rögzített β_h és γ_h mellett meddig optimalizáljuk (ε megválasztása). Most tűnik elő a korlátossági feltevések lényege. Ez nem az, hogy az eljárás konvergenciájának bizonyításakor $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{X}_1$ korlátossága folytán könnyen tudtunk az eljárás folyamán adódó $\hat{p}_1$-kből és $\tilde{x}_1$-kből konvergens részsorozatot kiválasztani, hanem az, hogy az (1.3) és (1.4) feladatok megoldhatók.

Részben az eddigieket közvetlenül felhasználva, részben pedig már alkalmazott gondolatmenetek átültetésével tárgyalható azon még hiányzó eset is, amikor az eljárás során elhagyjuk a ζ és π változók közül azt, amelyik először lesz zérus.

Legyen például valamilyen $\zeta_h^* = 0$. A most következők alkalmazhatók természetesen akkor is, ha $|\zeta_h^*|$ elég kicsiny, vagy a $(\zeta_h^*, x_{1h}^*, x_{2h}^*)$-t szolgáltató (2.1) feladat egy — közbülső — megoldásában a ζ változó abszolút értéke kicsi és a ζ változót a korábban tárgyalt módon elhagyjuk.

ζ elhagyása után egy

$$
\begin{aligned}
& e\,x_1 \leq \beta \\
& A_{01}x_1 \leq b_0 \\
& A_{10}x_0 + A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq b_1 \\
& A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \leq b_2 \\
& x_0, x_1, x_2 \geq 0 \\
& \max\,(c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2)
\end{aligned}
\tag{2.1'}
$$

alakú lineáris programozási feladat adódik, ahol is az (1.1) feladatnak van egy ismert lehetséges megoldása. A duális

$$
\begin{aligned}
& p_1A_{10} \geq c_0 \\
& \pi e + p_0A_{01} + p_1A_{11} + p_2A_{21} \geq c_1 \\
& p_1A_{21} + p_2A_{22} \geq c_2 \\
& \pi, p_0, p_1, p_2 \geq 0 \\
& \min\,(\pi\beta + p_1b_1 + p_2b_2)
\end{aligned}
\tag{2.2'}
$$

lineáris programozási feladatnak mindig van lehetséges megoldása.

Az 1.-beliek következményeként a korlátos esetre vonatkozó eljárást elég nagy β esetén úgy alkalmazva, hogy felhasználjuk a p_1-re vonatkozó feladat rendelkezésre álló lehetséges megoldását, véges-számú lépés után (2.1') és (2.2') olyan (x_{1h}^*, x_{2h}^*) illetve $(\pi_h^*, p_{1h}^*, p_{2h}^*)$ lehetséges megoldásai adódnak, melyekhez tartozó célfüggvényértékek abszolút eltérése legfeljebb ε. $\lim\limits_{h\to\infty} \pi^*$ most is létezik és megegyezik (2.1') azon bázisához tartozó duális bázismegoldás π komponensének értékével, mely (2.1') optimális bázisa minden elég nagy β esetén. (1.2)-nek akkor és csak akkor van lehetséges megoldása, ha $\lim\limits_{h\to\infty} \pi_h^* = 0$.

Ha tehát (1.1)-nek van optimális megoldása, a ζ változó elhagyása után adódó π_h^*-k tetszőlegesen kis pozitív számok lesznek — egyébként könnyen belátható, hogy monoton nemnövekvőek — és így (2.2′)-ből a π-változó a korábbiakhoz hasonlóan elhagyható. Mindenesetre, ha elfogadjuk azon [4]-beli megjegyzés érvényességét, mely szerint minden nagyméretű probléma elég egyedi ahhoz, hogy a modell alkotói meg tudjanak adni pl. egy $x_1 \leq \beta_1$ alakú feltételt, az általunk félig korlátosnak nevezett esethez jutunk. Ezen fejezet további részében tehát azzal az esettel foglalkozunk röviden, mikor az (1.1)—(1.2) feladatpárral kapcsolatban csak $\mathfrak{X}_1$ korlátosságát tesszük fel.

Nem lesz szükség a ζ változó és γ bevezetésére és ennek megfelelően γ változtatására, az eredeti eljárás némi módosításával ez az eset is kezelhető. A kiterjesztés — a korábbi esettel szemben — különösebb számítástechnikai problémát sem jelent az eredeti eljáráshoz képest.

Kissé pontatlanul fogalmazva, most az előbbi $\gamma = \infty$ -nek megfelelően a $\mathcal{S}$ poliéder olyan irányait is figyelembe vesszük az x_1-re vonatkozó feladatban, melyekre $p_1 \neq 0$.

Minthogy az x_1-re vonatkozó feladat feltevésünk folytán megoldható és ha a p_1-re vonatkozó feladat is az, akkor a 2. tétel alapján már elintézhető azon esethez jutunk, mikor (1.1)-nek és (1.2)-nek ismerjük egy-egy lehetséges megoldását, elegendő tehát azzal az esettel foglalkoznunk, ha az p_1-re vonatkozó feladatnak végig nincs lehetséges megoldása.

Most (1.5) helyett az

$$A_{22}x_2 \leq b_2 - A_{21}\tilde{x}_1$$

$$(2.3) \qquad x_2 \geq 0$$

$$\max\,(-\tilde{\tilde{p}}_1 A_{12} x_2)$$

lineáris programozási feladatot vizsgáljuk, ahol $\tilde{\tilde{p}}_1$-re teljesülnek a

$$\tilde{\tilde{p}}_1 A_{10} \geq 0$$

$$\tilde{\tilde{p}}_1(A_{11}\tilde{\tilde{x}}_{1i} + A_{12}\tilde{\tilde{x}}_{2i}) + \tilde{\tilde{\pi}} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

$$\tilde{\tilde{p}}_1 A_{12}\tilde{\tilde{x}}_{2j} \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

és

$$\tilde{\tilde{p}}_1 b_1 + \tilde{\tilde{\pi}} < 0$$

feltételek.

A korlátos esethez képest csak annyi az eltérés, hogy az x_1-re vonatkozó feladatot azon τ változóval bővítjük, melyet $\mathscr{P}(\tilde{\tilde{p}}_1, \tilde{\tilde{p}}_2)$ eleme határoz meg, ha (2.3)-nak van optimális megoldása és $\tilde{\tilde{p}}_2$ ekkor (2.3) duálisának egy extremális optimális megoldása.

Az adódó $\tilde{\tilde{p}}_1$-ket úgy normálva, hogy legnagyobb komponensük 1 legyen, belátható, hogy ha (1.1)-nek van lehetséges megoldása, az adódó p_1-re vonatkozó feladatok optimumértékei monoton nemnövekedve zérushoz tartanak. (A p_1-re bevezetett normálás azt jelenti, hogy a p_1-re vonatkozó feladathoz a

$$\sum_i \lambda_i (A_{11}\tilde{x}_{1i} + A_{12}\tilde{x}_{2i}) + \sum_j \mu_j A_{12}\tilde{\tilde{x}}_{2j} - I x_0 \leq b_1$$

$$\sum_i \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i, \mu_j, x_0 \geq 0$$

$$\max(-e x_0)$$

lineáris programozási feladat megoldásának segítségével, ahol I alkalmas méretű egységmátrix, keresünk megoldást.)

Ilymódon elég nagy h-ra a p_1-re vonatkozó feladatot megoldhatónak tekinthetjük és ettől kezdve már alkalmazható a korlátos esetre vonatkozó eljárás

3. Teljes dekompozíció

Az előzőek alkalmas felhasználásával egy olyan dekompozíciós eljárást nyerhetünk, melynek során egy lineáris programozási feladat megoldását olyan lineáris programozási feladatok megoldásán keresztül kapjuk meg, mely feladatok mátrixai a kiindulásul szolgáló feladat mátrixának tetszőleges (például tetszőlegesen kicsi) részei.

Legyen az

$$\begin{aligned} &Ax \leq b \\ (3.1)\qquad &x \geq 0 \\ &\max ex \end{aligned}$$

lineáris programozási feladatban

$$(3.2)\qquad A = \begin{bmatrix} A_{11} A_{12} \dots A_{1n} \\ A_{21} A_{22} \dots A_{2n} \\ \dots \\ A_{m1} A_{m2} \dots A_{mn} \end{bmatrix}$$

$$b = (b_1, b_2 \dots b_m)$$

$$c = (c_1, c_2 \dots c_n)$$

és

$$x = (x_1, x_2 \dots x_n).$$

(3.1) megoldásához

$$A_{ij} x \leq \tilde{y}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\max \tilde{q}_{ij} x_{ij}$$

alakú feladatok ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots n$) megoldásain keresztül jutunk el, ahol az $\tilde{y}_{ij}$-k és $\tilde{q}_{ij}$-k mindig alkalmasan megválasztott vektorok.

Az eljárás alapja az, hogy paramétereinek és változóinak előbbi partíciója mellett (3.1) nyilván ekvivalens az x_j, y_{ij} és x_{ij} változókra vonatkozó

$$\sum_j y_{ij} \leq b_i \ (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$x_j - x_{ij} = 0 \ (i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$$

$$-y_{ij} + A_{ij} x_{ij} \leq 0 \ (i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n) \tag{3.3}$$

$$x_j, x_{ij} \geq 0$$

$$\max \sum_j c_j x_j$$

lineáris programozási feladattal.

p_i, q_{ij} és p_{ij}-vel jelölve (3.3) első, második és harmadik feltételcsoportjának megfelelő duálváltozókat, (3.3) duálisa a

$$\sum_i q_{ij} \geq c_j \ (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$p_i - p_{ij} = \quad (j = 1, 2, \dots, n;\ i = 1, 2, \dots, m)$$

$$-q_{ij} + p_{ij} A_{ij} \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n) \tag{3.4}$$

$$p_i, p_{ij} \geq 0$$

$$\min \sum_i p_i b_i$$

lineáris programozási feladat. [(3.4) is olyan kapcsolatban van (3.1)

$$pA \geq c$$

$$p \geq 0$$

$$\min pb$$

duálisával, mint (3.3), a (3.1)-gyel.]

A (3.3)—(3.4) feladatpárt a következő séma szemlélteti.

$$\begin{array}{l|c|c|c|r}
 & c_1\ c_2 \ldots c_n & & & \\
\hline
p_1 & & \mathrm{I}\ \mathrm{I} \cdot \cdot \mathrm{I} & & h_1 \\
p_2 & & \qquad\qquad \mathrm{I}\ \mathrm{I} \cdot \cdot \mathrm{I} & & b_2 \\
\vdots & & & & \vdots \\
p_m & & & & b_m \\
\hline
q_{11} & \mathrm{I} & & -\mathrm{I} & \\
q_{12} & \mathrm{I} & & -\mathrm{I} & \\
\vdots & \ddots & & \ddots & \\
q_{1n} & \mathrm{I} & & -\mathrm{I} & \\
q_{21} & \mathrm{I} & & -\mathrm{I} & \\
q_{22} & \mathrm{I} & & -\mathrm{I} & \\
\vdots & \ddots & & \ddots & \\
q_{2n} & \mathrm{I} & & -\mathrm{I} & \\
\hline
p_{11} & & -\mathrm{I} & A_{11} & \\
p_{12} & & -\mathrm{I} & A_{12} & \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \\
p_{1n} & & -\mathrm{I} & A_{1n} & \\
p_{21} & & -\mathrm{I} & A_{21} & \\
p_{22} & & -\mathrm{I} & A_{22} & \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \\
p_{2n} & & -\mathrm{I} & A_{2n} & \\
\hline
 & x_1\ x_2 \ldots x_n & y_{11}\ y_{12} \ldots y_{1n}\ y_{21}\ y_{22} \ldots y_{2n} & x_{11}\ x_{12} \ldots x_{1n}\ x_{21}\ x_{11} \ldots x_{2n} &
\end{array}$$

(3.3) illetve a (3.3)—(3.4) feladatpár megoldására többféleképpen is alkalmazhatjuk a korábbi eljárások valamelyikét. Az ottani A_{22}-knek mindenképpen az előző séma jobb alsó részén szereplő A_{ij}-kből álló rész felel meg és ez már biztosítja, hogy a bevezetőben említett alakú részfeladatokhoz jussunk. A $\sum_j y_{ij} \leq b_i$, illetve $\sum_j q_{ij} \geq c_j$ feltételek egyszerű szerkezete is indokolttá teszi hogy az ezekben fellépő együtthatók egy 1. fejezetbeli A_{01}, illetve A_{10} mátrixnak feleljenek meg. Az 1. fejezetbeli korlátos esettel szemben a szóbanforgó feltételek nem határoznak meg korlátos poliédert. Ezért a 2. fejezet általános esetének megfelelően vagy bevezetünk β és γ paramétereket, vagy feltesszük, hogy az y_{ij}-kre vagy a q_{ij}-kre megadhatók olyan feltételek, melyek a (3.3) vagy (3.4) feladatnak az eredeti feladatok valamelyikével való ekvivalenciáját nem befolyásolják és az y_{ij}-k vagy q_{ij}-k egy korlátos poliéder elemei lesznek. (Ezen utóbbi esetekben így a korlátos vagy félig korlátos esetnek megfelelő esethez jutunk.)

Egy olyan lineáris programozási feladat esetén, ami egy szokásos erőforrás allokáló probléma matematikai modellje, általában bevezethetők az y_{ij}-kre és a q_{ij}-kre olyan (egyedi) alsó és felős korlátok, melyek a szóbanforgó ekvivalenciát megtartják. Ezért és az ennek következményeképpen adódó néhány egyszerűsödésért mi ezt a feltételezést vezetjük be a továbbiakhoz. De mégegyszer hangsúlyozni szeretnénk, hogy e feltevéstől függetlenül (3.3) felírása és valamelyik előző eljárás alkalmazása módot nyújt arra, hogy (3.1) megoldását olyan lineáris programozási feladatok megoldásán keresztül végezzük el, melyeknek együtthatómátrixai az A_{ij} mátrixok.

(A $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{X}_1$ halmazok korlátosságára vonatkozó feltevés közgazdasági alkalmazások szempontjából sem jelent általában különösebb megszorítást.)

Legyen pl. (1.1) egy olyan probléma matematikai modellje, amelyben x_1 központilag irányított tevékenységeket, x_2 egymással közvetlenül össze nem függő részegységekbeli tevékenységeket reprezentál — aminek kifejezéseképpen A_{22} blokkdiagonális szerkezetű — a valamennyi változót tartalmazó $A_{01}x_0 + A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq b_1$ feltételek valamilyen közös erőforrás kihasználásának vagy közös kibocsátási kötelezettségnek felelnek meg.

Ilyen esetben az $\mathcal{X}_1$ halmaz, azaz a központilag irányított tevékenységek nem üres és korlátos volta kézenfekvő. Az x_0 változókat a közös erőforrások bővítési lehetőségét kifejező változóknak gondolva, $\mathcal{P}_1$ korlátos és nemüres volta volta annak felel meg, hogy a központi erőforrások mindig bővíthetők a kívánt mértékben, illetve nincs olyan bővítés, amely ne járna ráfordítással.)

A továbbiakban a

$$By \leq b_0$$

egyenlőtlenségek, ahol $y = (y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{mn})$, szolgálnak a $\sum_j y_{ij} \leq b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ feltételek és az y_{ij}-kre vonatkozó alsó és felső korlátok összefoglalására; a

$$qC \geq c_0$$

egyenlőtlenségek pedig, ahol $q = (q_{11}, q_{12}, \ldots, q_{mn})$, a $\Sigma_i q_{ij} \geq c_j$ $(j = 1, 2, \ldots$n) feltételek és a q_{ij}-kre vonatkozó alsó és felső korlátok összefoglalására. Feltesszük végül, hogy e feltételrendszerek mindegyikének van megoldása.

A korlátos esethez képest eltérünk abban, hogy az ottani p_1-re és x_1-re vonatkozó feladatok helyett esetünkben duálisukkal foglalkozunk, azaz az $\tilde{y}_{ij}$-k és $\tilde{q}_{ij}$-k közvetlenül adódnak majd egy-egy lineáris programozási feadat megoldásából. Ennek oka, hogy a most bevezetett $By \leq b_0$ illetve $qC \geq c_0$ egyenlőtlenségek explicite megjelennek majd e lineáris programozási feladatokban és így e feladatok megoldására alkalmazható az általánosított felsőkorlátos technika [2] vagy annak duálisa [3]. Ezen megjegpzés nélkül eljárásunkat, mint számítástechnikai eszközt, esetleg figyelmen kívül is lehetne hagyni. (Valamivel pontosabban, ez attól függ, hogy b és c mely részeit kell ,,felbontanunk'', ami egy későbbi megjegyzésünk szerint tetszőleges lehet, de egy adott feladat esetén minden esetre annak szerkezetétől függ. Továbbá az is szerepet játszhat, hogy milyen becslésünk van egy induló felbontáshoz tartozó célfüggvényértékekre.) Az általánosított felsőkorlátos technika alkalmazhatóságát számítástechnikai szempontból az eljárás nagyon lényeges tulajdonságának tartjuk.

Az eljárás a következő:

3.1. Az y-ra vonatkozó, a ψ változó maximalizálását előíró feladat a

$$By \leq b_0$$

lineáris programozási feladat, $\tilde{y}$ legyen ennek tetszőleges lehetséges megoldása, a $\tilde{q}$-ra vonatkozó, a φ változó minimalizálását előíró feladat pedig a

$$qC \geq c_0$$

lineáris programozási feladat és legyen $\tilde{q}$ ennek tetszőleges megoldása. Legyen végül $\tilde{\psi} = \infty$ és $\tilde{\varphi} = -\infty$.

3.2. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} A_{ij} x_{ij} &\leq \tilde{y}_{ij} \\ x_{ij} &\geq 0 \qquad (3.5) \\ \max \tilde{q}_{ij} x_{ij}& \end{aligned}$$

lineáris programozási feladatokat ($i = 1, 2, \ldots m; j = 1, 2, \ldots n$). Ha ezen feladatok mindegyikének van optimális megoldása, folytassuk 3.3-tól.

Minden olyan (i, j)-re, melyre (3.5) nem korlátos, bővítsük a q-ra vonatkozó feladatot a

$$-q_{ij} \bar{\bar{x}}_{ij} \geq 0$$

feltétellel, ahol $\bar{\bar{x}}_{ij}$ olyan extremális eleme $\{x_{ij} : A_{ij} x_{ij} \leq 0,\ x_{ij} \geq 0\}$-nak, melyre $\tilde{q}_{ij} \bar{\bar{x}}_i < 0$.

Minden olyan (i, j)-re, melyre (3.5)-nek nincs lehetséges megoldása, bővítsük az y-ra vonatkozó feladatot

$$-\bar{\bar{p}}_{ij} y_{ij} \leq 0$$

feltétellel, ahol $\bar{\bar{p}}_{ij}$ olyan extremális eleme $\{p_{ij} |: p_{ij} A_{ij} \geq 0,\ p_{ij} \geq 0\}$-nak, melyre $\bar{\bar{p}}_{ij} \tilde{y}_{ij} < 0$.

Folytassuk 3.4-től.

3.3. Legyen $\tilde{x}_{ij}$ (3.5), $\tilde{p}_{ij}$ pedig (3.5) duálisának egy optimális megoldása ($i = 1, 2, \ldots m;\ j = 1, 2, \ldots n$).

Bővítsük a q-ra vonatkozó feladatot a

$$-\sum_{i,j} q_{ij} \tilde{x}_{ij} + \varphi \geq 0$$

feltétellel, az y-ra vonatkozó feladatot pedig a

$$-\sum_{i,j} \tilde{p}_{ij} y_{ij} + \psi \leq 0$$

feltétellel.

3.4. Oldjuk meg a q-ra és az y-ra vonatkozó feladatot.

Ha a q-ra vonatkozó feladatnak nincs lehetséges megoldása, az eljárás végetér; a duális (3.4) feladatnak és így (3.1) duálisának nincs lehetséges megoldása.

Ha az y-ra vonatkozó feladatnak nincs lehetséges megoldása, az eljárás végetér; a (3.3) feladatnak és így (3.1)-nak nincs lehetséges megoldása.

Egyébként legyen $(\tilde{q}, \tilde{\varphi})$ a q-ra vonatkozó feladat optimális megoldása vagy q egy tetszőleges lehetséges megoldása és $\tilde{\varphi} = -\infty$, ha a feladat még nem tartalmazza explicite a φ változót és legyen $(\tilde{y}, \tilde{\psi})$ az y-ra vonatkozó feladat optimális megoldása vagy $\tilde{y}$ egy tetszőleges lehetséges megoldása és $\tilde{\psi} = \infty$, ha a feladat még nem tartalmazza explicite a ψ változót.

Ha $\tilde{\psi} \geq \tilde{\varphi}$, az eljárás végetér. $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)$ optimális megoldása (3.2)-nek, ahol x_j^* az utoljára megoldott q-ra vonatkozó feladat $\sum_i q_{ij} \geq c_j$ feltételeinek megfelelő duális változók értékei a duális egy (tetszőlegesen rögzített) optimális megoldásában $(j = 1, 2, \ldots n)$.

Ha $\tilde{\varphi} < \tilde{\psi}$, folytassuk 3.2-től.

A következő tétel bizonyítását elhagyjuk, mivel az korábbi állítások ([5]) esetünkre vonatkozó specializálásai.

3. *tétel.* A 3.1—3.4 eljárás vagy végetér az egyes lépések végesszámú alkalmazása után, mikor is a 3.4-beli konklúziók helyesek, vagy az adódó $\tilde{\varphi}$-k monoton növekedően, a $\tilde{\psi}$-k pedig monoton csökkenően konvergálnak (3.1) optimumértékéhez.

Ha (3.1)-nek nincs optimális megoldása, a 3.1—3.4 eljárás végesszámú lépés után végetér.

Véges $\tilde{\varphi}$ $[\tilde{\psi}]$ érték esetén a megfelelő q-ra $[y$-ra$]$ vonatkozó feladat duálisa egy optimális megoldásában a $\sum_i q_{ij} \geq c_j$ $[\sum_j y_{ij} \leq b_i]$ feltételeknek megfelelő változók értéke (3.1) [(3.1) duálisa] olyan lehetséges megoldását adják, melyhez tartozó célfüggvényérték $\tilde{\varphi}$ $[\tilde{\psi}]$.

Ha az eljárás végtelen, valahonnan kezdve $\tilde{\varphi}$ és $\tilde{\psi}$ mindegyike véges és mind $\tilde{q}$, mind $\tilde{y}$ végtelen sokszor változik.

Valamennyi eddigi állítás igaz akkor is, ha 3.3-ban a q-ra vonatkozó feladatba csak $\sum_{i,j} q_{ij} \tilde{x}_{ij} > \tilde{\varphi}$ esetén, az y-ra vonatkozó feladatba pedig csak $\sum_{i,j} \tilde{p}_{ij} y_{ij} < \tilde{\psi}$ esetén vezetjük be a 3.3-beli megfelelő feltételt.

Csak a jelöléseket egyszerűsítendő foglalkoztunk az A mátrix előbbi (és a korábbi paraméterek és változók ennek megfelelő) partíciójával. Lévén például az

$$
\begin{gathered}
A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + A_{13} x_3 \leq b_1 \\
A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + A_{23} x_3 \leq b_2 \\
A_{31} x_1 + A_{32} x_2 + A_{33} x_3 \leq b_3 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\
\max (c_1 x_1 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)
\end{gathered}
$$

lineáris programozási feladat egyenértékű az

$$
\begin{gathered}
y_{21} + y_{22} \leq b_2 \\
y_{31} + y_{32} \leq b_3 \\
x_1 = x_{11} = x_{21} \\
x_2 = x_{12} = x_{22}
\end{gathered}
$$

$$x_3 = x_{13} = x_{23} = x_{23}$$
$$A_{11}x_{11} + A_{12}x_{12} + A_{13}x_{13} \leq b_1$$
$$-y_{31} + A_{31}x_{11} \leq 0$$
$$-y_{21} + A_{21}x_{21} + A_{22}x_{22} \leq 0$$
$$-y_{32} + A_{32}x_{22} + A_{33}x_{33} \leq 0$$
$$-y_{32} + A_{23}x_{23} \leq 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_{11}, x_{21}, \ldots \geq 0$$
$$\max (c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)$$

lineáris programozási feladattal, a korábbiakhoz hasonlóan fogalmazható meg egy olyan dekompozíciós eljárás, melynek részfeladatai az

$$A_{11}x_{11} + A_{12}x_{12} + A_{13}x_{13} \leq b_1$$
$$A_{31}x_{11} \leq \tilde{y}_{31}$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{13} \geq 0$$
$$\max (\tilde{q}_{11}x_{11} + \tilde{q}_{12}x_{12} + \tilde{q}_{13}x_{13}),$$

az

$$A_{21}x_{21} + A_{22}x_{22} \leq \tilde{y}_{21}$$
$$A_{32}x_{22} + A_{33}x_{33} \leq \tilde{y}_{32}$$
$$x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$$
$$\max (\tilde{q}_{21}x_{21} + \tilde{q}_{22}x_{22} + \tilde{q}_{33}x_{33})$$

és az

$$A_{23}x_{23} \leq \tilde{y}_{22}$$
$$x_{23} \geq 0$$
$$\max \tilde{q}_{23}x_{23}$$

lineáris programozási feladatok.

Legyen most (3.2)-ben $n = 1$, azaz tekintsük az

$$\begin{aligned} A_1x &\leq b_1 \\ A_2x &\leq b_2 \\ &\cdots \\ A_mx &\leq b_m \\ x &\geq 0 \\ \max\ & cx \end{aligned} \tag{3.6}$$

lineáris programozási feladatot. Ekkor alkalmazható a félig korlátos esetnek megfelelő eljárás, mivel most az $\mathcal{X} = \{x_1 : A_{01}x_1 \leq b_1,\ x_1 \geq 0\}$ halmaz szerepét egyetlen pont, $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ játssza. Sőt, belátható, hogy ebben az esetben az eljárás minden további feltétel bevezetése nélkül is véges.

IRODALOMJEGYZÉK

1. DANTZIG, G. B.: ,,Linear Programming and Extensions'', Princeton, 1963. University Press.
2. DANTZIG, G. B. and R. M. VAN SLYKE: ,,Generalized upper bounded techniques for linear programming''. Journal of Computer and System Sciencees, 1967. no. 1. pp. 213—226.
3. GRIGORIADIS, M. D.: ,,Dual generalized upper bounding techniques''. Management Science 1971. no. 17. pp. 269—285.
4. ORCHARD-HAYS, W.: ,,Practical problems in LP-decomposition'', Interdisciplinary Conference held in Cambridge, England, 1972. (sokszorosítva).
5. STAHL J.: ,,A kétszeresen összekapcsolt lineáris programozási feladatról'', Szigma, 1974. 7. köt. 1—2. szám.

AN LP-DECOMPOSITION METHOD

In a former paper [5] we have elaborated a decomposition procedure for the solution of the (1.1)—(1.2) primal-dual pair of LP problems. Then we assumed that the sets

$$\mathcal{X}_1 = \{ x_1 : A_{01} x_1 \leq b_0,\ x_1 \geq 0 \} \text{ and } \mathcal{P}_1 = \{ p_1 : p_1 A_{10} \geq c_0,\ p_1 \geq 0 \}$$

are bounded.

In the first part of the present paper we summarize and extend the results concerning this procedure. In the second part first the case is considered that is obtained by omitting the assumption of boundedness of stets $\mathcal{X}_1$ and $\mathcal{P}_1$. We show that applying the original procedure to appropriately chosen problems of type (2.1)—(2.2) the solution to the pair of problems (1.1)—(1.2) is obtained. Further in the second part the variant is investigated, that can be considered as the most general one from the viewpoint of practical applications, i.e. the case when at least one of $\mathcal{X}_1$ and $\mathcal{P}_1$ is bounded. In this case a slight modification on by of the original procedure is needed for the solution of the pair of problems (1.1)—(1.2). In the third part, as an application of the procedures in question, a decomposition method is presented in which the LP-problem is solved by means of subproblems, whose matrices are arbitary parts of the matrix of the original problem.

ОБ ОДНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЕ LP

В одной из предшествующих наших работ ([5]) мы разработали декомпозиционную процедуру для решения примально-дуальной пары задач LP (1.1.)—(1.2). При этом мы предполагали, что множества

$$\mathcal{X}_1 = \{ x_1 \colon A_{01}\, x_1 \leq b_0, x_1 \geq 0 \}$$

и

$$\mathcal{P}_1 = \{ p_1 \colon p_1\, A_{10} \geq C_0, p_1 \geq 0 \}$$

ограничены.

В первой части данной статьи мы обобщаем и дополняем результаты, относящиеся к этой процедуре. Во второй части мы рассматриваем случай, который возникает, когда мы опускаем условие ограниченности множеств $\mathcal{X}$ и $\mathcal{P}_1$. Мы показываем, что применяя первоначальную процедуру для решения соответствующим образом выбранных задач вида (2.1.)—(2.2.), мы и в этом случае получим решение пары задач (1.1.)—(1.2). Во второй части рассматривается также и та с точки зрения практических применений, пожалуй, наиболее общая возможность, когда по меньшей мере одно из x_1 и P_1 ограничено. В этом случае даже малейшее изменение первоначальной процедуры может быть использовано для решения пары задач (1.1)—(1.2) В третьей части в качестве применений вышеупомянутых процедур мы производим такую декомпозиционную процедуру, в которой задача LP решается с помощью исследования частных задач, матрицы которых являются произвольными частями матриц исходных задач.