

## KÖNYVEKRŐL

SZÉP J. — FORGÓ F.: *Bevezetés a játékelméletbe* Budapest, 1974. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 313 p.

A Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó gondozásában megjelent könyv első kötete egy új sorozatnak, melyet a kiadó „Korszerű matematikai ismeretek gazdasági szakemberek számára” címmel indított, s amely a „legkorszerűbb ismereteket kívánja nyújtani a közgazdászok, üzembgazdászok és általában a gazdasági szakemberek részére”. E célkitűzésnek jól megfelelő ez az alapos, matematikailag igényes, 7 fejezetre és függelékre tagolódó mű, amely a matematika egy viszonylag fiatal ágának, a stratégiai játékok elméletének első átfogó, magyar nyelvű tárgyalása.

A szerzők jó érzékkel válogatták össze a téma ma már igen kiterjedt irodalmából az adott terjedelem mellett legérdekesebbeknek és legfontosabbaknak mondható részeket. Jelentős teret szenteltek a klaszszikus, részben John von Neumann-tól származó, eredmények mellett a játékelmélet modernebb fejezeteinek is, — pl. konvex mátrixjátékok, bimátrixjátékok, egységnyezeten lejátszott játékok, oligopol játék és kooperatív játékok — sok eddig csak szétszórtan, folyóirataikokban szereplő eredményt foglalva így egységes keretbe. Ezzel a szerzők feltétlenül eleget tesznek a korszerűség követelményének.

Ismert dolog, hogy a játékelméletet sok támadás érte gyakorlati problémák operatív megoldására való alkalmatlansága miatt. Ez a vád nézetem szerint csak részben jogos: tény, hogy a játékelmélet nem hasznosítható olyan mértékben, mint pl. a matematikai programozás (különösen a lineáris programozás), de bizonyos esetekben a játékelméleti megközelítés kimondottan „testre szabott”, továbbá remélhető az alkalmazási terület jövőbeni kibővítése. Jelentős a játékelméleti fogalmak, megfontolások szemléletformáló ereje is. Erdeme a könyvnek, hogy bemutat néhány

gazdasági alkalmazási lehetőséget kidolgozott példák formájában, s helyenként utal az adott matematikai probléma gyakorlati, gazdasági gyökereire is. A könyvben szereplő gazdasági illusztrációk, alkalmazások mennyisége ennek ellenére kevés. Ha matematikusoknak írott könyvről volna szó, akkor ez a bíráló nem lenne jogos, de szerintem, mivel itt gazdasági szakembereknek írott műről van szó, ez a szempont fontos. Igaz, nehéz összegyűjteni nagyobb mennyiségű találó és érdekes alkalmazást. De az ilyenek gyűjtése és értékelése iránti szükséglet talán még égetőbb, mint az elmélet korszerű és egységes tárgyalási igénye, mivel a gazdasági szakemberek általában a gyakorlat oldaláról indulnak ki, és az alkalmazhatóság kérdéseire, problémáira a nemzetközi irodalomban is nehezebb választ kapni, mint egy-egy részterület meglévő elméleti eredményeit összegyűjteni, felmérni. Ezt a szempontot fokozottabban figyelembe lehetne venni a kiadó által indított sorozat további köteteinél. A játékelmélet esetében a szerzők mentességére szólgál, hogy a matematika e területének eddig kevés találó gazdasági alkalmazása született. Mindenesetre ezt a tényt nem ártott volna a könyvben megemlíteni.

A könyv matematikailag igényes, fogalmazásmódjában pontos és világos. Bár nem tételez fel az egyetemi közgazdászképzésben szereplő matematikai tananyagná több ismeretet, sőt legtöbbször csak elemi eredményeket használ fel, egyes részeinek követése a matematikában nem eléggé otthonos olvasó számára nehéz lehet. Elegáns és újszerű az 1. fejezetben az egyensúlyi rendszereknek, mint az  $n$ -személyes játékok általánosításának a tárgyalása. Kár viszont, hogy a tárgyalásban nem szerepel, hogy mi indokolja ennek az általánosításnak a szükségességét, milyen problémák modellezéséhez kell ez az általánosítás. Véleményem szerint a könyvben szereplő tételek közül sok alaposabb megvilá-

gítást, magyarázatot igényelne, hogy az olvasó könnyebben felismerhesse az egyes állítások jelentőségét, helyét az elméletben. Nem elég részletes az egyes játéktípusok megoldására bemutatott módszerek értékelése sem. A témában nem eléggé járatos olvasó valószínűleg nem fogja kellőképpen érzékelni az egyes játéktípusok konkrét, számítógépes megoldása közötti nehézségbeli különbségeket. Persze ez a kifogás részben csak akadémikus, mivel a legtöbb játéktípus numerikus megoldását a gyakorlatban érdekes nagyobb méretek mellett még nem végezték el, az ilyen jellegű számítástechnikai tapasztalatokat tárgyaló irodalom nem túl bőséges.

Néhány kisebb részlet nem egészen világos és pontos — pl. a rendszer egyensúlyi állapothalmazának definíciója, vagy az egyensúlyi rendszerekre bevezetett környezetfüggvényeknek az  $n$ -személyes játékokra való specializálása —, de ezek súlya elenyésző. Egy formai megjegyzés: a tételek megfogalmazása és a bizonyítás nyomda-technikailag jobban elkülöníthető lett volna (pl. vastagbetűs „tétel” és „bizonyítás” szedéssel és a bizonyítás végére lezáró-jel helyezésével, valamint a bekezdések erősebb tagolásával), ami az áttekinthetőséget, kezelhetőséget javította volna. Kár, hogy néhány sajtóhiba maradt a könyvben, de ezek száma szerencsére nem nagy. Értékes az alapos, igen bő irodalomjegyzék.

Az első fejezet az egyensúlyi rendszerekkel foglalkozik, ez a szerzők szavaival élve „egy olyan általános koncepciót vázol, amelyben a játékelméletspeciális esetként jelentkezik”. A rendszert véges vagy végtelen sok „szerv” együttese alkotja, s az egyes szervek állapotát — esetleg csak sztochasztikusan — a többi állapota határozza meg. A definiált környezetfüggvény határozza meg, hogy egy szerv a többi szerv állapotának rögzítése mellett milyen állapotokat vehet fel, a preferenciafüggvény pedig azt, hogy az egyes szervek milyen irányba törekednek elmozdulni. Bevezetésre kerül a diszkrét és a folytonos állapotpálya, valamint az egyensúlyi állapothalmaz fogalma, és szerepel az egyensúlyi rendszerekkel kapcsolatos néhány érdekes problémakör felvetése.

A könyv második fejezete *Az  $n$ -személyes játékok* a harmadik pedig *Az egyensúlyipont és az egyensúlyhalmaz egzisztenciátételei* címet viseli. Az előbbi bevezeti a játék alapfogalmait, a játékos, a stratégia, a stratégiahalmaz, a kevert stratégia, a kifizetőfüggvény, a véges és végtelen játék és a stratégiai ekvivalencia fogalmát. Az utóbbi néhány definíciót ad: Nash-féle egyensúlyipont, fával ábrázolható játék,

teljes információs játék, diszjunkt partició, csoport egyensúlyipont; majd rátér az egyensúlyipont, ill. -halmaz különböző feltételek melletti létezését biztosító egzisztenciátételek ismertetésére és bizonyítására. Összesen 11 ilyen tétel szerepel.

Ezek közül a 3. mondható a legfontosabbnak, mivel a leglényegesebb egyensúly egzisztencia tételek ennek következményeként nyerhetők. E szerint az  $n$ -személyes játéknak van egyensúlyipontja, ha a játékosok stratégiáihalmazai konvexek, kifizetőfüggvényeik folytonosak és konkávak, s teljesül még egy bonyolultabb feltétel is. Ennek következménye többek között az állítás is, hogy minden  $n$ -személyes véges játék kevert bővítésének van egyensúlyipontja. Az itt szereplő tételek jelentőségét, szerepét — különösen a 8–11 tételek esetében — meg kellett volna világítani valamilyen formában, kísérletet kellett volna tenni annak bemutatására, hogy egy-egy általánosabb egzisztenciátételnek milyen alkalmazások (esetleg csak matematikán belüli alkalmazások) esetében van jelentősége.

A negyedik fejezet a kétszemélyes játékok elméletét tárgyalja, s ez teszi ki a könyv terjedelmének közel kétharmad részét. Ez indokolt is, hiszen a játékelméletnek ez a területe a legfejlettebb, s a legtöbb bevált alkalmazás is ide sorolható. A szerzők néhány bevezető tétel és definíció után rátérnek a zérus összegű, véges, kétszemélyes játékok, vagy más néven mátrixjátékok tárgyalására. E terület elmélete elég egyszerű, az eredmények szemléletesek, a mátrixjátékok viszonylag jól kezelhetők. Szerepel az egyensúlyi stratégiáihalmaz szerkezetének leírása, a szimmetrikus játékok speciális tulajdonságainak ismertetése, a mátrixjátékok és a lineáris programozás kapcsolatainak tárgyalása. Helyt kapott itt a mátrixjátékok numerikus megoldására szolgáló három módszer leírása is, így a leginkább elterjedt lineáris programozási módszer, a fikatív lejátszás módszere és Neumann módszer. Külön rész foglalkozik a speciális játékok esetében alkalmazhatók, megoldást könnyítő módszerekkel, így a nyeregponttal rendelkező mátrixok esetével, a dominancia relációkkal, a  $2 \times n$ -es játékokkal, a konvex (konkáv) játékokkal, a mátrixjátékok dekompozíciójával, a teljesen kevert játékokkal. Szerepel négy példa is a mátrixjátékok gyakorlati alkalmazására.

A következő rész a kétszemélyes, véges, de nem zérus-összegű játékokkal, más néven bimátrix (két mátrixszal jellemezhető) játékokkal foglalkozik. Felhívja a figyelmet, hogy sok, a mátrixjátékoknál beve-

zetett fogalom itt nem értelmezhető, és korábbi előnyös tulajdonságok ez esetben hiányoznak. Bevezeti a dominancia és a megoldhatóság különböző fokozatainak (gyenge, normál, erős) fogalmát, valamint a támadó és védekező stratégiákat, a minimális stratégiahalmaz, az optimális stratégiafüggvények és az erős egyensúlyi pont fogalmát. Bizonyítás nélkül felsorol néhány érdekes tételt a teljesen kevert bimátrix játékok elméletéből. Ezután néhány, bimátrix játékok megoldására szolgáló, módszer tömör ismertetése következik. Az egyik módszer a bimátrix játék megoldását egy kvadratikus programozási feladat, egy másik módszer pedig egy lineáris vegyes (folytonos-diszkrét) változós programozási feladat megoldására vezeti vissza. Ezek az eredmények szerintem igen érdekesek. A vektor kifizetőfüggvényű játékokra vonatkozó néhány fogalom bevezetése után a bimátrix játékokra vonatkozó két gazdasági példa szerepel, ezek a mátrixjátékoknál szerepeltetett példáknál találhatóbbak mondhatók.

Részletesen tárgyalja a könyv az egyszerűen lejtátszott játékok elméletét, melyek a mátrixjátékok kézenfekvő általánosításainak tekinthetők. Itt is, mint a mátrixjátékoknál, a kevert bővített játszik alapvető szerepet. Ebben az esetben a kifizető függvény a tiszta stratégiákat reprezentáló függvénynek a két játékos stratégiafüggvényei szerint vett kettős Stieltjes-integrálja. Az integrál magfüggvényének speciális tulajdonságai szerint szokás ezeket a játékokat csoportosítani. Néhány fogalom — stratégia spektruma, véges típusú stratégia, lényeges tiszta stratégia, ekvalizátor stratégia — bevezetése után a két legfontosabb speciális eset, a szeparábilis játékok és a konvex játékok tárgyalása következik. Sajnos hiányoznak az alkalmazási példák, pedig ilyenek bizonyára lennének. Ezután további két speciális eset, az analitikus és a harang alakú játékok tárgyalása következik. Nagyon érdekes az ún. időjátékokat behatóan tárgyaló rész, de ezek alkalmazhatóságának tárgyalásával is lehetett volna egy kicsit többet foglalkozni. Szerepel egy, az egyszerűen lejtátszott játékok közelítő megoldására szolgáló módszer vázlatos leírása is.

További végtelen stratégiahalmazú játékokkal foglalkozik a *Konvex-konkáv és poliéder játékok*, valamint a *Dinamikus (vagy szekvenciális) játékok* c. rész. Érdekes problémákat tárgyal a fejezet befejező része *A természet elleni játékok és a statisztikai döntésmélet* címmel. Nagyon jól szolgálja a teljesebb megértést, hogy itt

a bayesi döntés szemléltetésére szerepel egy egyszerű numerikus példa.

Az ötödik fejezet speciális  $n$ -személyes játékokat tárgyal. Két érdekes tételt láthatunk először arra vonatkozóan, hogy mi biztosítja az  $n$ -személyes játék egyensúlypontjának egyértelműségét. Ezután a gazdasági alkalmazhatóság szempontjából igen érdekes oligopol játék tárgyalása következik. A tétel bizonyos feltételek mellett az oligopol játék egyensúlypontjának egyértelműségét biztosítja. A bizonyítás alapján numerikus eljárás adható az oligopol játék megoldására, melynek működését egy kidolgozott példa szemlélteti. A következő részben véges  $n$ -személyes játékok egy megoldási módszere szerepel, amely egy nemlineáris programozási feladatra való visszavezetésen alapul.

A hatodik fejezet a kooperatív játékok elméletével foglalkozik (az eddigiekben csak nem-kooperatív játékok szerepeltek). Először néhány fogalom kerül bevezetésre: koalíció, koalícióstruktúra, karakterisztikus függvény, elosztás, lényeges és nem lényeges játék, dominancia valamely koalícióra nézve, koalíciós játékok ekvivalenciája és izomorfiaja, normalizáltsága, majd néhány egyszerű tétel következik. Ezután a kooperatív játékok különböző megoldásfoglalmainak ismertetése következik. Ezek: a Neumann megoldás, a Shapley megoldás, a Nash megoldás, Nash status quo javaslata, Raiffa megoldás koncepciója, Braithwaite megoldás koncepciója. A következő rész a megegyezéssel (bargaining) halmaz érdekes problémáival foglalkozik, bevezeti a nyerő és a vesztes koalíció, különféle stabilitások, a quota játék fogalmát és néhány tételt közöl bizonyítás nélkül. Érdekes problémákkal foglalkoznak a fejezet további részei, ezek: *Participációfüggvénnyel adott játék*, *Kompensáció nélküli játékok*, *Egy piaci játék*.

A hetedik fejezet a koalíciómentes játékokra vonatkozó Nash-féle egyensúlyi stratégiákkal (melyek a mátrixjátékok speciális esetében a minimax stratégiák) kapcsolatban felmerülő értelmezési problémákkal, az ilyen egyensúlyi stratégiák jóságának, indokoltságának kérdésével foglalkozik. Ez a problémakör a játékelméletet ért sok bíráló forrása volt, részben annak figyelmen kívül hagyása miatt, hogy az egyensúlyi stratégia nem jelent valami optimális viselkedésmódot, és alkalmazása csak bizonyos feltételek teljesülése esetében javasolható.

A függelékben néhány, a könyvben segédeszközként felhasznált elméleti eredmény bizonyítása szerepel.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy ez a matematikai igényességgel megírt könyv

átfogó és alapos ismereteket nyújt a matematika egyik új ágáról, a játékelméletről. a magyar könyvpiacra a mű minden bizonynyal hézagpótló. Remélhetőleg a Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó most megindított sorozatának további kötetei is hasonló, magas színvonalú munkák lesznek.

KÁDÁS SÁNDOR

GOLDBERGER, A. S.—DUNCAN, O. D. (szerk.): *Structural equation models in the social sciences*. New York—London, 1973. Seminar Press. 358 p.

Az elmúlt tíz évben a társadalomtudományokban — így a szociológiában, szociálpszichológiában, politológiában is — megnőtt az érdeklődés az ökonometriai módszerek alkalmazása iránt. Olyan problémákra próbálták azokat alkalmazni, mint a nemzedékek közötti társadalmi mobilitás, a faji megkülönböztetés, az iskolai tanulmányi eredmények és a továbbtanulás meghatározói, szociálpolitikai programok eredményeinek mérése. Az ilyen irányú törekvések módszereit nevezték szimultán egyenletrendszernek, lineáris kauzális sémáknak, útelemzésnek, strukturális egyenletekből álló modelleknek stb. Közös vonásuk, hogy — mivel laboratóriumi kísérleteket nem lehet alkalmazni — statisztikai adatokat kell felhasználni és matematikai statisztikai módszerekkel kell a különböző összefüggéseket meghatározni. Gyakran szerepelnek ezekben a modellekben olyan látens változók, amelyeket közvetlenül nem lehet mérni, csak különböző jelzőszámok alapján lehet alakulásukról következtetni. Például az intellektuális képességekre következettethünk különböző tesztek eredményeiből, a motivációkra következettethünk különböző kérdésekre adott válaszokból. Ebből következően sokszor előfordul e modellekben a túlidentifikáltság problémája: egy látens változó értékére több megfigyelt jelzőszám értékéből is következettethünk. Jellemzi ezeket a modelleket a rendszer-jelleg is: több egyenletből állnak, amelyek között kölcsönös összefüggések is vannak.

A kötet egy konferencia előadásait tartalmazza. Ezen részt vettek ökonometerek, közgazdászok, szociológusok, pszichológusok. Közös törekvésük a társadalomtudományok matematizálása és kvantifikálása, módszertani problémák megoldása. Ezek elsősorban: a szimultán egyenletek becslése, a meg nem figyelhető változók beépítése a modellbe megfigyelhető jelzőszámaik

alapján, ezzel összefüggésben a túlidentifikáltság és a változóknak hibát tartalmazó egyenletek kezelése.

E problémák megoldásánál lényeges szerepet játszik az a tény, hogy nem egyszerű regressziós modelleket alkalmaznak, hanem a strukturális egyenletekből álló modelleket. Az utóbbiakon azt kell érteni, hogy az egyenletek ok-okozati összefüggéseket fejeznek ki. Ezért használnak gyakran útmodelleket, ahol az okozati összefüggéseket az utábrán nyilakkal és a melléjük írt útegyütthatókkal jellemzik. Az utábrák nagyon határozott hipotéziseket tartalmaznak arra vonatkozóan, hogy a különböző változók közötti ok-okozati összefüggések milyen irányúak és bizonyos változók közötti összefüggéseket nemlétezőeknek vesznek, így a megfelelő korrelációkat nem is vizsgálják. Ennek következtében e modellek sokszor szigorúan rekurzív vagy legalább blokk-rekurzív természetűek. Ezért a legkisebb négyzetek módszerét lehet a paraméterek becslésére használni.

A könyv első kétharmad része főképpen becslési problémákkal foglalkozik. Ilyenek a következők: a paraméterek becslése dichotóm változók esetében, abban az esetben, ha a megfigyelhető dichotóm változó csak kisebb-nagyobb hibával jelzi a vizsgálni kívánt változó értékét; a nem megfigyelhető változók paramétereinek becslése megfigyelhető jelzőszámaik alapján; az egyenletekben levő hibákat és a változóknak levő hibákat egyaránt figyelembe vevő modellek paramétereinek becslése; a legkisebb négyzetek módszerének módosított változata az olyan kis adatbázisok esetére, amikor a predeterminált változók száma nagyobb a megfigyelések számánál; a túlidentifikált modellek hatékony becslése a különféle jelzőszámokból kapott becslések súlyozott átlagolása alapján; a közös faktor meglétének vizsgálata több változónak panel-adatok alapján becsült modellje esetén a szinkron korrelációk, autokorrelációk és keresztkétes korrelációk alapján; az indikátorok hibáinak felkutatása olyan modellekben, amelyekben a ténylegesen vizsgálni kívánt változókat nem tudjuk mérni, de több indikátorunk van alakulásukra vonatkozóan; az arányszámok változóként való felhasználásának veszélyei útmodellekben.

A könyv utolsó egyharmada különböző empirikus vizsgálatoknak strukturális modellekkel való elemzését mutatja be. A következőkben leírt példa érdekelte, hogy milyen jellegű modellekről van szó. Blau és Duncan eredetileg egy olyan útmodell segítségével elemezték a társadalmi mobilitást Amerikában, amelyben két exogén

változó szerepelt: az apa foglalkozása és iskolai vezettsége. A három egyenlet három endogén változót tartalmazott: az összeírt férfi iskolai végzettségét, első kereső foglalkozását és az összeíráskori foglalkozását. Mindegyik változó értékét egy pontszám fejezte ki. A modell rekurzív: az iskolai végzettség a két exogén változótól függ, az első kereső foglalkozás az iskolai végzettségtől és az exogén változóktól függ, az összeíráskori foglalkozás az iskolai végzettségtől és az első foglalkozástól, valamint az exogén változóktól függ. A könyvben több kísérletet tesznek ennek az alapmodellnek — különböző adatforrások alapján végzett — kibővítésére. Például az exogén változók közé felveszik a szülők jövedelmét, az intelligenciát és a vallási-kulturális háttérét. Feltételezik, hogy az exogén változók nem közvetlenül, hanem bizonyos pszichológiai változókon, például a foglalkozási aspirációkon és a továbbtanulási szándékon, keresztül befolyásolják az összeírt karrierjét. Ezeket a pszichológiai változókat nem lehet közvetlenül mérni, csupán bizonyos közvetett információk alapján. A továbbtanulást befolyásolja a környezet részéről kapott ösztönzés, ennek három ösztönzőjét különböztetik meg: a szülők és a tanárok ösztönzését, valamint a barátok továbbtanulási szándékait. Minden esetben összefüggéseket számszerűsítik és a

becsült paraméterek alapján elemzik a különböző tényezők hatásának egymáshoz viszonyított erősségét.

A könyvben tárgyalt modellre vonatkozóan, amely közgazdaságtani problémára vonatkozik, érzékelteti a túlidentifikáltság problémáját. Két változót tartalmaz a modell: a gazdasági és a politikai fejlettséget. Az az alapfeltételezése, hogy a gazdasági fejlettség határozza meg a politikai állapotokat. Azonban sem a gazdasági, sem a politikai fejlettséget nem lehet közvetlenül mérni, csupán jelzőszámaik alapján következtethetünk rájuk. A gazdasági fejlődés három figyelembe vett jelzőszáma az egy főre jutó nemzeti jövedelem, az energiafogyasztás és a munkaerő ágazati megoszlásának egy mutatója. A politikai állapotokat hat jelzőszám jellemzi, mint például a kormányok stabilitása, az országgyűlés szerepe stb. A jelzőszámokból — a faktoranalízis technikájával — számítják ki a két alapvető változót, majd a közöttük levő korrelációs kapcsolatot. Különböző alternatív modellekkel, egyes jelzőszámok elhagyásával próbálják ki, hogy melyik jelzőszám mennyire jól mutatja a megfelelő alapváltozó alakulását, és hogy a feltételezett összefüggések mekkora hibákat tartalmaznak.

ANDORKA RUDOLF