SZÉP JENŐ—HEGEDŰS MIKLÓS

Egyensúlyi rendszerek II.

2.1. *A lánc és bejárhatósági tartomány fogalmának általánosítása**

Legyen $1 \leq r \leq n$ és legyen $x,\ y \in \sum$. Ha az x és y legfeljebb r számú komponensben különbözik egymástól, akkor azt mondjuk, hogy az *x és az y legalább n—r-ed rendben összehasonlítható*. Ha a különböző kompoensek indexei rendre $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_r$ akkor azt a továbbiakban az

$$x \overset{(i_1, \ldots, i_r)}{\frown} y$$

módon jelöljük. (Világos, hogy egy vektor önmagával akármilyen rendben összehasonlítható, valamint a reláció megfordítható, de nem tranzitív.)

Ha $$x \overset{(i_1, \ldots, i_r)}{\frown} \text{ és } y_{i_j} \in \Phi_{i_j}(x) \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

akkor az y-t az x-ből *r-ed rendben elérhetőnek nevezzük* és az

$$x \xrightarrow{(i_1, \ldots, i_r)} y$$

szimbólummal jelöljük.

Világos, hogy a reláció nem megfordítható és nem tranzitív, továbbá, ha $x \in L$ és $x \xrightarrow{(i_1, \ldots, i_r)} y$, akkor az $y \in L$ következik.

Legyen adott a $\sum$ elemeinek egy

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

véges vagy végtelen sorozata. Az $\{x_n\}$ sorozatot *r-ed rendű láncnak* nevezzük, ha a sorozat bármelyik tagja az előtte levőből r-ed rendben elérhető. A sorozat jelölésére ebben az esetben az

$$\mathfrak{L}^{(r)} = \{x_n\}$$

szimbólumot használjuk.

Ha y tagja egy, az x-ből kiinduló $\mathfrak{L}^{(r)}$ láncnak, akkor azt mondjuk, hogy *az y az x-ből r-ed rendű lánccal elérhető*, és ezt a tényt az

$$x \xrightarrow{\mathfrak{L}^{(r)}} y$$

módon jelöljük.

Világos, hogy a bevezetett reláció nem megfordítható, de tranzitív, továbbá, ha $x \in L$ és $x \xrightarrow{\mathfrak{L}^{(r)}} y$, akkor $y \in L$.

* A cikk első részét 1973 évi 4. számunkban közöltük.

Ezek után rátérünk a monotonitás fogalmának általánosítására. Legyen $x, y \in \Sigma$ és $x \xrightarrow{(i_1 i_2, \ldots, i_r)} y$. Ha

$$\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(x) - \sum_{j=1}^{r} K_{i_j}(x, y) \leq \sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(y) - \sum_{j=1}^{r} C_{i_j}(x, y),$$

akkor azt mondjuk, hogy *y az x-nek $(i_1, \ldots, i_r)$-ben egy javítása.* Ha pedig

$$\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(x) - \sum_{j=1}^{r} K_{i_j}(x, y) < \sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(y) - \sum_{j=1}^{r} C_{i_j}(x, y),$$

akkor az y-*t az* x *egy szigorú javításának nevezzük* $(i_1, \ldots, i_r)$-*ben.*

Ezeket a tényeket a továbbiakban az

$$x \overset{(i_1, \ldots, i_r)}{\leq} y$$

és az

$$x \overset{(i_1, \ldots, i_r)}{<} y$$

módon jelöljük.

Legyen az $\{x_n\}$ a $\sum$ elemeinek egy r-ed rendű lánca. Ha a lánc minden tagja az előtte levőnek (a megfelelő indexekben) javítása ill. szigorú javítása, akkor a láncot *monotonnak* ill. *szigorúan monotonnak* nevezzük.

Egy $x \in \sum$ pontra $\tau_{\leq}^{(r)}(x)$ jelölje az x-ből r-ed rendű monoton lánccal elérhető elemek összességét. Hasonlóan $\tau_{<}^{(r)}(x)$ jelölje az x-ből szigorúan monoton r-ed rendű lánccal elérhető elemek összességét. A $\tau_{\leq}^{(r)}(x)$-et az *x r-ed rendű bejárhatósági*, a $\tau_{<}^{(r)}(x)$-et az *x r-ed rendű szigorú bejárhatósági tartományának* nevezzük.

A $\tau_{\leq}^{(r)}(x)$ és a $\tau_{<}^{(r)}(x)$ bejárhatósági tartományokat v a l ó d i-aknak nevezzük, ha a $\sum$ valódi részhalmazai. A korábbiak szerint, ha $x \in L$, akkor

$$\tau_{\leq}^{(r)}(x), \ \tau_{<}^{(r)}(x) \subset L.$$

Továbbá minden $x \in \sum$-ra $\tau_{<}^{(r)}(x) \subset \tau_{\leq}^{(r)}(x)$, valamint ha $y \in \tau_{\leq}^{(r)}(x)$, akkor $\tau_{\leq}^{(r)}(y) \subset$

$\subset \tau_{\leq}^{(r)}(x)$, hasonlóan ha $z \in \tau_{<}^{(r)}(x)$, akkor $\tau_{<}^{(r)}(z) \subset \tau_{<}^{(r)}(x)$.

2.2 *Az egyensúlypont, stabilitási halmaz, egyensúlyhalmaz fogalmának általánosítása*

A korábbiak segítségével megfogalmazhatjuk a játékelméletből ismert (Nash-féle) egyensúlypont fogalmának általánosítását.

Egy $x^{*(r)} \in L$ pontot az S rendszer r-ed rendű *egyensúly*pontjának nevezzük, ha a szigorú bejárhatósági tartománya az üres halmaz.

Ez tehát azt jelenti, hogy bármelyik $x^{*(r)} \in L$ pont az S rendszer egy r-ed rendű egyensúlypontja, ha

$$\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(x^{*(r)}) - \sum_{j=1}^{r} K_{i_j}(x^{*(r)}, y) \geq \sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(y) - \sum_{j=1}^{r} C_{i_j}(x^{*(r)}),$$

bármilyen $i_1, \ldots, i_r$ index r-esre miközben $y_{i_j} \in \Phi_{i_j}(x^{*(r)})$, $j = 1, \ldots, r$.

Világos, hogy az $r = 1$ esetben a játékelméletből ismert egyensúlypontot kapjuk vissza.

A stabilitási halmaz fogalmát is hasonlóan általánosíthatjuk. Egy $H_{\leq}^{(r)}$ halmazt az S rendszer egy r-edrendű *stabilitási halmazának* nevezzük, ha minden $x \in H_{\leq}^{(r)}$-ra

$$[\tau_{\leq}^{(r)}(x)] = H_{\leq}^{(r)},$$

továbbá egy $H_{<}^{(r)}$ halmazt az S rendszer *r-ed rendű szigorú* stabilitási halmazának nevezünk, ha minden $x \in H^{(r)}$-re

$$[\tau_{<}^{(r)}(x)] = H_{<}^{(r)}.$$

Végül általánosítjuk az egyensúlyhalmaz fogalmát is. Egy $H_{\leq}^{*(r)} \subset L$ halmazt az S rendszer egy *r-ed rendű egyensúlyhalmazának* nevezzük, ha minden $x \in$ $\in H^{*(r)}$-re

$$\tau_{\leq}^{(r)}(x) = H_{\leq}^{*(r)}.$$

Ha egy $H_{<}^{*(r)} \subset L$ halmaz esetén minden $x \in H_{<}^{*(r)}$-re

$$\tau_{<}^{(r)}(x) = H_{<}^{*(r)},$$

akkor a $H^{*(r)}$ halmazt az S rendszer egy *szigorú egyensúlyhalmazának* nevezzük.

A $H_{\leq}^{(r)}$, $H_{<}^{(r)}$, $H_{\leq}^{*(r)}$, $H_{<}^{*(r)}$ halmazokat *valódi*-nak nevezzük, ha a $\sum$ ill. az L valódi részhalmazai.

A definíciókból következnek, hogy ha $x^{*(r_1)}$ és $x^{*(r_2)}$ az S rendszer egyensúlypontjai és $r_1 \leq r_2$, akkor $x^{*(r_2)}$ az S-nek egyben egy r_1-ed rendű egyensúlypontja is, és ugyanezt elmondhatjuk a stabilitási, valamint az egyensúlyhalmazokról is.

Érvényes tehát a következő

5. *T É T E L*

Ha $H_{\leq}^{(r_1)}$, $H_{<}^{(r_1)}$, $H_{\leq}^{*(r_1)}$, $H_{<}^{*(r_1)}$ továbbá $H_{\leq}^{(r_2)}$, $H_{<}^{(r_2)}$, $H_{\leq}^{*(r_2}$, $H_{<}^{*(r_2)}$ a rendszer r_1 ill. r_2 rendű stabilitási ill. egyensúlyhalmazai és $r_1 < r_2$ akkor

$$H_{\leq}^{(r_1)} \supseteq H_{\leq}^{(r_2)},\ H_{<}^{(r_1)} \supseteq H_{<}^{(r_2)},\ H_{\leq}^{*(r_1)} \supseteq H_{\leq}^{*(r_2)},\ H_{<}^{*(r_1)} \supseteq H_{<}^{*(r_2)}.$$

2.3. *Az r-ed rendű egyensúlypont és egyensúlyhalmaz „egyensúly” tulajdonsága*

Megemlítjük, hogy egy r-ed rendű egyensúlypont (mint egyetlen elemből álló halmaz)-egyben egyensúlyhalmaz is, valamint hasonlóan a korábbiakhoz, most is igaz, hogy ha az r-ed rendű egyensúly és szigorú egyensúly halmazok zártak, akkor azok egyben stabilitási ill. szigorú stabilitási halmazok is. Továbbá minimális tulajdonságúak abban az értelemben, hogy nincs hasonló tulajdonságú valódi részhalmazuk. Ezen kívül az r-ed rendű stabilitási és egyensúlyhalmazoknak megvan az a tulajdonságuk is, hogy a különbözőek egyben diszjunktak is.

Ezek után megvizsgáljuk az egyensúlypont „egyensúly” tulajdonságát. Ha egy S rendszer már egy

$$x^{*(r)} = (x_1^{*(r)}, x_2^{*(r)}, \ldots, x_n^{*(r)})$$

egyensúlypontba jutott, ez azzal a következménnyel jár, hogy egyetlen olyan „kimozdulási kísérlet" sem „kifizetődő" a kimozdulni kívánók összességére nézve, mely kimozdulási kísérletben nem több mint r számú résztvevő szerepel. Ugyanis minden ilyen, legfeljebb r tagot számláló csoport kimozdulása esetén a preferenciafüggvényeik összege csak csökkenhet illetve nem nőhet. Vagy másképpen fogalmazva, ha x^* egy ilyen egyensúlypont és az S rendszernek legalább $n—r$ tagja már ebbe az állapotba jutott, akkor a kimaradók egészére nézve célszerű, hogy ők is idejussanak, mert minden más esetben együttesen csak „rosszabbul járhatnak."

Világos, hogy az egyensúlyi helyzetnek megfelelő „stabilitás" annál erősebb, minél nagyobb az r. Fontos lesz a két szélső esetnek megfelelő $r = 1$ és $r = n$ eset. Az $r = 1$ eset a játékelméletből ismert közönséges egyensúlypontnak felel meg, míg az $r = n$ esetben az egyensúlypont a preferenciafüggvények összegének egy totális maximumát jelenti.

Lényegében ugyanezeket mondhatjuk el az egyensúlyhalmazokról is. Ha ugyanis az S rendszer egy

$$H^{*(r)} = \{H_1^{*(r)}, H_2^{*(r)}, \ldots, H_n^{*(r)}\}$$

egyensúlyhalmazba jutott, akkor egy legfeljebb r tagot számláló

$$S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k} \qquad (k \leq r)$$

csoport „mozgása" csak a

$$H_{i_1}^{*(r)}, H_{i_2}^{*(r)}, \ldots, H_{i_n}^{*(r)}$$

halmazokon belül „kifizetődő".

2.4. *Az r-ed rendű stabilitási halmaz létezésének a kérdése*

Bevezetünk egy definíciót. Legyen $x \overset{(i_1,\ldots,i_r)}{\leq} y$. Ha az x, y párhoz és az $i_1, \ldots, i_r$ indexekhez léteznek olyan valós változós folytonos $t \to x_{i_j}(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$; $x_{i_j}(t) \in \sum_{i_j}$; $j = 1, 2, \ldots, r$) függvények, hogy

$$x_{i_j}(\alpha) = x_{i_j}$$

$$x_{i_j}(\beta) = y_{i_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

és valahányszor $\alpha < t_1 < t_2 < \beta$, mindannyiszor

$$x(t_1) \overset{(i_1,\ldots,i_r)}{\leq} x(t_2),$$

ahol $x(t)$-vel azt a vektort jelöljük, ahol az $i_1, \ldots, i_r$ komponensek helyén az $x_{i_1}(t), \ldots, x_{i_r}(t)$ szerepel, *akkor azt mondjuk, hogy az y az x-ből r-ed rendű folytonos javítással elérhető,* ha pedig

$$x(t_1) \overset{(i_1,\ldots,i_r)}{<} x(t_2),$$

akkor pedig az *y-t az x-ből r-ed rendű folytonos szigorú javítással elérhetőnek* nevezzük.

Megállapodunk továbbá még abban, hogy a $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ környezetfüggvényeket *r-ed rendben egyenletesen összefüggőnek* nevezzük, ha valahányszor

$$x \overset{(i_1,\ldots,i_r)}{\frown} y \quad \text{és} \quad \varrho(x, y) < \delta,$$

mindannyiszor

$$y_{i_j} \in \Phi_{i_j}(x) \ (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Ezek után bebizonyítjuk a következő segédtételt:

Lemma

Legyenek a $\sum_i$ halmazok korlátosak és zártak, az F_i függvények folytonosak, a C_i, K_i függvények pedig az $x \neq y$ helyeken folytonosak, Φ_i függvények r-ed rendben egyenletesen összefüggőek. Ha minden $x \in \sum$-ra annak minden r-ed rendű javítása egyben x-nek r-ed rendű folytonos szigorú javítása is, akkor a $[\tau_{<}^{(r)}(x)]$ halmazok minden $x \in \Sigma$-ra zártak abban az értelemben, hogy minden $y \in [\tau_{<}^{(r)}(x)]$-re $\tau_{<}^{(r)}(y) \subset [\tau_{<}^{(r)}(x)]$.

Bizonyítás

Legyen $y \in [\tau_{<}^{(r)}(x)]$. Meg kell mutatnunk, hogy

$$\tau_{<}^{(r)}(y) \subset [\tau_{<}^{(r)}(x)] .$$

Ha $y \in \tau_{<}^{(r)}(x)$, akkor nyilván

$$\tau_{<}^{(r)}(y) \subset \tau_{<}^{(r)}(x) \subset [\tau_{<}^{(r)}] ,$$

ezért elegendő a bizonyítást arra az esetre elvégezni, amikor y határpontja $\tau_{<}^{(r)}(x)$-nek, és $y \notin \tau_{<}^{(r)}(x)$,

A bizonyítást indirekt módon végezzük. Tegyük fel, hogy

$$\tau_{<}^{(r)}(y) \not\subset [\tau_{<}^{(r)}(x)] ,$$

azaz van olyan $y^* \in \tau_{<}^{(r)}(y)$, hogy $y^* \notin [\tau_{<}^{(r)}(x)]$.

A feltevés szerint az y^* az y-ból r-ed rendű szigorúan monoton lánccal elérhető. Legyen y^* mindjárt a lánc első olyan eleme, amelyik nem tartozik $[\tau_{<}^{(r)}(x)]$-hez, és legyen továbbá

$$y \overset{(i_1^{(1)},\ldots,i_r^{(1)})}{<} y_1 \overset{(i_1^{(2)},\ldots,i_r^{(2)})}{<} \cdots \overset{(i_1^{(k)},\ldots,i_r^{(k)})}{<} y_k$$

ahol y_k az y^*-ot a láncban közvetlenül megelőző pont.

Mivel $y^* \notin [\tau_{<}^{(r)}(x)]$, ezért szükségképpen

$$y_i \notin \tau(x), \ (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Másrészt, mivel a feltevésünk szerint y^* a lánc első olyan eleme, amelyik nem tartozik a $[\tau_{<}^{(r)}(x)]$-be, így az y_i pontok ugyancsak határpontok.

Legyen egyszerűség kedvéért $u = y_k$. Kaptuk tehát, hogy a $\tau_{<}^{(r)}(x)$-nek van olyan u határpontja, ahonnan egy y^* r-ed rendű javításra lépve, már kikerülünk $[\tau_{<}^{(r)}(x)]$-ből.

Legyen $$u \overset{(i_1,\ldots,i_r)}{<} y^*.$$

A feltételekből megmutatjuk, hogy $\tau_{<}^{(r)}(x)$-nek egyben olyan határpontja is létezik, amiből tetszőlegesen közeli olyan r-ed rendű javítás is elérhető, amelyik már szintén nem tartozik a $[\tau_{<}^{(r)}(x)]$-hez.

A feltevésünk szerint y^* egyben folytonos szigorú javítása is u-nak, azaz léteznek olyan

$$t \to y_{i_j}(t), \ (t \in [\alpha, \beta]; \ y_{i_j}(t) \in \textstyle\sum_{i_j}; \ j = 1, 2, \ldots, r).$$

folytonos függvények, hogy

$$y_{i_j}(\alpha) = u_{i_j},$$

$$y_{i_j}(\beta) = y_{i_j}^* \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

és valahányszor $\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$, mindannyiszor

$$y(t_1) \overset{(i_1, \ldots, i_r)}{<} y(t_2).$$

A definíció szerint

$$y(\alpha) = u \in [\tau_{<}^{(r)}(x)]$$

$$y(\beta) = y^* \notin [\tau_{<}^{(r)}(x)].$$

Legyen

$$t^* = \sup\{t : t \in [\alpha, \beta] \& \ \ y(t) \in [\tau_{<}^{(r)}(x)]\},$$

Mivel a $[\tau_{<}^{(r)}(x)]$ halmaz zárt és az $y(t)$ a t-nek folytonos függvénye, ezért szükségképpen $y(t^*) \in [\tau_{<}^{(r)}(x)]$. Másrészt $y(t^*)$ ugyancsak határpontja a $\tau_{<}^{(r)}(x)$-nek. Az $y(t^*)$ definíciójából következik, hogy minden poz. δ^*-hoz van olyan poz. δ, hogy valahányszor $t > t^*$ és $t - t^* < \delta$, mindannyiszor

$$\varrho\big(y(t), y(t^*)\big) < \delta^*$$

és

$$y(t) \notin [\tau_{<}^{(r)}(x)].$$

Ezzel megmutattuk, hogy a $\tau_{<}^{(r)}(x)$-nek valóban létezik olyan határpontja, amely nem tartozik a $\tau_{<}^{(r)}(x)$-hez, és amelyből tetszőlegesen közeli r-ed rendű javításra kilépve már kikerülünk a $[\tau_{<}^{(r)}(x)]$-ből. Legyen ezek után $u = y(t^*)$.

A feltevésünk szerint a $\Phi_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ környezetfüggvények r-ed rendben egyenletesen összefüggőek, azaz létezik olyan poz. δ, hogy valahányszor

$$x \overset{(i_1, \ldots, i_r)}{\frown} y \ \text{ és } \ \varrho(x, y) < \delta,$$

mindannyiszor

$$y_{i_j} \in \Phi_{i_j}(x) \ (j = 1, 2, \ldots, r).$$

A korábbiak szerint van a $\tau_{<}^{(r)}(x)$-nek olyan u határpontja, amelyhez van olyan z, hogy

$$u \overset{(i_1, \ldots, i_r)}{\frown} z$$

és $z \notin [\tau_{<}^{(r)}(x)]$, valamint $\varrho(u, z) < \dfrac{\delta}{2}$.

Mivel az u határpontja a $\tau_{<}^{(r)}(x)$-nek, ezért van a $\tau_{<}^{(r)}(x)$-elemeinek egy olyan $u^{(m)}$ sorozata, amelyik az u-hoz konvergál. Az egyszerűség kedvéért legyen $i_j = j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ és vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n)$$

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_r, u_{r+1}, \ldots, u_n)$$

$$u^{(m)} = (u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, \ldots, u_r^{(m)}, u_{r+1}^{(m)}, \ldots, u_n^{(m)})$$

$$z^{(m)} = (z_1, z_2, \ldots, z_r, u_{r+1}^{(m)}, \ldots, u_n^{(m)})$$

A definícióból következik, hogy

$$\lim_{m\to\infty} z^{(m)} = z\,.$$

Minden elég nagy m-re elvégezhető az alábbi becslés:

$$\varrho(u^{(m)}, z^{(m)}) \leq \varrho(u^{(m)}, u) + \varrho(u, z) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta\,.$$

Másrészt mivel minden m-re

$$u^{(m)} \overset{(i_1, \ldots, i_r)}{\frown} z^{(m)} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

így, kihasználva, hogy a Φ_i-k r-ed rendben egyenletesen összefüggőek, kapjuk, hogy

$$z_i \in \Phi_i(u^{(m)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

azaz minden m-re

$$u_i^{(m)} \xrightarrow{(i_1, \ldots, i_r)} z^{(m)} \qquad (m = 1,2, \ldots)\,.$$

Ezek után azt is meg fogjuk mutatni, hogy minden elég nagy m-re

$$u^{(m)} \overset{(i_1, \ldots, i_r)}{<} z^{(m)}\,.$$

A korábbiak szerint

$$u \overset{(i_1 \ldots, i_r)}{<} z\,,$$

azaz

$$\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(u) - \sum_{j=1}^{r} K_{i_j}(u, z) < \sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(z) - \sum_{j=1}^{r} C_{i_j}(u, z)\,.$$

Legyen

$$\left[\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(z) - \sum_{j=1}^{r} C_{i_j}(u, z)\right] - \left[\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(u) - \sum_{j=1}^{r} K_{i_j}(u, z)\right] = \delta_1 > 0\,.$$

A feltevés szerint az F_i, C_i, K_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ függvények folytonosak $(x \neq \neq y)$, így minden elegendően nagy m-re

$$\left|\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(z^{(m)}) - \sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(z)\right| < \frac{\delta_1}{5}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{r} C_{i_j}(u^{(m)}, z^{(m)}) - \sum_{j=1}^{r} C_{i_j}(u, z)\right| < \frac{\delta_1}{5}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(u^{(m)}) - \sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(u)\right| < \frac{\delta_1}{5}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{r} K_{i_j}(u^{(m)}, z^{(m)}) - \sum_{j=1}^{r} K_{i_j}(u, z)\right| < \frac{\delta_1}{5}$$

minden $j = 1, 2, \ldots, r$-re.

Ezek után minden elég nagy m-re elvégezhető a következő becslés:

$$\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(z^{(m)}) - \sum_{j=1}^{r} C_{i_j}(u^{(m)}, z^{(m)}) - \left[\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(u^{(m)}) - \sum_{j=1}^{r} K_{i_j}(u^{(m)}, z^{(m)})\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(z^{(m)}) - \sum_{j=1}^{r} C_{i_j}(u^{(m)}, z^{(m)}) - \left[\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(z) - \sum_{j=1}^{r} C_{i_j}(u, z)\right] +$$

$$+ \left[\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(z) - \sum_{j=1}^{r} C_{i_j}(u, z)\right] - \left[\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(u) - \sum_{j=1}^{r} K_{i_j}(u, z)\right] +$$

$$+ \left[\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(u) - \sum_{j=1}^{r} K_{i_j}(u, z)\right] - \left[\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(u^{(m)}) - \sum_{j=1}^{r} K_{i_j}(u^{(m)}, z^{(m)})\right] =$$

$$= \left[\sum_{j=r}^{r} F_{i_j}(z^{(m)}) - \sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(z)\right] - \left[\sum_{j=1}^{r} C_{i_j}(u^{(m)}, z^{(m)}) - \sum_{j=1}^{r} C_{i_j}(u, z)\right] +$$

$$+ \left\{\left[\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(z) - \sum_{j=1}^{r} C_{i_j}(u, z)\right] - \left[\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(u) - \sum_{j=1}^{r} K_{i_j}(u, z)\right]\right\} +$$

$$+ \left[\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(u) - \sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(u^{(m)})\right] - \left[\sum_{j=1}^{r} K_{i_j}(u, z) - \sum_{j=1}^{r} K_{i_j}(u^{(m)}, z^{(m)})\right] >$$

$$> -\frac{\delta_1}{5} - \frac{\delta_1}{5} + \delta_1 - \frac{\delta_1}{5} - \frac{\delta_1}{5} = \delta_1 - \frac{4\delta_1}{5} = \frac{\delta_1}{5} > 0 .$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy minden elég nagy m-re

$$u^{(m)} \overset{(i_1, \ldots, i_r)}{<} z^{(m)},$$

ez pedig azt jelenti, hogy minden elég nagy m-re

$$z^{(m)} \in \tau_{<}^{(r)}(u^{(m)}) \subset \tau_{<}^{(r)}(x) \subset [\tau_{<}^{(r)}(x)] .$$

Mivel a $[\tau_{<}^{(r)}(x)]$ zárt halmaz, ezért

$$\lim_{m \to \infty} z^{(m)} = z \in [\tau_{<}^{(r)}(x)] ,$$

ami ellentmondás. Ellentmondásra jutván a Lemmát bizonyítottuk.

A Lemma segítségével az r-ed rendű szigorú stabilitási halmazokra egy egzisztenciatételt bizonyítunk be.

6. *TÉTEL*

Legyen Σ_i megszámlálható bázisú tér részhalmaza és a Σ_i halmazok korlátosak és zártak, az $F_i(x)$, $C_i(x, y)$, $K_i(x, y)$ függvények folytonosak $(x \neq y)$, a Φ_i függvények r-ed rendben egyenletesen összefüggőek. Ha minden $x \in \Sigma$-ra annak bármely r-ed rendű javítása egyben x-nek r-ed rendű folytonos szigorú javítása, akkor létezik minden $[\tau_{<}^{(r)}(x)]$-ben az S rendszernek r-ed rendű szigorú stabilitási halmaza.

Bizonyítás

Megmutatjuk, hogy minden $x \in \Sigma$-ra nézve a $[\tau_{<}^{(r)}(x)]$ részhalmazai között szükségképpen van r-ed rendű szigorú stabilitási halmaz.

Legyen $x \in \Sigma$. A Lemma szerint $[\tau_{<}^{(r)}(x)]$ zárt az r-ed rendű szigorú javításra nézve. Ha maga a $[\tau_{<}^{(r)}(x)]$ nem szigorú stabilitási halmaz, akkor van olyan $x_1 \in [\tau_{<}^{(r)}(x)]$, hogy

$$[\tau_{<}^{(r)}(x_1)] \subset [\tau_{<}^{(r)}(x)] \text{ és } [\tau_{<}^{(r)}] \neq [\tau_{<}^{(r)}(x)]\,.$$

Ha $[\tau_{<}^{(r)}(x_1)]$ nem szigorú stabilitási halmaz, akkor van olyan $x_2 \in [\tau_{<}^{(r)}(x_1)]$, hogy

$$[\tau_{<}^{(r)}(x_2)] \subset [\tau_{<}^{(r)}(x_1)] \subset [\tau_{<}^{(r)}(x)] \text{ és } [\tau_{<}^{(r)}(x_2)] \neq [\tau_{<}^{(r)}(x_1)]\,.$$

Ha véges lépésben ilyen módon nem jutunk el egy szigorú stabilitási halmazhoz, akkor egy szigorúan fogyó

$$[\tau_{<}^{(r)}(x)] \supset [\tau_{<}^{(r)}(x_1)] \supset [\tau_{<}^{(r)}(x_2) \supset \ldots$$

sorozathoz jutunk.

Amennyiben ezek közös része (Kántor-tétele!) nem szigorú stabilitási halmaz, akkor erre újra megismételjük az eljárásunkat. Az így kapott láncra alkalmazva a Baire—Hausdorf-féle tételt kapjuk, hogy egy α indextől kezdve

$$[\tau_{<}^{(r)}(x_\alpha)] = [\tau_{<}^{(r)}(x_{\alpha+1})] = \ldots\,,$$

ami ellentmondás.

Ellentmondásra jutván a tételt igazoltuk.

2.5 *Az r-ed rendű egyensúlyhalmazok létezésének a kérdése*

Mivel az 1. fejezetben ismertetett összefüggések az egyensúly és a stabilitási halmazok között érvényben maradnak, így a 6. TÉTEL-ből már következik a szigorú egyensúlyhalmazok létezésére az alábbi

7. *TÉTEL*

Legyenek a Σ_i halmazok korlátosak és zártak az F_i függvény folytonos, a C_i és K_i függvények az $x = y$ helyek kivételével folytonosak, valamint legyenek a Φ_i környezetfüggvények r-ed rendben egyenletesen összefüggőek. Ha a K_i függvények a Σ halmazon $\varepsilon(x) > 0 (x \in \Sigma)$ pontosságúak és minden $x \in \Sigma$-ra annak minden r-ed rendű szigorú javítása egyben r-ed rendű folytonos szigorú javítása is, akkor létezik az S-rendszernek r-ed rendű szigorú egyensúlyhalmaza.

2.6 *Az ellenstabilitási és ellenegyensúlyhalmazok értelmezése*

Az I. részben és a II. 2.1-ben bevezetett 1. rendű ill. r-edrendű $\tau^{(r)}_{\geq}(x)$, $\tau^{(r)}_{>}(x)$ bejárhatósági tartományok mintájára megfogalmazhatók a $\tau^{(r)}_{\leq}(x)$ ill. $\tau^{(r)}_{<}(x)$ ellenirányú bejárhatósági tartományok, amelyek a ,,csökkenő''

$$x \overset{(i_1, \ldots, i_r)}{\geq} y \quad \text{illetve}$$

$$x \overset{(i_1, \ldots, i_r)}{>} y$$

láncokból állnak elő.

Ennek alapján értelmezzük az ellenegyensúlypont, ellenstabilitási ill. ellenegyensúlyhalmaz fogalmakat.

Az $y^{*(r)} \in L$ pontot az S rendszer *ellenegyensúlypont*jának nevezzük, ha szigorú ellenirányú bejárhatósági tartománya az üres halmaz.

Ez tehát azt jelenti, hogy minden $y^{*(r)} \in L$ pont az S rendszer egy r-edrendű ellenegyensúlypontja, ha fennáll

$$\sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(y^{*(r)}) - \sum_{j=1}^{r} K_{i_j}(y^{*(r)}, x) \geq \sum_{j=1}^{r} F_{i_j}(x) - \sum_{j=1}^{r} C_{i_j}(y^{*(r)}, x)$$

bármilyen $i_1, \ldots, i_r$ index r-esre, miközben $x_{i_j} \in \Phi_{i_j}(y^{*(r)})$, $j = 1, \ldots, r$.

Az ellenstabilitási és ellenegyensúlyhalmaz fogalmát is hasonlóan értelmezzük:

Egy $H^{(r)}_{\geq}$ halmazt az S rendszer egy r-edrendű *ellenstabilitási halmazának* nevezzük, ha minden $x \in H^{(r)}_{\geq}$-re

$$[\tau^{(r)}_{\geq}(x)] = H^{(r)}_{\geq}$$

továbbá egy $H^{(r)}_{\geq}$ halmazt az S rendszer r-edrendű *szigorú ellenstabilitási halmazának* nevezünk, ha minden $x \in H^{(r)}_{\geq}$-re

$$[\tau^{(r)}_{>}(x)] = H^{(r)}_{>}.$$

Végül egy $H^{*(r)}_{\geq} \subset L$ halmazt az S rendszer egy r-edrendű *ellenegyensúlyhalmazának* nevezünk, ha minden $x \in H^{*(r)}_{\geq}$-re

$$\tau^{(r)}_{\geq}(x) = H^{*(r)}_{\geq}.$$

Ha egy $H^{*(r)}_{>} \infty L$ halmaz esetén minden $x \in H^{*(r)}_{>}$-re

$$\tau^{(r)}_{>}(x) = H^{*(r)}_{>}$$

teljesül, akkor a $H^{*(r)}_{<}$ halmaz az S rendszer szigorú *ellenegyensúlyhalmaza*.

A $H^{(r)}_{\geq}$, $H^{(r)}_{>}$, $H^{*(r)}_{\geq}$, $H^{*(r)}_{>}$ halmazokat *valódi*-aknak nevezzük, ha a Σ ill. az L valódi részhalmazai.

A 2.4-ben bevezetett ,,r-ed rendű folytonos javítás'' mintájára értelmezhető az ,,r-ed rendű folytonos csökkentés'' fogalma is.

Teljesen analóg módon, mint ahogy a 6. és 7. tétel esetében történt, igazolhatók a következő tételek:

8. *T É T E L*

Legyen Σ megszámlálható bázisú tér részhalmaza és a Σ_i halmazok korlátosak és zártak, az $F_i(x)$, $C_i(x, y)$, $K_i(x, y)$ függvények folytonosak $(x \neq y)$, a Φ_i függvények r-ed rendben egyenletesen összefüggőek. Ha minden $x \in \Sigma$-ra annak bármely r-ed rendű csökkentése egyben x-nek r-ed rendű folytonos szigorú csökkentése, akkor létezik az S rendszernek r-ed rendű szigorú ellenstabilitási halmaza, minden ellenirányú bejárhatósági tartományban.

9. *T É T E L*

Legyen Σ megszámlálható bázisú tér részhalmaza és a Σ_i halmazok korlátosak és zártak, az $F_i(x)$, $C_i(x, y)$, $K_i(x, y)$ függvények folytonosak $(x \neq y)$, valamint legyenek a Φ_i környezetfüggvények r-ed rendben egyenletesen összefüggőek.
Ha a K_i függvények a Σ halmazon $\varepsilon(x) > 0 (x \in \Sigma)$ pontosságúak és minden $x \in \Sigma$-ra annak minden r-edrendű szigorú csökkentése egyben r-edrendű folytonos szigorú csökkentése is, akkor létezik az S rendszernek r-edrendű szigorú ellenegyensúlyhalmaza minden ellenirányú bejárhatósági tartományban.

2.6 *Kritériumok a stabilitási halmaz és egyensúlyhalmaz valódiságára*

Amint tudjuk a $H^{(r)}_{\leq}$, $H^{(r)}_{<}$ stabilitási halmazok valódiak, ha Σ-nak valódi részei, továbbá $H^{*(r)}_{\leq}$, $H^{*(r)}_{<}$ egyensúlyhalmazok valódiak, ha L-nek (nem üres) valódi részei.

Világos, hogy mind a stabilitási halmazok, mind az egyensúlyhalmazok diszjunkt halmazok. Ennek közvetlen következménye, hogy ha a S rendszernek van valódi stabilitási ill. egyensúlyhalmaza, akkor minden stabilitási ill. egyensúlyhalmaza valódi. Speciálisan, ha S-nek van egyensúlypontja és L nem egyetlen pontból áll, akkor S-nek minden szigorú stabilitási és egyensúlyhalmaza valódi.

10. *T É T E L*

Ha az r-ed rendben való elérhetőség relációja megfordítható és minden x-re a $\tau^{(r)}_{\leq}(x)$ és $\tau^{(r)}_{\geq}(x)$ tartományok tartalmaznak egyensúly ill. ellenegyensúly halmazt, akkor ha az S-nek létezik valódi egyensúly halmaza, úgy valódi ellenegyensúlyhalmaza is létezik és megfordítva, ha S-nek létezik ellenegyensúlyhalmaza, úgy valódi egyensúlyhalmaza is létezik.

B i z o n y í t á s

Legyen $H^{*(r)}_{\leq}$ az S egy valódi egyensúlyhalmaza, és legyen $x \in L$ és $x \notin H^{(r)}_{\leq}$. Tekintsük a $\tau^{*}_{\geq}(x)$ tartományt. Megmutatjuk, hogy

$$\tau^{(r)}_{\geq}(x) \cap H^{*(r)}_{\leq} = \emptyset .$$

Ha ugyanis $y \in \tau^{*}(x) \cap H^{*(r)}_{<}$, akkor van az x-től az y-ba vezető r-ed rendű csökkenő lánc. Az r-ed rendben való elérhetőség relációjának a megfordíthatósága miatt ugyanez a lánc az y-tól az x-be nemcsökkenve vezet. Így az egyensúlyhalmaz definíciója miatt $x \in H^{*(r)}_{<}$ ami ellentmondás. A feltevés miatt a $\tau^{(r)}_{\leq}(x)$ tartalmaz egy $H^{*(r)}_{\leq}$ ellenegyensúlyhalmazt, ami szükségképpen valódi. A fordított állítás hasonlóan bizonyítható.

11. *T É T E L*

Ha az r-ed rendben való elérhetőség relációja megfordítható és minden x-re a $\tau_{\leq}^{(r)}(x)$ és $\tau_{\geq}^{(r)}(x)$ tartományok tartalmaznak szigorú egyensúly ill. ellenegyensúly halmazokat, akkor ha S-nek létezik valódi szigorú egyensúlyhalmaza, úgy valódi szigorú ellenegyensúlyhalmaza is létezik és megfordítva, ha az S-nek létezik valódi szigorú ellenegyensúlyhalmaza, úgy valódi szigorú egyensúlyhalmaza is létezik.

B i z o n y í t á s

A bizonyítást a korábbi tétel bizonyításához hasonlóan végezhetjük el. Ha ugyanis $H_{<}^{*(r)}$ valódi és $x \notin H_{<}^{*(r)}$, úgy két eset lehetséges. Vagy $\tau_{>}^{(r)}(x) = 0$, akkor x ellenegyensúlypont, így egyben ellenegyensúlyhalmaz is, vagy $\tau_{>}^{(r)}(x) \neq \neq 0$. Ekkor a feltevés szerint $\tau_{>}^{(r)}(x)$ tartalmaz szigorú ellenegyensúlyhalmazt. Erről ugyanúgy, mint a 6. TÉTEL bizonyításánál kimutathatjuk, hogy valódi.

12. *T É T E L*

Ha az r-ed rendben elérhetőség relációja megfordítható és a $H_{\leq}^{*(r)}$, $H_{\geq}^{*(r)}$ és $H_{<}^{*(r)}$, $H_{>}^{*(r)}$ halmazpárok különbözőek, akkor diszjunktok.

B i z o n y í t á s

Legyen a $H_{\leq}^{*(r)}$ és a $H_{\geq}^{*(r)}$ az S rendszer tetszőleges egyensúly ill. ellenegyensúly halmaza.

Megmutatjuk, hogy ha

$$H_{\leq}^{*(r)} \cap H_{\geq}^{*(r)} \neq \emptyset .$$

akkor

$$H_{\leq}^{*(r)} = H_{\geq}^{*(r)}.$$

Legyen $x \in H_{\leq}^{*(r)} \cap H_{\geq}^{*(r)}$és legyen y a $H_{\leq}^{*(r)}$ egy tetszőleges eleme. Mivel $\tau_{\leq}^{(r)}(y) = H_{\leq}^{*(r)}$, így van egy, az y-tól az x-be vezető növekvő r-ed rendű lánc. Mivel $x \in H_{\geq}^{*(r)}$ és $\tau_{\geq}^{(r)}(x) = H_{\geq}^{*(r)}$, így ugyanezen lánc miatt $y \in H_{\geq}^{*(r)}$, azaz $H_{\leq}^{*(r)} \subset H_{\geq}^{*(r)}$ A $H_{\leq}^{*(r)} \supset H_{\geq}^{*(r)}$ tartalmazás hasonlóan bizonzítható. A bizonyítás ugyanígy elvégezhető a $H_{<}^{*(r)}$, $H_{>}^{*(r)}$ halmazpárra is. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

13. *T É T E L*

Amennyiben az r-ed rendben elérhetőség relációja megfordítható és a $H_{\leq}^{*(r)}$, $H_{\geq}^{*(r)}$ halmazpár valamelyike nyílt abban az értelemben, hogy van legalább egy kivezető r-ed rendű lánc, úgy a $H_{\leq}^{*(r)} = H_{\geq}^{*(r)}$ eset csak a $H_{\leq}^{*(r)} = H_{\geq}^{*(r)} = L$ esetben állhat fenn. Ugyanez érvényes a $H_{<}^{*r}$, $H_{>}^{*r}$ halmazpárra is.

B i z o n y í t á s

Legyen $H_{\leq}^{*(r)} = H_{\geq}^{*(r)}$ és tegyük fel, hogy van legalább egy, a $H_{\leq}^{*(r)}$-ből kivezető r-ed rendű lánc. Ha x a lánc utolsó eleme, amely még a $H_{\leq}^{*(r)}$-ben van és y az x-et a láncban közvetlenül követő elem, úgy szükségképpen

$$x \overset{(i_1, \ldots, i_r)}{>} y$$

De $x \in H^{*(r)}_{\geqq}$, így $y \in H^{*(r)}_{\geqq}$, viszont a $H^{*(r)}_{\geqq} = H^{*(r)}_{\geqq}$ miatt $y \in H^{*(r)}_{\geqq}$ következik, ami ellentmondás.

A tétel a $H^{*(r)}_{<}$, $H^{*(r)}_{>}$ halmazpárra hasonlóan bizonyítható.

Az ellenegyensúlyhalmaz közgazdasági interpretációjára most nem kívánunk kitérni. Mindenesetre úgy tűnik, hogy meglehetősen általános feltételek mellett az egyensúlyhalmaz létezéséből szükségképpen következik ellenegyensúlyhalmaz létezése és viszont. E két halmazcsoport disjunkt, amelyek valamiféle „pólus-antipólus" tulajdonsággal rendelkeznek.

Ismételten hangsúlyozzuk, hogy eddig nem beszéltünk a rendszer ill. a rendszer szerveinek céljáról csupán az általunk vázolt mozgások következményeit vizsgáltuk.

(Beérkezett: 1974. március 19.)

IRODALOM

1. ALEXANDROV, P. SZ.: Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe. Budapest, 1952. Akadémiai Kiadó
2. ARROW, K. J.–DEBREU, G.: Existence of an equilibrium for a competitive economy, Econometrica 22 (1954)
3. BLAUUIERE, A.–GÉRARD, F.–LEITMANN, G.: Quantitative and Qualitative Games, Academic Press 1969
4. BURGER, E.: Einführung in die Theorie der Spiele. Berlin, 1959.
5. GALE, D.: The law of supply and demand. Math. Scand. 3, 155–1659 (195)
6. MCKENZIE, L.: On equilibrium in Graham's model of world trade and other competi tive systems. Econometrica 22 (1954)
7. NIKAIDO, H.: On the classical multilateral exchange problem. Metroeconomica 8 (1956), 9 (1957)
8. NIKAIDO, H.–ISODA, K.: Note on noncooperative convex ga əa, Pacific J. Math.5-807–815 (1955)
9. SZÉP, J.: On foundation of game theory. DM 70–3. Közgazdsági Egyetem
10. SZÉP, J.–HEGEDÜS, M.: Equilibrium systems I. DM 73–4Közgazdasági Egyetem
11. SZÉP, J.–HEGEDÜS, M.: Equilibrium systems II. DM 74–3Közgazdasági Egyetem

EQUILIBRIUM SYSTEMS II.

This paper is an organic continuation of the „Equilibrium Systems I.". Let $1 \geq r \geq n$ and $x, y \in \Sigma$. If x and y differ from each other at most in r components then we say that *x and y are comparable at least in order $n-r$.* Following this the concept of accessibility of order r, moreover the concepts of a chain of order r and of a domain with the property of allowing a circuit of order r are introduced.

There are theorems analogous to those proven in part I in connection with the r-order equilibrium set and stable set. At the end the concepts of the r-order counter-equilibrium set and of the r-order counter-stable set are introduced. They are defined by means of the counter-direction decreasing chains and of the counter-direction circuit allowing domains. In connection with the equilibrium- and the counter-equilibrium sets, beside other theorems, it is proved that under rather general conditions an equilibrium set and any counter-equilibrium set are either disjoint or, if they have a common element, identical.

РАВНОВЕСНЫЕ СИСТЕМЫ II.

Данная работа является органическим продолжением статьи «Равновесные системы I». Пусть $1 \leq r \leq n$ и $x, y \in \Sigma$. Если x и y отличаются друг от друга по крайней мере на r составляющих, мы скажем, что x и y сопоставимы минимум в $n-r$-ном порядке. После этого вводятся следующие понятия: достижимость в r-ном порядке, цепь r-ного норядка и область обходимости r-ного норядка. Доказываются теоремы, аналогичные уже доказанным в первой части, в связи с множеством равновесия и стабильности r-ного порядка. Наконец, вводится понятие множества противоравновесия и противостабильности, которые определяются с помощью убывающих цепочек противоположного направления, а также с помощью области доступности противоположного направления. В связи с множествами равновесия, а также с множествами противоравновесия между прочим доказывается, что при достаточно общих условиях множество равновесия является либо дизъюнктивным по отношению к любому множеству противоравновесия, либо, если они имеют общий элемент, то оно яряется равным ему.