Tóth József—Varga Károly

Az egészértékű programozás egy alkalmazási lehetősége a mezőgazdasági vállalatok tervezésében

A matematikai programozás alkalmazásának a gyakorlati tervezésben való széles körű elterjesztése megkívánja, hogy a valóságot mindinkább hűen kifejező modelleket dolgozzunk ki. A mezőgazdasági vállalatok tervezése során — a biológiai folyamatok, a természeti tényezők, a munka idényszerűsége, az ágazatok közötti sokoldalú komplex kapcsolatok, a föld korlátozott területe és minőségi differenciáltsága stb. következtében — különösen sok megoldandó probléma merül fel.

A mezőgazdasági gyakorlatban ez ideig leginkább a lineáris programozást alkalmazták, amelyet egyszerűen a

$$\max. \{p^* x \mid A x \leq b\}$$

és

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^* \in E_n^+$$

formában fogalmaztunk meg, ahol

x a termelési (szolgáltatási, piaci, pénzügyi stb.) tevékenységek vektora,
A technológiai mátrix,
b kapacitások vektora,
p^* a tevékenységek hatékonysági koefficienseinek (sor) vektora,
E_n^+ az n dimenziós Euklidészi-tér nem negatív vektorainak halmaza

Az így megfogalmazott lineáris programozási modellből nem következik ugyan, hogy a termelési kapacitások előre eleve meghatározottak, mégis a mezőgazdaságban a gyakorlati tervezési modelleket általában úgy építették fel, hogy a termelési kapacitásokat eleve meghatározottnak tekintették, s e feltételek mellett optimalizálták a termelési szerkezetet (a termelési, szolgáltatási, piaci és pénzügyi tevékenységeket). A lineáris programozási modellek ilyen formában történő alkalmazása különösen két szempontból bírálható [7].

Egyrészt különösen középtávú vagy távlati tervezés során nem tudhatjuk előre, hogy például a különböző gépekből (a különböző traktorokból, betakarítógépekből stb.) mennyi áll majd rendelkezésre a terv megvalósításának időpontjában. A meglevő gépek (és más állóeszközök) egy része ugyanis addigra elhasználódik, s mind az elhasználódott gépek amortizációs alapjából, mind a felhalmozott fejlesztési alapokból beruházásokra fordítható pénzeszközök felhasználásával gépek és más állóeszközök szerezhetők be. Nem volna célszerű már a tervezés kezdeti szakaszában a matematikai modell összeállítása előtt vagy azzal egyidejűleg eldönteni, hogy a felhalmozott pénzösszegből milyen géptípust, milyen mennyiségben szerezzünk be. Így ugyanis eleve egy meghatározott — és egyáltalán nem biztos, hogy optimális — gépparkhoz optimalizálnánk a gazdálkodás szerkezetét.

A mezőgazdasági vállalatok nem azt kívánják a tervezőktől, hogy például az adott gépparkhoz optimalizálják a termelés szerkezetét (különösen távlati tervezés során), hanem azt, hogy készítsék el az optimális vállalatfejlesztési tervet. Tekintve, hogy a termelési szerkezet és a termelési források (például géppark) között kölcsönös összefüggés, egymásrahatás áll fenn, a feladat megoldása a termelési (szolgáltatási, piaci, pénzügyi tevékenységek) szerkezet* és a termelési források egyidejű, egymással kölcsönös összefüggésben történő optimalizálását igényli.

Másrészt az állóeszközökkel kapcsolatos költségek két részre bonthatók fel. A költségek egy része változó költség és függ (többé-kevésbé lineárisan) az adott állóeszköz felhasználásától, azaz lényegében a termelési tevékenységek méretétől, vagyis a termelési szerkezettől. (Például üzemanyag, kenőanyag, a javítási költség egy része.) E költségek egyszerűen ráterhelhetők a termelési tevékenységekre. A költségek másik része az úgynevezett állandó vagy fix költségek viszont akkor is felmerülnek, ha az adott eszközt egyáltalán nem használjuk (például amortizáció, a tárolóhely költségei, a javítási költségek egy része). E költségek tehát adott állóeszköz kapacitás esetén függetlenek a termelés szerkezetétől, adott időszakra (például egy évre) meghatározottak.

Ha a költségeket egységnyi termelésre vonatkoztatjuk, akkor azt látjuk, hogy a termeléssel arányosan változó költségek — éppen arányos változásuk miatt — egységnyi termelésre adottak, míg a fix költségek a termelés méretétől és szerkezetétől függnek. Az állóeszközök kihasználásának ismerete nélkül tehát az egységnyi termékre jutó fix költségeket nem ismerjük.**

A gyakorlatban általában azt az eljárást követik, hogy az állóeszközök fix költségeit az eszközök átlagos kihasználtságát feltételezve vetítik egységnyi termelésre vagy egységnyi munkavégzésre.

Az állóeszközök kihasználása azonban a termelési szerkezettől függ. Ha például adva van egy gép, amelynek évi amortizációs költsége 10 000 Ft és feltételezzük, hogy az adott gép 200 műszak munkát végez, akkor egy munkanapot 50 Ft amortizációs költség terhel. Ha azonban az optimumszámítások során olyan termelési szerkezetet kapunk, amely az adott gépre évi 150 vagy évi 250 műszak kihasználást biztosít, akkor valójában az egy munkanapra jutó amortizációs költség nem 50 Ft ,hanem 66 Ft, illetve 40 Ft lesz. A modellben tehát a célfüggvény — 50 Ft amortizációs költséget számolva — nem reális, sőt nagyon félrevezető lehet.

A termelési tevékenységek, valamint a termelési források kölcsönös összefüggése a termelési szerkezet és a termelési források egyidejű, egymással kölcsönös összefüggésben történő optimalizálását teszi szükségessé. Ilyen modellt dolgozott ki és alkalmazott a gyakorlatban is több termelőszövetkezet komplex vállalatfejlesztési tervének kidolgozásában Dr. Tóth József, majd felvetette a modell továbbfejlesztésének, az egészértékű programozás alkalmazásának szükségességét [8]. E modellből kiindulva és felhasználva a modellt

* A továbbiakban a rövidség érdekében általában csak termelési tevékenységet vagy termelési szerkezetet írunk, de azt tágabb értelemben, szolgáltatási, piaci, pénzügyi tevékenységekre is értelmezzük.

** E helyen csak az állóeszközökkel kapcsolatos költségeket vizsgáljuk, mivel módszertani szempontból jelenleg csak ezek érdekesek számunkra. A közvetett költségek és általános költségek vizsgálatától tehát eltekintünk.

illusztráló egyszerű számadatokat a továbbiakban ismertetjük az egészértékű programozás alkalmazásának egy lehetőségét és eredményességét. Nem térünk ki az ott ismertetett és a gyakorlati alkalmazás során felmerülő problémák megoldására, csupán a modell vázlatos ismertetését tűzzük ki feladatul, rámutatva az alkalmazás eredményességére.

Vezessük be a következő jelöléseket:

x az éves termelési (szolgáltatási, piaci, pénzügyi stb.) tevékenységek n_1 elemű vektora: j-edik eleme (x_j) a j-edik tevékenység szintjét ábrázolja.

y a termelési források n_2 elemű vektora; h-adik eleme (y_h) megmutatja a h-adik termelési forrásból jelentkező szükségleteket.

$\mathbf{A}^i$ technológiai mátrix, amelynek a^i_{hj} eleme megmutatja, hogy a j-edik termelési tevékenység egységének megvalósításához mennyi erőforrás szükséges a h-adik forrásból az i-edik figyelembe vett időszakban (illetve az i-edik számba vett minőségből). Megjegyezzük, hogy az igénybevétel idényszerűsége miatt pl. gépek esetében legalább havi időszakokra kell az évet bontani. A műtrágyafelhasználást pedig célszerű fajtánként vizsgálni stb.

b^i a termelési források egységének kapacitása az i-edik időszakban. $\langle b^i\rangle$ a b^i vektorból képezett diagonálmátrix.

f a tevékenységek fajlagos területigény vektora.

F az összes rendelkezésre álló földterület.

t a tevékenységekkel elérhető fajlagos termelési érték vagy árbevétel vektora.

c a tevékenységeket közvetlenül terhelő és a tevékenységek mértékével arányos költségek fajlagosai.

$p_1 = t - c$.

p_2 a termelési források fix költségeinek a vektora.

Fenti szimbólumokat felhasználva modellünk a következőképpen fogalmazható meg:*

$$\max \{p_1^* x - p_2^* y \mid f^* x = \mathrm{F}; -\mathbf{A}^i x + b^i y \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

$$x \in E^+_{n_1};\ y \in I^+_{n_2}\}$$

ahol $E^+_{n_1}$ az n_1 dimenziós euklidészi tér nem negatív ortánsa; az $I^+_{n_2}$ pedig az n_2 dimenziós euklidészi tér azon nem negatív vektorainak a halmaza, amelyeknek a koordinátái egész számok.

A lehetséges programok L halmazát tehát (x, y) vektorpárok alkotják. Olyan nem negatív (és y esetén egészértékű) vektorok, amelyek kielégítik a föld felhasználására vonatkozó $fx = \mathrm{F}$ korlátot,** valamint minden egyes számba vett időszakban (illetve számba vett minőségre vonatkozóan) nem igényelnek több erőforrást, mint amennyit a beállított termelési források biztosítanak. Ezt fejezi ki az a k darab reláció, amit a feltételrendszerben definiáltunk.

* Az egészértékű programozásról bővebben lásd Krekó B.: Optimumszámítás. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó Budapest, 1972. valamint az 1, 2, 3, 4, 5, 9 sorszám alatt felsorolt irodalmat.

** Ha nem ragaszkodunk a földterület teljes felhasználásához, akkor az $f\,x \leq \mathrm{F}$ feltételt alkalmazzuk.

Általában nyugodtan feltehetjük, hogy az L halmaz nem üres és általában azt is, hogy korlátos; valamint, hogy $p_1^*x + p_2^*x$ korlátos az L halmazon.

A fentiek értelmében egy olyan vegyes egészértékű matematikai programozási modellel állunk szembe, amelyben az x vektorok komponensei (a termelési tevékenységek vektora) folytonos, az y vektor komponensei (a termelési források vektora — vagy a termelési források egy részét képező vektor —) egészértékű változók.

A modell gazdasági tartalmát a következőképpen foglalhatjuk össze röviden: A modell változóit képezik mind a termelési (szolgáltatási, piaci, pénzügyi stb.) tevékenységek, mind pedig a termelési források. A változókat azonban két csoportra bontjuk, s az x vektor a termelési tevékenységeket, az y vektor pedig a termelési forrásokat jelöli, az előbbieket folytonos, az utóbbiakat pedig egészértékű változókként kezeljük. (Természetesen annak nincs akadálya, hogy a termelési tevékenységeket reprezentáló változók egy részét szintén egészértékű, illetve a termelési forrásokat reprezentáló változók egy részét (műtrágya, öntözővíz stb.) szintén folytonos változóként kezeljük. Többnyire azonban a forrás változóknál merül fel az egészértékűség követelménye (például: gépek, eszközök vagy dolgozók, amennyiben létszámuk változtatható.) A modell mérlegfeltételeiben csupán azt írhatjuk elő, hogy a termelési források kapacitása nem lehet kevesebb, mint az irányukban felmerülő szükséglet, de a kapacitásokat nem adjuk meg eleve, hanem azt a modell megoldása szolgáltatja.

A célfüggvény a jövedelem maximalizálását írja elő, azonban a termelési tevékenységekre csak a közvetlen költségeket (ideértve most az állóeszközökkel kapcsolatos, termeléssel arányosan változó költségeket is) terheljük, s a termelési források viselik fix költségüket.* Ezzel megszabadultunk attól a feladattól, hogy a fix költségeket előre — mielőtt a termelési szerkezetet és a gépek kihasználását ismernénk — osszuk fel a különböző tevékenységek között, amit amúgy sem lehet reálisan megoldani. A fix költségeknek a termelési változókra való terhelése modellünkben a számítások elvégzése során folyamatosan oldódik meg [7, 8]. A továbbiakban egyszerű példa alapján mutatjuk meg az egészértékű programozás alkalmazásának eredményességét. Tegyük fel, hogy egy olyan termelőszövetkezet fejlesztési tervét kell elkészíteni, amely (a problémát leegyszerűsítve) 100 ha területtel rendelkezik, azon 4 féle terméket termelhet (eltekinthetünk most a szolgáltatási, piaci, pénzügyi stb. tevékenységektől) és a termelésre kétféle termelési forrást, mondjuk kétféle gépet használnak. Tekintsünk el most a munkaerő, az anyagfelhasználás a talajtípusok, a gépek és eszközök részletes vizsgálatától, valamint a gépi munka felhasználásának részletesebb, legalább havi bontásában való vizsgálatától. Az egyszerűség kedvéért tehát csupán a földterületet, valamint két géptípus felhasználását kísérjük figyelemmel, s a gépi munkát csak két időszakra bontva vagy csak két csúcsidőszakban vesszük szemügyre.

Tételezzük fel, hogy az első terméket 1 hektáron termelve az első gép iránt az első időszakban 2, a második időszakban 4 műszakigény merül fel, a második gép iránt pedig az első időszakban 1, a második időszakban 3 műszakigény adódik. Ugyanezen sorrendben a gépi munka iránti igény a második termék 1 hektárjára 3, 2, 2, 1, a harmadik termék egy hektárjára 3, 1, 2, 2, a negyedik termék egy hektárjára pedig 2, 5, 2, 4.

* Az általános (igazgatási, szociális, kulturális) költségeket adottnak vesszük és a modellben általában nem szerepeltetjük, vagy külön változóval reprezentálhatjuk.

Tegyük fel még, hogy mindkét gép egy egysége az első időszakban 20, a második időszakban 30 műszak teljesítésére képes, s az első gépet évi 5000 Ft, a másodikat pedig évi 6000 Ft fix költség terheli.

A termékeket egy hektáron termelve a várható árbevétel legyen az első terméknél 2000, a másodiknál 1900, a harmadiknál 2100, a negyediknél pedig 2700 Ft. Sorrendben a termékeket terhelő változó költség 500, 600, 1100, 1000 Ft.

A fentiek alapján az árbevétel és a változó költség különbsége tehát $p^* = t^* - c^* = [1500, 1300, 1000, 1700]$

Ha a feladatot folytonos lineáris programozással oldjuk meg a következő eredményt kapjuk.

Az I. termékből termelendő	71,43 ha
A II. termékből termelendő	28,57 ha
A III. termékből termelendő	0 ha
A IV. termékből termelendő	0 ha
Összesen:	100,00 ha

A gépszükséglet:

Az első gépből	11,43 db
A második gépből	8,10 db

A jövedelem 38 536 Ft, hiszen $71{,}43 \cdot 1500 + 28{,}57 \cdot 1300 - 11{,}43 \cdot 5000 - 8{,}1 \cdot 6000 = 38\,536$ Ft.

Ez a jövedelem azonban csak akkor lenne igaz, ha az első gépből 11,43 db, a másodikból 8,1 db állna rendelkezésre. Azonban 0,43 db vagy 0,1 db traktor nem lehetséges, a traktorlétszám csak egész értékkel adható meg. Ha a feltételeket szigorúan vesszük, akkor az első gépből 12 db, a másodikból pedig 9 db a szükséglet az adott termelési szerkezet esetén. A jövedelem pedig $71{,}43 \cdot 1500 + 28{,}57 \cdot 1300 - 12 \cdot 5000 - 9 \cdot 6000 = 30\,286$ Ft, vagyis a géplétszám felkerekítése jelentősen csökkenti a jövedelmet. Azzal a feltételezéssel is élhetünk, hogy a két gép — ha például két traktorról van szó — helyettesítheti egymást, ezért az első gépből 12 db-ot, a másodikból 8 db-ot véve adjuk meg a feladat megoldását. A jövedelem ekkor 36 286 Ft, vagyis még mindig jelentős a kerekítésből adódó jövedelemcsökkenés. De ez egyben hamis eredmény is, hiszen a változó költségeket az adott traktortípussal végzett munkára terveztük meg, s ha a munkák egy részét a másik traktortípussal végezzük más lesz a változó költség is. Különben is helyettesítési lehetőségünk csak esetenként adódik és nem helyettesíthető például traktor vetőgéppel vagy kombájnnal és viszont. A mezőgazdasági vállalatok igen sokféle géppel dolgoznak, s az egészértékre történő utólagos kerekítések nem vezethetnek eredményre.

Ha a feladatot megoldjuk az előbbiekben megfogalmazott vegyes egészértékű modellel, akkor a következő eredményt kapjuk.

Az I. termékből termelendő	40 ha
A II. termékből termelendő	40 ha
A III. termékből termelendő	0 ha
A IV. termékből termelendő	20 ha
Összesen:	100 ha

A gépszükséglet:

	Az első gépből	12 db
	A második gépből	8 db

A jövedelem 38 000 Ft

Érdekes megfigyelni, hogy a géplétszám most is ugyanannyi, mint amikor utólag az első gépet 11,43 db-ról 12 db-ra, a másodikat 8,1 db-ról 8 db-ra kerekítettük (természetesen ez nincs mindig így), azonban a termelési szerkezet egészen más, és a jövedelem 36 286 Ft helyett 38 000 Ft, vagyis az egészértékű programozás alkalmazásával sokkal jobb — és egyben reális — eredményhez jutottunk. A jövedelem a folytonos modellhez képest az adott példában alig csökkent.

Modellünkben nem foglalkoztunk piaci, pénzügyi és egyéb korlátokkal, sem pedig a belső vállalati összefüggések vizsgálatával, amelyeket azonban a gyakorlati tervezés során mindig figyelembe kell venni.

Egyszerű példánk alapján is kitűnik, hogy a vegyes egészértékű modellek alkalmazása a mezőgazdasági vállalatok komplex tervének elkészítése során szükséges és eredményes. A gyakorlati célú vállalati modellekben természetesen sokféle tevékenység fordul elő, s ezek komplex kapcsolatát kell biztosítani, alkalmazkodva számos külső és belső feltételhez. A feladat azonban megoldható és az eddigi tapasztalatok azt bizonyítják, hogy modellünkkel gyakorlatilag is jól alkalmazható eredményes fejlesztési terv készíthető. A gyakorlati alkalmazás ismertetésére egy későbbi tanulmányban kerül sor.

(Beérkezett: 1973. december 8.)

IRODALOM

1. BOD P.: Bevezetés a gazdasági programozásba. Budapest, 1966. Tankönyvkiadó.
2. DANTZIG G. B.: On the significance of solving linear programing problems with some integer variables. Econometrica. 1960.
3. DANTZIG G. B.–FULKERSON D. R.–JOHNSON S. M.: Solution of a large scale traveling salesman problem. JORSA 1954. No. 2.
4. GOMORY R. E.: An algorithm for integer solutions to linear programs. Princeton – IBM Math. Res. Project. Techn. Rep. No. 1. 1958.
5. KRAJCSOVITS M.–LAMP T.–STAHL J.: Operációkutatás. Felsőfokú Technikumi Jegyzet. Budapest, 1965. Műszaki Könyvkiadó.
6. KREKÓ B.: Optimumszámítás. Budapest, 1972. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
7. TÓTH J.: A mezőgazdasági vállalatok tervezése célrealisztikus modell alapján. (Vezetés a mezőgazdaságban, az élelmiszeriparban, az erdészet- és faiparban.) Budapest 1972. 2. sz.
8. TÓTH J.: A termelési tényezők felhasználásának optimalizálása a mezőgazdaságban. Budapest, 1973. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
9. VARGA J.: Gazdasági programozás. Budapest, 1966. Tankönyvkiadó.

A CASE FOR INTEGER PROGRAMMING IN AGRICULTURAL ENTERPRISE PLANNING

As mathematical programming is widespread in practical planning we have to elaborate models reflecting reality more and more faithfully.

So far in agricultural practice linear programming has been applied at most for elaborating complex enterprise plans. It can be formulated as follows:

$$\max \{p^* x \mid Ax \leq b\} \quad \text{and}$$

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^* \in E_n^+$$

It does not follow from the linear programming problem formulated above, that production capacities are predetermined, still in agricultural practice the linear programming models have been built so that production capacities have been considered as predetermined.

On the one hand and especially in enterprise planning it is unknown how many machines and instruments will be available and the cumulated depreciation and development fund makes it possible to change machinery and other instruments. So it is notexpedient to optimize production pattern for predetermined machine and instrument cap acities.

On the other hand, costs, connected with fixed capital, can be devided into two groups: changing costs and fixed costs. As it is manifest from the simple problem above, it may be quite misleading to calculate fixed costs per unit of production, if the production pattern and the capacity demand of machines are unknown.

It is, however, expedient to optimize production pattern and production resources at the same time, depending on each other. In such a model it is necessary to treat resources (or part of them) as variables. The study introduces such a problem and illustrates its solution by a simple example, comparing the result with that of the model prescribing fixed capacities. In a further study the authors will publish the results of practical model computations.

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ПЛАНИРОВАНИИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Широкое распространение математического программирования в практике планирования требует, чтобы мы разработали модели, все более и более отражающие действительности.

До сих пор в сельском хозяйстве линейное программирование использовали для разработки комплексного плана предприятия и это имеется в следующей форме:

$$\max \{p^* \ x \mid Ax \leq b\}$$

$$x = [x_1, x_2 \ldots, x_n]^* \in E_n^+$$

Из задачи линейного программирования, составленной в вышеизложенной форме, не следует, что произвоственные мощности заранее определенные, но в сельскохозяйственной практике модели линейного программирования считали производственные мощности определенными.

С одной стороны, особенно при долгосрочном планировании, не знаем заранее, что сколько имеется разных машин и инструментов. Кроме того накопленный амортизационный фонд, а также фонд развития делают возможными изменение машинного парка и других инструментов. Следовательно не целесообразно оптимализировать структуру производства при определенных мощностях машин и инструментов.

С другой стороны расходы, связанные с основным фондом, можно разбить на две группы, постоянные расходы и переменные расходы. Постоянные расходы, приходящиеся на единицу мощности, прежде чем мы знали бы производственную структуру и на основе ее использования мощностей, могут привести к ложным результатам, как это выясняется на основе представленного простого примера.

Значит, целесообразно одновременно и совместно оптимализировать структуру производства и производственные мощности. Но при такой модели возникает необходимость, чтобы переменные мощности (или часть их) фигурировали как целочисленные переменные. Статья показывает формулирование задачи такого характера и простой пример иллюстрирует решение, сравнивая результат с результатом модели определенной мощности. В следующей статье показываем результаты расчетов на практических моделях.