FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

Major Iván

Jegyzetek Piero Sraffa könyvéhez („Áruk termelése áruk révén")*

A közgazdaságtan története és a modern gazdaságelmélet szempontjából is fontos művet — Piero Sraffa két és fél évtizedes munkájának összefoglalását — jelenteti meg a Közgazdasági- és Jogi Könyvkiadó.

Régi problémák új oldalainak feltárásával és új kérdések megfogalmazásával-megoldásával gazdagítja Sraffa az elméletet. Csak néhányat emelnék ki az izgalmas problémák közül, amelyekhez Sraffa segítségével juthatunk el:

1. Hogyan fejthető fel Ricardo értékelméletének logikai szövete?
2. Kidolgozható-e, és ha igen, milyen szempontok alapján a neoklasszikus elmélet *belső* kritikája?
3. Milyen a logikai viszony a ricardói, illetve egy ricardói alapelvektől nem idegen általánosabb értékelmélet és a marxi elmélet között?
4. Milyen is a „tőke természete"?

Ezek, és ehhez hasonló kérdések merültek fel a Sraffával foglalkozó irodalomban. A nyugat-európai tudósok elsősorban a sraffai gondolatok *elméleti* előzményeivel és következményeivel foglalkoznak (pl. a Cambridge-i iskola), de megfogalmazódott az az igény is, hogy Sraffa elméletét felhasználják a gazdasági tervezéshez.

Ez az írás arra vállalkozik, hogy néhány ponton szigorúan a könyv értelme szerint továbbgondolja P. Sraffa folytatható gondolatait. Ezen túl pedig igyekszik megvilágítani a sraffai terminológiát.

Maguk a gondolatok és a fogalmak e műben gyakran összecsengenek a jól ismert Marx—Leontief—Lange-féle „input-output szemléletű" modellek fogalmaival. A fő nehézséget épp ez a felszíni hasonlóság okozta. A könyvből — reméljük — világossá válik, hogy a közgazdaságtannak egy másfajta, új szemléletével állunk szemben.

A könyvet Gács Jánossal és Kovács J. Mátyással együtt fordítottuk. Gyakran használtunk a fordításban is — tehát a szerzőt hűen követve — utaló elnevezéseket, amelyek nem magyarázzák, csak jelölik a fogalmakat. Ez azért is fontosnak tűnt, mert előfordul, hogy létezik az utaló elnevezéshez közel eső fogalom, de az egészen más jelentéssel vonult be a szakirodalomba, mint amit a szövegben jelölhetne. Ezért inkább vállaltuk, hogy a nem maguktól értetődő fogalmak megnehezítsék a könyv olvasását, csak hogy a félreértést elkerüljük. Erre most mutatunk egy szemléletes példát. Sraffa gyakran használja a „self-replacing system" kifejezést. A marxi terminológiából pedig jól ismert az újratermelés fogalma. A kettő közötti hasonlóságot látszólag még szorosabbá

* A mű eredeti címe: Production of Commodities by Means of Commodities, Prelude to a Critique of Economic Theory. Cambridge, 1960. University Press. XII/98 lap.

teszi, hogy Sraffánál is elválik a többletet termelő „self replacing system" — amit mi önhelyreállító rendszernek fordítottunk — attól az esettől, amikor nem keletkezik többlet. Mégis vaskos hiba lett volna, ha az egyszerű és bővített újratermelés fogalmait használjuk. Nem pusztán azért, mert Marx az újratermelés alatt társadalmi újratermelést értett, tehát a társadalom osztályainak, intézményeinek, stb. újratermelését is, míg Sraffánál erről szó sem esik. A lényeges különbség már abban is fellelhető, hogy míg Marx feltételezi, hogy a termelés különféle területei között eleve létezik *naturális* egyensúly, tehát az értékbeni egyensúly létezésének nincs gazdasági akadálya, addig Sraffánál a gazdaság csak akkor juthat egyensúlyba, ha egyszerre kétoldalúan képes azt megtenni — naturálisan és értékben egyaránt.

A marxi rendszer viszont egy másik szempontból általánosabb. A termelési folyamatot dinamikusként kezeli (bár szorosan megszabott elméleti határok között), míg Sraffa a gazdaság egy tetszőleges állapotáról ad közgazdasági képet.

A műben igen gyakran el*n*fordulnak olyan megállapitások, verbálisan megfogalmazott matematikai tételek, melyek bizonyítatlanul, sőt sok esetben megmagyarázatlanul maradnak. Célszerűnek látszott elvégezni ezeket a bizonyításokat, mert éppen ezáltal vált nyilvánvalóvá, hogy miben áll a sraffai gondolatrendszer sajátossága.

Jelölések

Sraffa az egyes termékeket az „*a*", „*b*", ..., „*k*" kisbetűs indexekkel, a felhasznált, illetve előállított mennyiségeket A, B, ..., K nagybetűkkel jelöli. Így például az i termék esetében a termeléshez felhasznált termékmennyiségek rendre A_i, B_i, ..., K_i, a termelés eredménye pedig I.

P. Newman cikkében [1] egyénien nagyvonalú, de kényelmetlen jelölésmódnak tartja Sraffa szimbólum-rendszerét. Elvileg nincs akadálya, hogy Newman alapján a szokásosabb matrix-algebrai jelölésekre térjünk át, a következőképpen:

Legyen $A = A_1$, $B = A_2$, ..., $K = A_k$.

Nem korlátozza az érvelést, ha az A_i-k mindegyikét egységnyinek választjuk, tehát $A_i = 1$ minden i-re.

Ezek után

$$\begin{array}{llll} A_a = a_{11}, & B_a = a_{12}, & \ldots, & K_a = a_{1k} \\ A_b = a_{21}, & B_b = a_{22}, & \ldots, & K_b = a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_k = a_{k1}, & B_k = a_{k2}, & \ldots, & K_k = a_{kk}. \end{array}$$

Az átindexelés szabálya igen egyszerű: ha az *abc* betűit sorszámokkal látjuk el ($a = 1, b = 2, \ldots$), akkor az eredeti kisbetűs index sorszáma lesz a sorindex, míg a nagybetű sorszáma az oszlopindex.

Hasonlóan $p_a = p_1, p_b = p_2, \ldots, p_k = p_k$ az árak, $q_a = q_1, q_b = q_2, \ldots, q_k = q_k$ pedig a termelési szintek vektora. Most már használhatjuk a szokásos mátrix-algebrai felírásmódot tehát

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1k} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}, & a_{k2}, & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} \qquad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} \qquad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix}.$$

Meg kell azonban jegyezni, hogy az egyéni jelölésmód — azon a Sraffa által kimondott szándékon túl, hogy nem-matematikusok is könnyen kezelhessék — éppen arra utal, amiben Sraffa el akar különülni például a Walras—Cassel—Leontief-féle gondolatrendszertől. Maga is leírja az előszóban, később sokan mások be is bizonyították, hogy rendszere nem épül az állandó hozadék feltevésére.

Ezért tehát nem is élt olyan jelölésmóddal — az a_{ij} koefficiensek kiírásával —, ami ezt a gondolatot sugallná.

Önhelyreállító állapot az önfenntartó termelés esetén

Sraffa az önhelyreállítás állapotát a $\sum_i a_{ij} = A_i$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$ azonosságokkal jellemzi. Ez a feltevés magában foglalja a termelés és a fogyasztás teljes, naturálisan is meglevő globális *egyenlőségét*, de semmiképp sem jelenti a technikai együtthatók *változatlanságát*. Annyit köt ki csupán, hogy

1. *ugyanazokat* a termékeket és *ugyanolyan* mennyiségben termelik, mint a megelőző periódusban,

2. a termelési rendszer *egészében* felhasznált termékmennyiségek is változatlanok.

Hogy azonban az egyes termékfajták összmennyisége miképpen oszlik el az egyes iparágak között, arról semmit nem állít, vagyis megengedett a termékek megoszlásának változása.[1] Ez pedig azt jelenti, hogy az iparágak közül egyeseknek megnőhet, másoknak csökkenhet a produktivitása, tehát végbemehet technikai változás is. Hangsúlyozzuk, hogy nem növekedhet a produktivitás egyszerre minden iparágban, mert a változások csak az eredeti azonosságok korlátjain belül mehetnek végbe.

Nem mindig értelmezhető azonban világosan az iparágak produktivitásának változása. A produktivitás növekedésén (illetve „technikai fejlődésen") itt pusztán a technikai koefficiensek sajátos megváltozását érthetjük. Produktivitás-növekedésnek tekintünk olyan változást, amikor egy iparág kibocsátása változatlan marad, miközben legalább az egyik ráfordítási tényezője csökken. Az így felszabadult ráfordításnak azonban be kell lépnie egy másik eljárás termelési eszközei közé, hogy az eredeti azonosság fennmaradhasson. Ez pedig ronthatja, de javíthatja is az utóbbi eljárás produktivitását. Erről az általános

[1] Ezek a feltevések még mindig igen szigorúak. Ha ugyanis a valóságos lehetőségeket egy síkkal ábrázoljuk, akkor ezen belül az állandó technikai koefficiensek egy pontot határoznak meg, míg a Sraffa feltevésein alapuló struktúra egy egyenest eredményez. Mindkettő nulla-valószínűségű.

esetben semmit nem tudunk megállapítani. Annyi azonban kijelenthető, hogy amennyiben az egyik iparág produktivitása javult, akkor legalább egy másiké viszonylagosan romlott. Összefoglalóan: bár az a_{ik} „koefficiensek" nem változatlan nagyságok, változásukat mégis korlátok közé szorítja az önhelyreállítás kezdeti feltétele.

Ha egyes technikai koefficiensek zérussá válnak, akkor ez bizonyos esetekben felboríthatja az önhelyreállító állapotot. Erre vissza kell térni a későbbiekben.

Bázis és nem-bázis termékek

Sraffa definíciószerűen bázisterméknek nevezi azokat a termékeket, amelyek *közvetlenül* vagy *közvetve* minden termék termelésében résztvesznek. Minden más termék nem-bázis termék. Ez pedig nem más, mint a ricardói gabona-elv általánosítása.[2]

Ricardo, — értékelmélete kialakulásakor — azon a véleményen volt, hogy a gabona kulcsszerepet játszik az árak és a profitráta meghatározásában. Sraffa erre jó magyarázatot ad a Ricardo-művekhez írt előszavában. (L. David Ricardo: Works and Correspondence.) A gondolat kézenfekvő, mert a gabonatermesztés ágazatában ezek a gazdasági kategóriák naturális mennyiségek arányaiban illetve különbségeiben jelennek meg, és így az értékelés természetes arányokra épül. Ha ugyanis a gabonatermesztéshez csak gabonát használnak fel előlegként (vetőmag és a munkások fogyasztása), akkor a bérráta és a profitráta mértéknélküli arányokban, a profit tömege pedig gabonamértékben adott. (A profitráta dimenziója tulajdonképpen 1/idő, ha figyelembe vesszük, hogy azt a tőkeállomány után számítják. Ricardo ettől eltekintett, és Sraffánál sem jelenik meg explicite az „állomány" és az „áramlás" megkülönböztetése, igaz, egészen más okokból, mint Ricardónál.) Mindez azonban csak addig marad használható elv, amíg nem kell feloldanunk az egy-termékes tőke feltevését. Ez ugyanis azt jelenti, hogy végeredményben egyetlen áru játszik csak „bázis" szerepet, a többi nem lép vissza a termelés körébe, hanem a lakosság személyes fogyasztását alkotja. Pontosabban, az még megengedhető, hogy amennyiben a gabonatermesztésben az input csak gabonából áll, akkor minden egyes áru beléphet a *saját* termelésébe. Ha ugyanis az input-gabonamennyiség W_w, az output pedig W, akkor a profitráta

$$r = \frac{W - W_w}{W_w}.$$

Bármely más árura (pl. a k-ra):

$$(W_k p_w + K_k p_k)(1 + r) = K p_k$$

és ebből

$$\frac{p_k}{p_w} = \frac{K W_w - K_k W}{W W_k}.$$

[2]A j. termék bázistermék, ha $a_{ij} > 0$ mellett minden i,j-hez van olyan t, hogy $[A^t]_{ij} > 0$. Ha az A matrix csak bázistermékeket tartalmaz, akkor az A irreducibilis, azaz $0 < (I + A)^{k-1}$, ahol k az A rendje. Ez biztositja, hogy A pozítiv dominináns sajátértékéhez pozítiv sajátvektor tartozik.

Sőt megadható egy ennél általánosabb, és egyben a lehető legáltalánosabb, eset is:

$$\begin{bmatrix} W_w & 0 & 0 & \dots & 0 \\ W_a & A_a & 0 & \dots & 0 \\ W_b & A_b & B_b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_k & A_k & B_k & \dots & K_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_w \\ p_a \\ p_b \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix} (1+r) = \begin{bmatrix} Wp_w \\ Ap_a \\ Bp_b \\ \vdots \\ Kp_k \end{bmatrix}.$$

Tehát a termelési kapcsolatokban nincsenek körök, azaz ha az egyik termék belép egy másik termelésébe, akkor ez utóbbi már nem vehet részt az előbbi előállításában. A megfogalmazásból kitűnik, hogy a mátrix alsó háromszögében is lehetnek zéruselemek.

Hiába általánosítottuk tovább a rendszert, még mindig csak a gabona a bázistermék, míg a többi áru most sem lett azzá. Azt már nem állíthatjuk, hogy csak a gabona visel „termelő" funkciókat, de a többi termék termelő funkciói erősen korlátozottak. Ez pedig túl szigorú és irreális feltevés, ha meggondoljuk, hogy az előbb leírt rendszerben a gabona árának változásával a többi áru ára mindig együtt változik.

Sraffa megmutatja, hogy a „gabona-elv" még általánosabbá tehető, nevezetesen a gazdaságban legalább egy, de tetszőleges számú bázistermék létezhet.

Tekintsük először azt az esetet, amikor minden termék bázistermék. Mivel ebben az esetben az A egy irreducibilis mátrix, biztosan létezik egy és csakis egy $p > O$ árrendszer, amely visszaállítja a kiinduló állapotokat, tehát a termelési rendszerben az önhelyreállítás végbemehet. Fel kell azonban hívnunk a figyelmet arra, hogy a bázistermékek vektorai nem jelentenek egyben bázisvektorokat is a lineáris algebra értelmében. Sőt éppen hogy nem játszanak ilyen szerepet. A k egyenletből álló teljes rendszer biztosan összefüggő, hiszen ki kell elégítenie az önhelyreállítás azonosságait. Természetesen nem arról van szó, hogy az A matrix feltétlenül szinguláris. A „bázistermékek teljes rendszerét" formálisan az $(A; -1)$ mátrixszal tudnánk megadni, ahol az utolsó oszlop a kibocsátásnak felel meg.

Itt jegyezzük meg, hogy a rendszer szabadságfokának dualizmusában is kifejezésre jut az árak és a technikai összefüggések körkörös meghatározása. Az $Ap = p$ feladatban ugyanis valamely p_i tetszés szerint rögzíthető, és a többi ár ebben a standard-ben fejeződik majd ki. Legyen ez a rögzített ár p_1, nagyságát válasszuk 1-nek. Ugyanígy lehetőségünk van arra is, hogy $k-1$ egyenlet segítségével a k-adik együtthatóit kifejezzük, kivéve egyetlen együtthatót. Ha ugyanis az első egyenlet együtthatóit akarjuk a többi révén meghatározni, akkor a_{12}-t megkaphatjuk $A_2 - \sum_{j=2}^{k} a_{2j}, \dots, a_{1k}$-t pedig $A_k - \sum_{j=2}^{k} a_{kj}$ segítségével, de az a_{11}-hez még ismernünk kellene az A_1-t is, ami azonban az első egyenlethez tartozik. Így tehát teljesen szabadon választhatjuk meg az a_{11} vagy A_1 nagyságát, amiből a másik már egyértelműen adódik. (Pontosabban: A_1 nem lehet kisebb, mint $\sum_{j=2}^{k} a_{1j}$.)

Ha most visszatérünk az $Ap = p$ feladathoz, és felhasználjuk, hogy $p_a = 1$, akkor a következő összefüggéshez jutunk:

$$a_{11} + a'^*p = 1,$$

$$a + A'p' = p',$$

ahol

$$a'^* = (a_{12}, a_{13}, \ldots, q_{1k}),$$

$$a = (a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{k1})^*,$$

$$A' = \text{az } A \text{ fennmaradó része},$$

$$p' = (p_2, p_3, \ldots, p_k)^*.$$

A Sraffa által is használt eljárás (az egyik ár rögzítésével a feladat átalakítása egyenletrendszerré) a bázistermékek rendszerének egy igen mély tulajdonságára mutat rá. Az A eleget tesz a nem-negativitási követelményeknek is, és így az 1 maximális sajátértékéhez tartozó árvektor a rendszer megoldása. Világos, hogy itt az $(I - A)$-nak szingulárisnak kell lennie. Ha azonban az egyik árat rögzítjük, akkor a maradék rendszer *lineárisan függetlenné* válik, tehát a rendszer egy lineáris algebrai értelemben vett bázisához jutunk. Ezt így láthatjuk be: Ha az $(I - A')$ is szinguláris lenne, akkor létezne olyan $d \neq O$, amelyre $(I - A')d = O$, és így az 1 az A'-nak is sajátértéke lenne. Feltehetjük, hogy a d legnagyobb abszolút értékű eleme egyben pozitív is. (Az előjelek mindig megváltoztathatók.) Legyen ez $d_{\max}$! Akkor erre a sajátértékegyenletet felírva $d_{\max} = \sum_i a'_{ij}d_i$. Ha figyelembe vesszük, hogy $\sum_i a_{ij} < 1$, akkor $d_{\max} = \sum_i a_{ij}d_i \leq \sum_i a_{ij}d_{\max} < d_{\max}$, ami ellentmondás. Azt kaptuk tehát, hogy az $(I - A')$ nem lehet szinguláris.

P. Newman ezért azt javasolja, hogy tekintsük a sraffai rendszert olyannak, amelyben csak bázistermékek szerepelnek. Véleménye szerint az úgyis csak a termelési területek aggregáltsági fokától függ, hogy mi számít bázis- illetve nem-bázis terméknek. Ha a dolgot pusztán a matematikai kezelhetőség oldaláról nézzük, Newman-nek igaza van. Két szempont szól mégis a javaslata ellen:

1. Léteznek a nem-bázis termékeket tartalmazó rendszernek is olyan speciális esetei, amikor szintén található megfelelő árrendszer. Igaz ugyan, hogy a matematikus szempontjából a speciális esetek legalább annyira elhanyagolhatók, mint a 0 valószínűségű események, de a közgazdaságtanban igen gyakran épp a speciális esetek adnak lehetőséget egy rendszer jellemzésére. Erre Sraffánál is látunk példát.

2. Gazdaságilag valószínűleg a nem-bázis közé sorolhatók olyan tevékenységek, mint például a hadiipar, ami azonban igen jelentős szerepet játszhat a termelés alakulásában.

Éppen ezért most szemügyre vesszük, hogyan befolyásolja a termelési kapcsolatokat a nem-bázis termékek jelenléte. Először itt is az önfenntartó termelésről beszélünk. A nem-bázis termékek felbukkanása a rendszer inputmátrixát reducibilissé teszi, vagyis

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix} \quad \text{ahol a} \quad \begin{pmatrix} O \\ A_3 \end{pmatrix}$$

blokk a nem-bázis termékek alrendszere. A nem-bázis termékek három tiszta típusa az A_3 szubmátrix különböző alakjaival jellemezhető.

A sraffai felsorolásnak megfelelően

I. $A = O$,
II. $A_2 = I$,
III. A_3 olyan nem-negatív mátrix, melynek maximális eleme is kisebb, mint 1.

Általában nem állíthatjuk, hogy egy ilyen reducibilis mátrix kizárja a közgazdaságilag is lehetséges ármegoldás létezését. Ez csak akkor van biztosan így, ha $A_3 = I$, vagy ha A_3-ban legalább egy egységvektor található. (L. P. Newman már említett cikkét!) Ekkor a rendszert be kell sorolnunk azok közé, melyeket Sraffa működésképtelennek nevezett.

Önhelyreállító állapot többlet esetén

Az önhelyreállítás minimális feltétele most az alábbi alakot ölti: $\sum_j a_{lj} \leq \leq A_1, \ldots, \sum_j a_{kj} \leq A_k$, de legalább egy termék esetében szigorú egyenlőtlenség teljesül. Mivel azonban az áraknak most nem csupán az a funkciójuk, hogy visszaállítsák a rendszer kiinduló állapotát, hanem egyúttal minden iparágban arányos többletet is realizálniuk kell, az önhelyreállítás nem is értelmezhető a bázis- és nem-bázis termékek nélkül. (A továbbiakban gyakran hivatkozunk majd Gantmacher könyvére [2].)

Kiinduló feladatunk most a következő alakban írható: $(1 + r)Ap = p$, ahol az új tényező, r, a profitráta. Ha A csak bázistermékekből épül fel, akkor biztosan létezik pozitív árrendszer, amely az önhelyreállítást megvalósítja. Ekkor ugyanis az

$$\left(A - \frac{1}{1 + r} I\right) p = O$$

sajátérték-feladatban a Froebenius—Perron tétel szerint a pozitív domináns sajátértékhez $p > O$ tartozik.

Ha azonban A nem-bázis termékeket is tartalmaz, akkor a legáltalánosabb eset, amelyben még $p > O$ létezik, a következő (lásd [2], 340. o.):

Legyen az A normálformája

$$\begin{pmatrix} A_1 & O & O \ldots\ldots & O \\ O & A_2 & O \ldots\ldots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & \ldots A_g \ldots & O \\ A_{g+1,1} & \ldots\ldots & A_{g+1} \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \ldots\ldots\ldots & A_s \end{pmatrix}$$

Az A domináns sajátértékéhez, λ-hoz akkor és csak akkor tartozik pozitív sajátvektor, ha az A normálformájában

(1) az $A_1, A_2, \ldots, A_g$ $(g \leq s)$ spektrál-sugarai is mind λ-val egyenlők, és
(2) az $A_{g+1}, \ldots, A_s$ mátrixok spektrál-sugarai mind kisebbek 1-nél.

Joan Robinson mutatott rá a sraffai elmélet egy lényeges vonására (lásd [3], 7—13. o.), ami az általános profitráta feltevéséből adódik. Nevezetesen: amennyiben az egységes profitráta és bérráta létezik, egy szeparált alrendszerekből álló gazdaságban is kialakul az egyértelmű és összefüggő árrendszer. Vagyis a nem-bázis termékek nagy csoportjaira széteső gazdaság is képes az önhelyreállításra.

Gantmacher ennél általánosabban mondja ki a tételt: Az $A > O$ mátrix pozitív domináns sajátértékéhez akkor és csak akkor tartozik pozitív jobb- és baloldali sajátvektor, ha az A kvázi-diagonális alakra hozható, ahol $A_1, A_2, \ldots, A_n$ az A diagonális irreducibilis blokkjai és maximális sajátértékük megegyezik az A maximális sajátértékével.

J. Robinson a tételnek csak az egyik részét fogalmazta meg. Ezt a speciális esetet két elkülönült alrendszerre mutatjuk be.

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$

és A maximális sajátértéke: $c = \dfrac{1}{1+r}$.

Be kell látnunk, hogy az $Ap = c \cdot p$ fennállása esetén $p > O$. Mivel az A irreducibilis blokkokra esik szét (A_1 és A_2), ezért elegendő azt bizonyítani, hogy az A pozitív domináns sajátértéke egyúttal domináns sajátértéke az A_1 és A_2-nek is. Ez viszont közvetlenül következik abból, hogy az $Ap = c \cdot p$ ekvivalens az $A_i p_i = cp_i$-vel, ahol az $i = 1, 2$.

Joan Robinson még egy tételt állít a profitrátával kapcsolatban: „. . .Véleményem szerint Sraffa ezzel egy nagyon jelentős tényt hangsúlyoz, mint tudományos, mind politikai értelemben: egy piaci gazdaságban vagy tendencia létezik a termelés különböző területein a bér- és a profitráta egységesülésére, vagy az árakat a kereslet-kínálat szabályozza, de a kettő nem állhat fenn egyszerre" ([3], 12. o.).

Most megvizsgáljuk, hogy tényleg minden esetben összeférhetetlenek-e a technikai egyenletek a keresleti függvényekkel. Igaz ugyan, hogy ezzel már (mint az előzőek során is többször) átnyúlunk az árak területére, de a gondolatmenet még mindig az önhelyreállítás és az input-mátrix szerkezete körül mozog. Az nyilvánvaló, hogy bármi módon is határozódjanak meg az árak, az önhelyreállítás feltétele miatt fenn kell állnia az

$$Ap \leq p \text{ és az } 1^*A \leq 1^* \text{ egyenlőtlenségeknek.}$$

Ha az m iparág többlettermékét s_m-mel jelöljük, akkor a keresleti egyenletek által meghatározott árak mellet $\sum_f a_{mf} p_f + s_m p_m = p_m$. Mivel azonban $s_m = 1 - \sum_f a_{jm}$, az előbbi így írható: $\sum_f a_{mf} p_f = p_m \sum_j a_{jm}$. Fennáll továbbá, hogy

$$(1 + r_m) \sum_f a_{mf} p_f = p_m$$

és így

$$1 + r_m = \frac{1}{\sum_j a_{jm}} \text{ és } r_m = \frac{a_m}{\sum_j a_{jm}}.$$

Látható, hogy a keresleti egyenletek mellett az egységes profitráta nem feltétlenül létezik. Van azonban egy érdekes speciális eset: ha az A-nak van olyan sajátértéke, amely mellett (legyen ez a sajátérték c) $1^*A = c \cdot 1^*$, akkor

i) ez egyben A maximális sajátértéke,

ii) $1 > c > 0$ teljesül,

iii) az eddigiekből is következően tartozik hozzá nem-negatív jobboldali sajátvektor ($p \geq O$).

i)-hez: Mivel $1^*A \leq 1^*$, ezért a maximális sajátérték

$$c = \min_i \sum_f a_{fi} = \frac{1^*A1}{1^*1}.$$

Az átlag tulajdonságai miatt ez azt jelenti, hogy $\sum_f a_{fi}$ minden i-re azonos.

ii)-höz: Mivel $A \neq O$, ezért $1^*A > O$, és így $c > 0$. Másrészt, mivel $c = \min_i \sum_f a_{fi}$ és a gazdaságban legalább egy ágazat (esetünkben minden ágazat) többletet termel, ezért $c > 1$.

iii)-hoz: Mivel A nem-negatív, irreducibilis mátrix, Gantmacher könyvének egyik tétele értelmében maximális sajátértékéhez pozitív sajátvektor tartozik, tehát az $Ap = c \cdot p$ egyenlet $p > O$ mellett áll fenn. Legyen $c = 1/(1 + r)$. Ebből $(1 + r)Ap = p$, és mivel $1 > c > 0$, ezért $r > 0$.

Azt a meglepő eredményt kaptuk, hogy amennyiben a bázistermékek rendszere mindenoldalúan arányos, akkor — az önhelyreállítás állapotát feltételezve — a profitráta *bármilyen árrendszer* mellett egységes az egész gazdaságra és egyben maximális is.

A munka mint explicit termelési tényező

Feltűnhet a hasonlóság a marxi ,,egyszerű-bonyolult munka'' és a sraffai ,,azonos minőségű összmunka'' között. Világosan kell azonban látnunk, hogy Sraffa művében a munka ugyanolyan önálló tényező, mint a tőke, tehát a feltételezett ,,azonos minőség'' ugyanúgy megköveteli a különböző munkafajták értékeinek meghatározását, mint ahogy a termelési eszközök összértékéről is csak az egyes termékek értékének ismeretében beszélhetünk. Erre azonban meg is van a lehetőség. Ha ugyanis a gazdaságot most úgy tekintjük, mint egy tevékenységeket reprodukáló rendszert, ahol az i tevékenységfajta l_i mennyiségének reprodukálásához az elsőből l_{i1}, a másodikból l_{i2}, stb., a k-ból l_{ik} szükséges, akkor az i tevékenység értékének meghatározására szolgáló egyenlet a következő:

$$l_{i1}v_1 + l_{i2}v_2 + \ldots + l_{ik}v_k = l_iv_i.$$

És így az egész rendszer az

$$Lv = v$$

alakot nyeri.

Általánosabbá és egyben reálisabbá is tehetjük a dolgot, ha a gazdaságot most *termékekből* és *tevékenységekből* álló, egymásra ható két rendszerként tekintjük, ahol az áruk termelésében munkát is felhasználnak, míg a munka reprodukciójában a tevékenységek mellett különböző áruk vesznek részt. Azaz:

$$\left[(1+r)\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}L_1\\L_2\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}p\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\v\end{pmatrix},$$

ahol

A_1: az áruk termelésében résztvevő áruk mátrixa,
A_2: a tevékenységek helyreállításában résztvevő áruk mátrixa,
L_1: az áruk,
L_2: a tevékenységek input-mátrixa,
w: bérráta.

Feltesszük, hogy (mint Sraffánál):

$$1^*\begin{pmatrix}L_1\\L_2\end{pmatrix}v=1.$$

A v-ben található „munkaértékek" az egyes munkafajták minőségi arányait fejezik ki. Az Lv viszont már egy homogén munkamennyiség. Mekkora az értéke? Sraffa nem törekszik ennek meghatározására. Amit ő *bér*nek (w) nevez, az a munka (értékben kifejezett) részesedése a nettó termékből, tehát a profitráta analógiájára *bérrátának* nevezhetjük el.

A többtermékes iparágakról

P. Newman a már említett cikkében csak az egytermékes iparágakkal foglalkozik, mert vélyeménye szerint az ott elmondottakból a könyv többi része már levezethető. Sajnos nem ilyen egyszerű a helyzet. Ha ugyanis az egyes *termelési eljárások* többféle terméket is előállítanak, akkor az önhelyreállítás képessége nem csupán a termelési eszközként felhasznált, hanem az áruként megtermelt termékektől is függ. Ez pedig olyan új és fontos kérdéshez vezet el, mint a „reswitching"-probléma, ami a „tőke természetének" feltárásához és a neoklasszikus elmélet kritikájához is alapvetően járul hozzá.

A feladatot most így fogalmazhatjuk meg általánosan:

$$(1+r)Ap+wl=Bp,$$

ahol az új tényező, B, a kibocsátott termékek mátrixa.

Ennek a feladatnak a megoldhatósága még nem teljesen tisztázott kérdés. A problémát az esetleges negatív koefficiensek okozzák az $[(1+r)A-B]$ mátrixban (lásd [4], 306—315. o.).

IRODALOM

1. Newman, P.: Production of Commodities by Means of Commodities. Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik. 98. évf. 1962. május.
2. Gantmacher: Teorija matric. Moszkva, 1966.
3. Robinson, J.: Collected Economic Papers. Vol. 3. Oxford, 1965. Basil Blackwell.
4. Gale, D.: The Theory of Linear Economic Models. London—New-York, 1960. McGraw-Hill.