FOGALMAK, MÓDSZEREK

PÁROS ÖSSZEHASONLÍTÁSOKON ALAPULÓ RANGSOROLÁSI MÓDSZEREK[1]

CSATÓ LÁSZLÓ
MTA-BCE „Lendület" Stratégiai Interakciók Kutatócsoport

A páronként összehasonlított alternatívák rangsorolásának problémája egyaránt felmerül a szavazáselmélet, a statisztika, a tudománymetria, a pszichológia és a sport területén. A nemzetközi szakirodalom alapján részletesen áttekintjük a megoldási lehetőségeket, bemutatjuk a gyakorlati alkalmazások során fellépő kérdések kezelésének, a valós adatoknak megfelelő matematikai környezet felépítésének módjait. Kiemelten tárgyaljuk a páros összehasonlítási mátrix megadását, az egyes pontozási eljárásokat és azok kapcsolatát. A tanulmány elméleti szempontból vizsgálja a Perron-Frobenius tételen alapuló invariáns, fair bets, PageRank, valamint az irányított gráfok csúcsainak rangsorolásra javasolt internal slackening és pozíciós erő módszereket. A közülük történő választáshoz az axiomatikus megközelítést ajánljuk, ennek keretében bemutatjuk az invariáns és a fair bets eljárások karakterizációját, és kitérünk a módszerek vitatható tulajdonságaira.

Kulcsszavak: preferenciák aggregálása, páros összehasonlítás, rangsorolás, karakterizáció

1 Bevezetés

A sportrajongók számtalanszor találkozhatnak azzal hírrel, hogy a következő hétfőtől érvényes világranglistát egy adott teniszező vezeti. De elgondolkodtunk-e már azon, vajon milyen számítások, megfontolások állhatnak a „hivatalos" sorrend mögött? A feladat megoldása meglehetősen nehéznek tűnik, amennyiben nem találunk olyan játékost, aki a vizsgált időszakban egyértelmű fölényben volt, egyetlen ellenfelétől sem szenvedett vereséget, márpedig legtöbbször ez a helyzet. A rangsor felállításához több szempontot

[1]A kutatás a TÁMOP 4.2.4.A/1-11-1-2012-0001 azonosító számú Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése országos program című kiemelt projekt keretében zajlott. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg. A szerző köszönetet mond az OTKA K-77420 pályázat pénzügyi támogatásáért. Hálával tartozom *Bozóki Sándornak* a kézirat elolvasásért és fontos észrevételeiért, valamint két anonim bírálónak hasznos tanácsaikért. Beérkezett: 2013. július 16. E-mail: `laszlo.csato@uni-corvinus.hu`.

szükséges figyelembe vennünk. Melyik mérkőzések eredményei alapján dolgozunk? Ez egyszerre jelenthet időbeli és / vagy térbeli (melyik tornákat vizsgáljuk) lehatárolást. A kérdésre adott válasz megadja a vizsgálandó teniszezők körét: olyan sorrendet kell találnunk, melyben minden, az elemzett mérkőzések valamelyikén résztvevő játékos szerepel. Az előbbiek eredménye hordoz információt a két teniszező egymással való kapcsolatáról, ezért biztosan számításba kell venni. Ráadásul ez egy többdimenziós változó: egyszerre különbözhet a mérkőzések száma és azok kimenetele. Lényegében egy olyan függvény definiálása válik szükségessé, amely tetszőleges, egymás elleni teniszmeccs alapján képes a játékosok teljesítményének értékelésére, azok rangsorolására.

Az ehhez hasonló komplex, többszempontú döntések meghozatala során gyakran nem lehetséges az alternatívák egyetlen, objektív skálán történő értékelése. Amennyiben mégis szükség van ezek rangsorolására, ez sokszor, mint a fenti tenisz világranglistánál, páronkénti összehasonlításuk alapján tehető meg.

Az utóbbi időben hazai szerzőktől több, hasonló témájú cikk született (Kóczy és Strobel, 2010; Csendes és Antal, 2010; London és Csendes, 2013; Telcs et al., 2013), ugyanakkor eddig nem született magyar nyelvű (ebben a szerkezetben másmilyen sem) tárgyalás erről a területről. Nem ismerünk olyan áttekintést sem, amelyben egymás mellett szerepelnének az itt tárgyalt invariáns, fair bets, internal slackening és pozíciós erő módszerek, valamint az ezekkel kapcsolatos kritikák. Az egységes tárgyalás következtében lehetőségünk nyílik néhány, eddig nem formalizált gondolat megfogalmazására: ilyen Slutzki és Volij (2005) ötlete nyomán a módszerek duális változatának bevezetése, vagy az eljárások részletes elemzése a Kóczy és Strobel (2010) által bevezetett monotonitás és a megfordíthatóság tekintetében; előbbi esetén néhány probléma még megoldásra vár. Végül – tudomásunk szerint először – rámutatunk az egyik eljárás, a legkisebb négyzetek módszerének több, egymástól független „felfedezésére": Éltető és Köves (1964) statisztikai, Gulliksen (1956) pszichológiai vagy Bozóki et al. (2010) matematikai-döntéselméleti témájú tanulmányára.

A cikk egyszerre tartalmaz irodalmi áttekintést és bizonyos módszerek részletes tárgyalását, emellett néhány alkalmazási lehetőséget is bemutat. Ezért bizonyára lesznek olyan olvasók, akik valamelyik részt túlságosan hosszúnak, unalmasnak tartják, míg egy másikban a részletes kifejtést hiányolják; az ebből fakadó negatív érzéseket a megadott hivatkozások mérsékelhetik. A mindenre kiterjedő tárgyalás már terjedelmi okokból is lehetetlennek tűnik, ráadásul a szerző sem állíthatja magáról, hogy mindegyik területnek szakértője lenne. Ezért a tanulmány egyik legfőbb célja, hogy egyszerre nyújtson támpontot a módszertani háttér iránt érdeklődő elméleti, és a felhasználásra törekvő, gyakorlati problémákkal foglalkozó kutatóknak.

Tárgyalásunk menete a következő. A 2. fejezetben bemutatjuk a páros összehasonlításon alapuló rangsorolás egy modelljét, definiáljuk a feladat megoldására szolgáló pontozási eljárást, és ezek bizonyos tulajdonságait. A 3. fejezet – axiomatikus megközelítésből – áttekintést ad az irodalomban javasolt módszerekről, és részletesen tárgyalja az invariáns, fair bets, PageRank, internal slackening, valamint a pozíciós erő eljárásokat. Kitérünk az alkalmazásuk mögött meghúzódó gondolatokra, az ismert karakterizációkra, és a módszerek vitatható pontjaira. A modell felhasználásának területeit a 4. fejezet ismerteti, ahol néhány tanácsot is megfogalmazunk a módszertan gyakorlati alkalmazása iránt érdeklődők számára. Eredményeinket és a további kutatási irányokat az 5. fejezetben összegezzük.

2 A rangsorolási probléma és megoldása

A feladat megoldásához szükségünk lesz a vizsgált alternatívák (objektumok) halmazára, azok páros összehasonlításainak eredményeire, illetve egy olyan eljárásra, mely a fentiek ismeretében megadja az objektumok sorrendjét. Az első alfejezet a probléma definiálásával, a második a rangsorolás végrehajtásával foglalkozik, míg a harmadik az utóbbira használt eljárásokkal kapcsolatos tulajdonságokat fogalmaz meg.

2.1 A páros összehasonlítási mátrix

Az alternatívák halmazát jelölje $N = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. A rendelkezésre álló információkat egy $\mathbf{R} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ *páros összehasonlítási mátrix*ba tömörítjük.[2] Ennek r_{ij} eleme az X_i alternativa X_j elleni teljesítményét, $r_{ij} + r_{ji}$ pedig az összehasonlításaik számát mutatja, így $r_{ij}/(r_{ij} + r_{ji})$ egy lehetséges értelmezése, hogy az előbbi ekkora eséllyel bizonyul jobbnak az utóbbinál. A mátrix főátlójában szereplő elemek a feladat megoldása szempontjából lényegtelenek. Ez a modell a következő jelenségek leírására alkalmas:

1. Döntetlenek lehetősége ($r_{ij} = r_{ji}$): a döntéshozó nem képes különbséget tenni két alternatíva között;
2. Eltérő preferenciaintenzitás ($r_{ij} \geq 0$ tetszőleges): a páros összehasonlítások eredménye nem binárisan (jobb/rosszabb) adott, hanem például gyakorisági alapon – az X_i alternatíva az esetek 80%-ában bizonyult jobbnak X_j-nél;
3. Hiányzó összehasonlítás ($r_{ij} + r_{ji} = 0$): két alternatíva egymás elleni teljesítménye ismeretlen;
4. Többszörös összehasonlítás ($r_{ij} + r_{ji} > 1$): egyes alternatívapárok viszonya több alkalommal került meghatározásra (például két teniszező több mérkőzést játszott egymással), esetleg különbözhet az összehasonlítások megbízhatósága;

Ugyanakkor két lehetőséget nem képes megjeleníteni:

[2]Ezt az angol terminológia a *paired comparison matrix* névvel illeti, ami nem ugyanaz, mint az AHP (Analytic Hierarchy Process) módszertanban használt páros összehasonlítás mátrix, azaz *pairwise comparison matrix* (Saaty, 1980).

1. Nem szimmetrikus eredmények: két alternatíva páros összehasonlításakor nem lehet eltekinteni ennek irányától.

2. ,,Önmagával" vett összehasonlítás.

A fenti esetek egy gráf segítségével szemléltethetők, melynek minden csúcsa egy-egy alternatívának, az élek pedig a köztük levő összehasonlításoknak felelnek meg. Amennyiben az előzőekben említett komplikációk egyike sem áll fenn, olyan teljes irányított gráfról beszélhetünk, ahol az élek irányítása a szigorú preferenciarelációt írja le. Döntetlenek esetén két csúcs között oda-vissza irányú élek keletkezhetnek. Különböző intenzitások mellett súlyozott irányított gráfot kapunk. Hiányzó párok esetén a gráf nem teljes. Többszörös összehasonlításoknál két csúcsot több (akár súlyozott) él is összeköthet. Nem szimmetrikus eredmények következtében a két csúcs közötti élek súlya eltérő lehet attól függően, melyik irányba mutatnak, míg az ,,önmagával" vett összehasonlítások hurokélekként jelenhetnek meg.

A nem szimmetrikus eredmények beépítése meglehetősen nehéz és ritka, bár jól ismert, hogy például a sportban komoly jelentősége lehet. A fenti keret szinte az összes, szakirodalomban ismert páros összehasonlítás definíciót magában foglalja, talán az egyetlen kivétel a súlyozott irányított gráf esete, mely megengedi az egyes csúcsokhoz tartozó pozitív súlyú hurokéleket (Herings et al., 2005). A 4. fejezetben bemutatott tudománymetriai problémákra ez nem feltétlenül igaz, ott az önhivatkozásoknak is lehet jelentősége.

2.1. Definíció. A *rangsorolási probléma* egy $(N, \mathbf{R})$ pár, ahol $N = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ az alternatívák halmaza, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pedig a páros összehasonlítási mátrix.

Bizonyos esetekben, elsősorban a könnyebb értelmezés okán célszerű lehet a páros összehasonlítások számát és kimenetelét egyaránt magába foglaló $\mathbf{R}$ mátrix két részre bontása: ekkor azok kimenetele a ferdén szimmetrikus $\mathbf{A}$ eredménymátrixba ($\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$) kerül az $a_{ij} = 2(r_{ij} - r_{ji})$ transzformációval, míg az összehasonlítások számát a szimmetrikus $\mathbf{M}$ mérkőzésmátrix tartalmazza, tehát $m_{ij} = r_{ij} + r_{ji}$ (Csató, 2013b). Az így kapott $\mathbf{A}$ eredménymátrix azonos a Saaty-féle páros összehasonlítás mátrixszal (Saaty, 1980), amennyiben az utóbbi elemenkénti logaritmusait vesszük (Csató, 2012). A 4. fejezetben tárgyalt alkalmazások egy része ezt a formalizmust használja (Csató, 2012; Temesi et al., 2012).

Az $\mathbf{M}$ mérkőzésmátrix kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető a rangsorolási problémához tartozó $G = (V, E)$ összehasonlítási (multi)gráffal, ahol a csúcsok halmaza $V = N$, míg az E élhalmaz úgy kapható, hogy az X_i és X_j csúcs közötti élek száma $m_{ij} = m_{ji}$.

2.2 Rangsorolás

Az $\mathbf{R}$ páros összehasonlítási mátrix definiálása után a következő feladatot az alternatívák sorba rendezése jelenti. A rangsor egy, az N halmazon értelmezett teljes, tranzitív és reflexív bináris reláció. Egyfajta információtömörítés válik szükségessé: az n objektum $n(n-1)/2$ kölcsönös „távolságát” kellene megfelelően leírni a megoldásként kapott rangsorból adódó $n-1$ különbséggel. Ez $n = 2$ esetén tökéletesen reprodukálható, két alternatíva esetén a páros összehasonlítás kimenetele minden információt megad a sorrendről. Ha viszont ezek száma legalább három, már felmerülhet a Condorcet-paradoxonból ismerős intranzitivitás problémája, amikor X_1 jobbnak bizonyul X_2-nél, X_2 megveri X_3-at, X_3 viszont legyőzi X_1-et.

Moulin (1986) tanácsát követve célszerű elkülönítve vizsgálni a győztes megadásának, illetve egy teljes rangsor felállításának kérdését. Bár Bouyssou (2004) kísérletet tett a két megközelítés egyesítésére a legjobb alternatíva kiválasztásának sorozatos alkalmazása révén, eredményei arra utalnak, hogy az így definiált eljárások szinte mindig megsértenek valamilyen monotonitási tulajdonságot, ezért a probléma megoldására inkább a közvetlen rangsoroló eljárások ajánlottak.

Ezek szintén két csoportba sorolhatók: egy $f(\mathbf{R}) \in \mathbb{R}^n$ függvény formájában adott *pontozási módszer*, vagy a rangsorolás diszkrét optimalizálási problémaként való felfogása (Kemeny, 1959; Slater, 1961). Az utóbbi megközelítés gyakran matematikai szempontból szép és mély kombinatorikus kérdésekhez, illetve bonyolult algoritmikus problémákhoz vezet (Hudry, 2009), de több szempontból kifogásolható:

1. Nem teljes (hiányos) összehasonlítások esetén a lineáris rendezést gyenge rendezéssel célszerű felváltani, de még ez sem biztosítja egyes elvárható tulajdonságok, például az önkonzisztens monotonitás (self-consistent monotonicity) teljesülését (Chebotarev és Shamis, 1997);

2. A kapott sorrend gyakran nem egyértelmű, többszörös optimumok létezhetnek. Ez nem csak a kisméretű, kevés alternatívát tartalmazó esetekben képzelhető el, a gyakorlati alkalmazások során is komoly problémát jelent (Pasteur, 2010);

3. Nehéz az ilyen módszerek normatív tulajdonságainak vizsgálata (Bouyssou, 2004).

A fenti problémák ellenére kétségtelenül vonzó egy valamilyen szempontból optimális megoldás megadása. A bináris, csak győzelmeket és vereségeket megengedő esetben például kézenfekvő választás azon összehasonlítások számának minimalizálása, ahol a rangsorban hátrébb található alternatíva jobbnak bizonyult egy nála előkelőbb helyen szereplőnél; ez a *minimum violations* néven ismert (Ali et al., 1986).

2.3 Pontozási eljárások tulajdonságai

2.3.1 Megoldhatóság

Egyelőre tekintsük az általános esetet, amikor az $\mathbf{R}$ páros összehasonlítási mátrixra semmilyen megkötés sincs. Jelölje $\mathcal{R}$ a véges $N \subseteq \mathbb{N}$ objektumhalmazzal rendelkező rangsorolási problémák osztályát.

2.2. Definíció. A *pontozási eljárás* egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ függvény.[3]

Az $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ és $g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási módszerek *arányos*ak, $f(\mathbf{R}) \propto g(\mathbf{R})$, ha minden $\mathbf{R} \in \mathcal{R}$ esetén $\exists \kappa > 0 : f(\mathbf{R})_i = \kappa g(\mathbf{R})_i$ minden $X_i \in N$-re.

Bizonyos esetekben reménytelennek tűnik egy teljes rangsor felállítása: amennyiben két objektum között sehogyan sem található kapcsolat, akkor lehetetlen megállapítani sorrendjüket.[4] A megoldás egyértelműsége azért kívánatos, mert a döntéshozók nehezen tudnának értelmezni több, egymástól eltérő sorrendet – bár a fejezet elején említett információtömörítési értelmezés alapján n növekedésével egyre nagyobb valószínűséggel fordulhat elő, hogy az alternatívák teljesítménye nem mérhető egyetlen dimenzióban. Ez az érv szintén a diszkrét optimalizálási problémaként történő kezelés ellen szól.

A pontozási eljárások által szolgáltatott egyértelmű megoldás létezése tekintetében alapvetően három előfeltételt különböztethetünk meg:[5]

1. Az $\mathbf{R}$ páros összehasonlítási mátrix irreducibilitása. Ekkor az $r_{ij}/(r_{ij}+r_{ji})$ hányados valószínűségi interpretációjában egy tetszőleges objektum pozitív eséllyel győzheti le a többiek bármelyikét, amennyiben a nem összehasonlítottak között tetszőleges objektumláncon keresztül teremthető kapcsolat. Ez a szükséges és elégséges feltétel a maximum likelihood (Zermelo, 1929; Bradley és Terry, 1952), az invariáns és a fair bets módszer (Daniels, 1969; Moon és Pullman, 1970) esetén.

2. Az $\mathbf{M}$ mérkőzésmátrix irreducibilitása, azaz két tetszőleges objektum közvetlenül vagy közvetve összehasonlítható. Más szavakkal, a G összehasonlítási (multi)gráfnak összefüggőnek kell lennie. Ez az előzőnél gyengébb feltétel szükséges és elégséges a legkisebb négyzetek módszer megoldásának egyértelműségéhez.

3. Az eljárás az egész $\mathcal{R}$ halmazon jól definiált. Ez a helyzet a pontszám és az általánosított sorösszeg módszereknél, a maximum likelihood kiterjesztett változatánál (Conner és Grant, 2000), vagy a PageRanknél (Brin és Page, 1998).

A három közül intuitív alapon a második tűnik legvonzóbbnak. Egyrészt, ha két alternatíva egyáltalán nem hasonlítható össze, akkor alaptalannak tűnik bármit is mondani a relatív teljesítményükről. Célszerűbb a G összehasonlítási (multi)gráf összefüggő komponenseit kiválasztani, és a rangsorolást csak ezeken elvégezni. Másrészt, az irreducibilitás megkövetelése aránytalanul korlátozza az egymással összevethető elemek halmazát. Bizonyos mértékben az e halmazon értelmezett pontozási eljárások is általánosíthatók a következő szakaszban bemutatott eljárással (Zermelo, 1929).

[3] A meghatározás némileg pontatlan, mert n értéke függ a konkrét $(N, \mathbf{R})$ rangsorolási problémától, azonban nem akartuk tovább bonyolítani a jelöléseket.

[4] Gondoljunk például arra, hogyan hasonlítanánk össze két ország labdarúgó bajnokságának győzteseit, ha nem lennének nemzetközi versenysorozatok, a Bajnokok Ligája és az Európa Liga.

[5] Nem említve a játékelméletben javasolt módszereket, melyek általában a digráfok $\mathcal{D}$ halmazán értelmezettek.

2.3.2 A karakterizációhoz szükséges axiómák

Az invariáns és fair bets módszerek tárgyalásához szükséges az értelmezési tartomány megszorítása.

Azt mondjuk, hogy X_i *közvetve vagy közvetlenül legyőzi* X_j-t, azaz $X_i \to X_j$, ha létezik olyan $X_i = X_{k_0}, X_{k_1}, \ldots, X_{k_T} = X_j$ véges sorozat, melyre $\prod_{t=0}^{T-1} a_{k_t,k_{t+1}} > 0$. X_i és X_j *azonos ligába tartozik*, ha $X_i \leftrightarrow X_j$, vagyis $X_i \to X_j$ és $X_j \to X_i$ is fennáll. $\leftrightarrow$ ekvivalencia-reláció, az N alternatívahalmaz egy partícióját adja (Slutzki és Volij, 2005). Az ekvivalenciaosztályok *ligák*, az X_i objektumot tartalmazó liga jelölése $[X_i]$. Az $(N, \mathbf{R})$ rangsorolási probléma pontosan akkor áll egyetlen ligából, ha az $\mathbf{R}$ mátrix irreducibilis. Az ilyen problémák halmaza legyen $\mathcal{R}_N$.

Az X_i objektum ligája *erősebb* X_j-énél, tehát $[X_i] \to [X_j]$, ha $X_i \to X_j$, miközben $X_j \not\to X_i$. Két liga *összehasonlíthatatlan*, ha egyik sem erősebb a másiknál, így egy ligákon értelmezett irreflexív, tranzitív, és nem teljes relációt kapunk. A későbbiekben szükség lesz még egy osztályra, amikor a probléma több ligából is állhat, de ezek között létezik egyetlen legerősebb (unique top cycle). Ezen feladatok halmaza legyen $\mathcal{R}_1$. Nyilvánvalóan $\mathcal{R}_N \subseteq \mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}$. Minden $X_i \in N$-re az adott objektumot tartalmazó *rész rangsorolási probléma* $\left([X_i], \mathbf{R}_{[X_i]}\right)$, ahol $\mathbf{R}_{[X_i]}$ az $\mathbf{R}$ mátrix $[X_i]$-beli objektumokra korlátozott almátrixa.

2.3. Definíció. Egy $(N, \mathbf{R})$ rangsorolási probléma *kiegyensúlyozott* (balanced), ha $r_{i*} = r_{*i}$ minden $X_i \in N$-re (Slutzki és Volij, 2006).

2.4. Definíció. Egy $(N, \mathbf{R})$ kiegyensúlyozott rangsorolási probléma *szabályos* (regular), amennyiben $r_{i*} = r_{j*}$ minden $X_i, X_j \in N$-re (Slutzki és Volij, 2006).

Tehát egy sportbajnokság kiegyensúlyozott, ha minden játékos győzelmeinek és vereségeinek száma megegyezik. Ha ez az érték mindegyiküknél azonos, akkor a probléma szabályos. Slutzki és Volij (2005) ezt a tulajdonságot *erősen kiegyensúlyozott* (strongly balanced) néven említi.

2.1. Példa [Slutzki és Volij (2005) alapján]. Legyen $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ és

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A rangsorolási probléma három ligából áll: $[X_1] = \{X_1\}$, $[X_2] = [X_3] = [X_4] = \{X_2, X_3, X_4\}$, valamint $[X_5] = \{X_5\}$, tehát nem létezik egyetlen legerősebb liga, a probléma nem $\mathcal{R}_1$-beli. Az $[X_1]$ és $[X_5]$ ligák erősebbek $[X_2]$-nél, míg $[X_1]$ és $[X_5]$ nem összehasonlítható. Az $\left([X_2], \mathbf{R}_{[X_2]}\right) \in \mathcal{R}_N$

rész rangsorolási problémában

$$\mathbf{R}_{[X_2]} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

ahol a páros összehasonlítási mátrix már irreducibilis. Az $(\{X_2, X_3, X_4\}, \mathbf{R}_{[X_2]})$ rangsorolási probléma kiegyensúlyozott, hiszen minden objektum ugyanannyi győzelemmel és vereséggel rendelkezik, viszont nem szabályos, mert ezek száma (sorrendben) 2, 4 és 3.

2.1. Lemma. Egy $(N, \mathbf{R})$ rangsorolási probléma akkor és csak akkor kiegyensúlyozott, ha minden ligája kiegyensúlyozott és nem összehasonlítható (Slutzki és Volij, 2005).

A következőkben az értelmezési tartományt az irreducibilis $\mathbf{R}$ páros összehasonlítási mátrixszal jellemezhető rangsorolási problémák $\mathcal{R}_N$ osztályára szűkítjük.

2.5. Definíció. Egy $f : \mathcal{R}_N \to \mathbb{R}^n$ pontozási módszer *egységes* (uniform), ha minden $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}_N$ szabályos rangsorolási problémára $f_i(\mathbf{R}) = 1/n$ minden $X_i \in N$ esetén (Slutzki és Volij, 2006).

Az egységesség szerint, amennyiben minden játékos ugyanannyi győzelemmel és vereséggel rendelkezik, akkor a rangsorban sem teszünk köztük különbséget.

2.6. Definíció. Egy $f : \mathcal{R}_N \to \mathbb{R}^n$ pontozási módszer *erősen egységes* (strongly uniform), ha minden $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}_N$ kiegyensúlyozott rangsorolási problémára $f_i(\mathbf{R}) = 1/n$ minden $X_i \in N$ esetén (Slutzki és Volij, 2006).

Ez a feltétel szigorúbb, mint az egységesség. Az alternatívák megkülönböztethetetlenségének akkor is fenn kell állnia, ha a pozitív és negatív kimenetelek aránya azonosan egy.

2.7. Definíció. Egy $f : \mathcal{R}_N \to \mathbb{R}^n$ pontozási módszer *közömbös*[6] (neutral), ha minden $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}_N$ szabályos rangsorolási problémára és olyan $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixra, amelynek minden diagonális eleme 0 és $(N, \mathbf{R} + \mathbf{Q}) \in \mathcal{R}_N$ is rangsorolási probléma, $f_i(\mathbf{R}) = 1/n$ fennállásakor $f_i(\mathbf{R} + \mathbf{Q}) = 1/n$ (Slutzki és Volij, 2006).

Vagyis, ha egy szabályos feladatban az alternatívák értékelése teljesen azonos, és ezt úgy módosítjuk, hogy az új összehasonlításoknak minden objektum éppen a felét nyeri meg, akkor továbbra is egyenlően lesznek rangsorolva.

2.1. Állítás. *Egy $f : \mathcal{R}_N \to \mathbb{R}^n$ pontozási módszer akkor és csak akkor erősen egységes, ha egységes és közömbös* (Slutzki és Volij, 2006).

[6] A *neutral* kifejezés szokásos magyar fordítása semleges. Itt azért nem ezt használom, mert a rangsorolási irodalomban számos más helyen különböző jelentéssel jelenik meg ez a fogalom (Chebotarev és Shamis, 1999), és a magyarul célszerűnek tartottam eltérően elnevezni ezeket.

2.8. Definíció. Egy $f : \mathcal{R}_N \rightarrow I\!R^n$ pontozási módszer *gyengén additív* (weakly additive), ha minden $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}_N$ szabályos rangsorolási problémára és olyan $\mathbf{Q}$ szimmetrikus mátrixra, amelynek minden diagonális eleme 0 és $(N, \mathbf{R} + \mathbf{Q}) \in \mathcal{R}_N$ is rangsorolási probléma, $f_i(\mathbf{R})$ és (r_{i*}) arányosságából $[f_i(\mathbf{R}) \propto (r_{i*})]$ következik $f_i(\mathbf{R}+\mathbf{Q})$ és $(r_{i*} + q_{i*})$ arányossága $[f_i(\mathbf{R}+\mathbf{Q}) \propto (r_{i*} + q_{i*})]$ (Slutzki és Volij, 2006).

A gyenge additivitás szerint, ha egy szabályos rangsorolási problémában az alternatívák értékelése a győzelmeik számával azonos, és néhány párosításban új, döntetlen kimenetelű mérkőzéseket játszanak le, akkor azok relatív viszonyát továbbra is a győzelmek aránya határozza meg.

2.9. Definíció. Egy $f : \mathcal{R}_N \rightarrow I\!R^n$ pontozási módszer *invariáns a referencia intenzitásra* (invariant to reference intensity), ha minden $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}_N$ rangsorolási problémára és $\mathbf{\Lambda} \in I\!R^{n \times n}$ pozitív diagonális elemekkel rendelkező diagonális mátrixra $f(\mathbf{R}) = f(\mathbf{R\Lambda})$ (Slutzki és Volij, 2006).

A referencia intenzitásra való invariancia értelmében az objektumok vereségeinek arányos (de a vizsgált alternatívától függő) változtatása nem befolyásolja azok sorrendjét. Például weblapok rangsora nem változik, amennyiben valamelyik oldal az összes, általa megadott referencia számát konstansszorosára változtatja.

2.10. Definíció. Egy $f : \mathcal{R}_N \rightarrow I\!R^n$ pontozási módszer *fordítottan arányos a vereségekkel* (inversely proportional to losses), ha minden $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}_N$ kiegyensúlyozott rangsorolási problémára és $\mathbf{\Lambda} \in I\!R^{n \times n}$ pozitív diagonális elemekkel rendelkező diagonális mátrixra $f_i(\mathbf{R\Lambda})/f_j(\mathbf{R\Lambda}) = \lambda_{jj}/\lambda_{ii}$ minden $X_i, X_j \in N$ esetén (Slutzki és Volij, 2006).

A vereségekkel való fordított arányosság azt követeli meg, hogy egy, az alternatívák közötti sorrend meghatározására alkalmatlan kiegyensúlyozott rangsorolási problémában a vereségek számát konstansszorosára változtatva az objektumok értékelése ezzel fordított arányban változik. Egyetlen pontozási eljárás sem lehet egyszerre invariáns a referencia intenzitásra és fordítottan arányos a vereségekkel, hiszen a vereségek számának arányos módosítása eltérő következményekkel jár a két tulajdonság esetén, bár utóbbi feltételei szigorúbbak.

2.3.3 Az értelmezési tartományt kiterjesztő tulajdonságok

A következő tulajdonságok lehetővé teszik az irreducibilis páros összehasonlítási mátrixot eredményező, $\mathcal{R}_N$-beli rangsorolási problémák halmazán értelmezett pontozási módszerek kiterjesztését a teljes $\mathcal{R}$ osztályra.

Legyen $\mathcal{P}_N$ az N-en értelmezett lehetséges rangsorok, azaz reflexív és tranzitív (de nem feltétlenül teljes) bináris relációk halmaza. A *rangsorolási módszer* egy $\succeq : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{P}_N$ függvény, minden $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}$ rangsorolási problémához egy N-en értelmezett $\succeq_{\mathbf{R}}$ rangsort rendel. Az egyszerűség kedvéért, ha ez nem okoz félreértést, a feladatra utaló $\mathbf{R}$ alsó indexet elhagyjuk. $\succeq$ egyben meghatározza az alábbi relációkat:

1. $X_i \succ X_j$, azaz X_i jobb X_j-nél, ha $X_i \succeq X_j$ és $X_j \not\succeq X_i$;
2. $X_i \sim X_j$, azaz X_i és X_j azonos erősségű, ha $X_i \succeq X_j$ és $X_j \succeq X_i$;
3. $X_i \perp X_j$, azaz X_i és X_j nem összehasonlítható, ha $X_i \succeq X_j$ és $X_j \succeq X_i$ egyike sem áll fenn.

2.1. Megjegyzés. Minden $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás meghatároz egy $\succeq^f : \mathcal{R} \to \mathcal{P}_N$ rangsorolási módszert az $f(\mathbf{R})_i \geq f(\mathbf{R})_j \Rightarrow X_i \succeq^f X_j$ definícióval. A kapott rangsor egyértelmű és teljes, $X_i \perp^f X_j$ nem lehetséges. Arányos pontozási eljárások ugyanazt a rangsorolási módszert generálják.

2.11. Definíció. Egy $\succeq \in \mathcal{P}_N$ rangsor *egyenletes* (flat), ha $X_i \sim X_j$ minden $X_i, X_j \in N$-re (Slutzki és Volij, 2005).

2.12. Definíció. Egy $\succeq \in \mathcal{P}_N$ rangsor *kvázi egyenletes* (quasi-flat), ha $X_i \sim X_j$ vagy $X_i \perp X_j$ minden $X_i, X_j \in N$-re (Slutzki és Volij, 2005).

2.13. Definíció. Egy $\succeq : \mathcal{R} \to \mathcal{P}_N$ rangsorolási módszer *domináns* (dominant), ha minden $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}$ rangsorolási problémára és $X_i, X_j \in N$ objektumra $[X_i] \to [X_j]$ esetén $X_i \succeq_{\mathbf{R}} X_j$ (Slutzki és Volij, 2005).

Eszerint egy erősebb ligába tartozó objektum biztosan megelőzi az összes gyengébb ligában szereplőt.

2.14. Definíció. Egy $\succeq : \mathcal{R} \to \mathcal{P}_N$ rangsorolási módszer *kvázi teljes* (quasi-complete), ha minden $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}$ rangsorolási problémára és $X_i, X_j \in N$ objektumra $X_i \not\to X_j$ és $X_j \not\to X_i$ akkor és csak akkor, ha $X_i \perp_{\mathbf{R}} X_j$ (Slutzki és Volij, 2005).

Vagyis két objektum pontosan akkor nem hasonlítható össze, ha két, az erősebb reláció szerint egymással kapcsolatban nem álló ligában találhatók. Amennyiben legalább az egyik közvetve legyőzte a másikat, már sorrendbe kell állítani őket. A dominancia és a kvázi teljesség megkövetelésével a reducibilitásért felelős ligák rendezése egyértelműen elvégezhető.

A harmadik axióma egy újabb lépést tesz abba az irányba, hogy miként kell rangsorolni egy adott liga szereplőit. Egy adott $\succeq_{\mathbf{R}}$ rangsor esetén jelölje $\succeq_{\mathbf{R}} | [X_i]$ annak az $[X_i]$ halmazra való szűkítését.

2.15. Definíció. Egy $\succeq : \mathcal{R} \to \mathcal{P}_N$ rangsorolási módszer *szétválasztható* (separability), ha minden $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}$ rangsorolási problémára és $X_i \in N$ objektumra $\succeq_{\mathbf{R}} | [X_i] = \succeq_{\mathbf{R}_{[X_i]}}$ (Slutzki és Volij, 2005).

Tehát egyfajta függetlenséget tételezünk fel: az adott ligában érvényes rangsor nem függ a többi liga lététől, elhelyezkedésétől. Ennek megfelelően egy domináns, kvázi teljes és szétválasztható rangsorolási módszert elegendő az irreducibilis rangsorolási problémák $\mathcal{R}_1$ osztályán definiálni, ezt követően természetes módon kiterjeszthető a teljes $\mathcal{R}$ halmazra (Slutzki és Volij, 2005).

Adott $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}$ rangsorolási probléma és $\sigma : N \to N$ permutáció esetén legyen $(N, \sigma\mathbf{R})$ az a rangsorolási probléma, melyben $(\sigma\mathbf{R})_{ij} = \mathbf{R}_{\sigma(i),\sigma(j)}$.

2.16. Definíció. Egy $\succeq: \mathcal{R} \to \mathcal{P}_N$ rangsorolási módszer *névtelen* (anonymity), ha minden $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}$ rangsorolási problémára és $\sigma : N \to N$ permutációra $\sigma(i) \succeq_{\mathbf{R}} \sigma(j)$ esetén $i \succeq_{\sigma\mathbf{R}} j$ (Slutzki és Volij, 2005).

A névtelenség vagy anonimitás a szavazáselméletben gyakran használt tulajdonság, amely azt írja elő, hogy a módszer eredménye ne függjön a szavazók, alternatívák, játékosok stb. nevétől.

A következő axióma két, azonos objektumhalmazzal rendelkező probléma aggregálásával kapcsolatos. Az $(N, \mathbf{R})$ és $(N, \mathbf{Q})$ rangsorolási problémák összegét jelölje $(N, \mathbf{R} + \mathbf{Q})$.

2.17. Definíció. Egy $\succeq: \mathcal{R} \to \mathcal{P}_N$ rangsorolási módszer teljesíti *kvázi egyenletesség őrzés* (quasi-flatness preservation) axiómát, ha minden $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}$ és $(N, \mathbf{Q}) \in \mathcal{R}$ rangsorolási problémára, ahol $\succeq_{\mathbf{R}}$ kvázi egyenletes, $\succeq_{\mathbf{Q}}$ akkor és csak akkor kvázi egyenletes, ha $\succeq_{\mathbf{R}+\mathbf{Q}}$ kvázi egyenletes (Slutzki és Volij, 2005).

Tehát, ha két különböző probléma egyikében sem tehető különbség az alternatívák között (azaz egyenlően rangsoroltak vagy nem összehasonlíthatók), akkor ez az aggregált problémára is igaz. Megfordítva, amennyiben legalább az egyik rangsorolási problémában létezik szigorú reláció két objektum között, akkor ez a kettő összegére szintén teljesülni fog.

Az utolsó, hatodik tulajdonság már ismerős lehet 2.3.2. alfejezetből.

2.18. Definíció. Egy $\succeq: \mathcal{R} \to \mathcal{P}_N$ rangsorolási módszer teljesíti *negatív reakció a vereségekre* (negative responsiveness to losses) axiómát, ha minden $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}_1$ irreducibilis rangsorolási problémára, ahol $\succeq_{\mathbf{R}}$ egyenletes, és $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_i)_{i \in N}$ diagonális mátrixra, ahol $(\lambda_i)_{i \in N}$ pozitív és $(N, \mathbf{R\Lambda}) \in \mathcal{R}$, $i \succeq_{\mathbf{R\Lambda}} j$ akkor és csak akkor, ha $\lambda_i < \lambda_j$ (Slutzki és Volij, 2005).

A negatív reakció alapján, ha egy egyenletes rangsort eredményező páros összehasonlítási mátrixban az alternatívák vereségeit egy-egy pozitív konstanssal megszorozzuk, a kialakuló sorrendet fordított arányosság révén ennek nagysága fogja meghatározni. Az ötlet azon alapul, hogy a módosítás nem befolyásolja sem egy objektum győzelmeinek számát, sem pedig vereségeinek eloszlását. Azaz, amennyiben a módszer egy adott objektum győzelmeit az őt megverő alternatívák között a vereségek arányában osztja szét, akkor az elszenvedett kudarcok λ_i-vel szorzása nem befolyásolja a többi objektum relatív rangsorát. Ennek megfelelően csak az X_i objektum relatív pozíciója változik, mégpedig a szorzó konstanssal fordított arányban.

2.3.4 Manipuláció és megfordíthatóság

Számos olyan helyzet van, ahol a rangsorolandó objektumok maguk is képesek befolyásolni a megfigyelt eredményeket. Ilyenkor érdemes megvizsgálni, vajon a rangsorolási módszer tényleg minél jobb teljesítmény elérésére ösztönzi-e a résztvevőket. A sportban például szokatlan, ha egy játékos szándékosan vereségre játszik; elrettentő példaként szolgálhat a londoni olimpia női páros tollaslabdaversenye (Pauly, 2013). A tudományos életben szintén nemkívánatos következményekkel járhat, amikor egy kutató vagy folyóirat a kedvezőbb tudománymetriai mutatók megszerzése érdekében befolyásolni próbálja az általa megadott hivatkozásokat vagy a cikkek terjedelmét. Itt is felmerült már a manipuláció gyanúja (Smith, 1997). Az önhivatkozásoktól eltekintve ennek legegyszerűbb esete, a további, felesleges referenciák elhelyezése, melyek utólagos ellenőrzése, felülvizsgálata meglehetősen nehézkesnek tűnik.

Tekintsük azt az $\mathbf{R}$ páros összehasonlítási mátrixot, ahol r_{ij} a X_j folyóirat X_i-re való hivatkozásait adja meg (hiszen egy addicionális referencia az X_i újság számára kedvező). Az önhivatkozásokkal nem foglalkozunk, a mátrix főátlójának nincs jelentősége. Azt mondjuk, hogy egy rangsorolási eljárás monoton, ha egy addicionális hivatkozás nem javítja az ezt megadó folyóirat helyezését és a másikét sem rontja.

2.19. Definíció. Legyen $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}$ és $(N, \mathbf{R}') \in \mathcal{R}$ két rangsorolási probléma, melyekre $r'_{ij} > r_{ij}$ valamely (X_i, X_j) párra, de $r_{k\ell} = r'_{k\ell}$ minden $(X_k, X_\ell) \neq (X_i, X_j)$ esetén. Egy $\succeq: \mathcal{R} \to \cup_{N \subseteq I\!N} \mathcal{P}_N$ rangsorolási módszer *gyengén (erősen) monoton*, ha minden $X_k \in N$-re $X_i \succeq_{\mathbf{R}} X_k$ esetén $X_i \succeq_{\mathbf{R}'} X_k$ ($X_i \succ_{\mathbf{R}'} X_k$) és minden $X_k \in N$-re $X_k \succeq_{\mathbf{R}} X_j$ esetén $X_k \succeq_{\mathbf{R}'} X_j$ ($X_k \succ_{\mathbf{R}'} X_j$) (Kóczy és Strobel, 2010).

Ehhez hasonló monotonitási tulajdonságokat már korábban is megfogalmaztak, ezek azonban csak az első, $X_i \succeq_{\mathbf{R}'} X_k$ ($X_i \succ_{\mathbf{R}'} X_k$) reláció fennállását követelték meg az összehasonlítások számának változatlansága, állandó $r_{ij} + r_{ji}$ mellett (Rubinstein, 1980; Bouyssou, 1992).

Az irányított gráfok esetén természetes módon merül fel az a kérdés, hogy mi történik a rangsorral, amikor minden páros összehasonlítás irányát megfordítjuk. Ekkor érthető az alábbi feltétel megkövetelése.

2.20. Definíció. Legyen $(N, \mathbf{R})$ egy tetszőleges rangsorolási probléma. Egy $\succeq: \mathcal{R} \to \mathcal{P}_N$ rangsorolási módszer *megfordítható* (inversion), ha $X_i \succeq_{\mathbf{R}} X_j$ fennállásakor $X_i \preceq_{\mathbf{R}^\top} X_j$ minden $X_i, X_j \in N$-re (Chebotarev és Shamis, 1998).

Tehát az összes eredmény megfordításával az alternatívák sorrendje pontosan az ellenkezőjére változik. Chebotarev (1994, Property 7) ezt az axiómát némileg erősebb formában, pontozási eljárásokra megfogalmazva, *transzponálhatóság* (transposability) néven vezeti be.

A megfordíthatóság révén megadható egy tetszőleges pontozási módszer párja, amit a lineáris programozás analógiájára, Slutzki és Volij (2005) nyomán, az eljárás duáljának nevezünk.

2.21. Definíció. Egy tetszőleges $f : \mathcal{R} \to I\!R^n$ pontozási eljárás *duál*ja az a $g : \mathcal{R} \to I\!R^n$ pontozási módszer, amire $g(\mathbf{R})_i = f(\mathbf{R}^\top)_i$ minden $\mathbf{R} \in \mathcal{R}$ esetén.

Egy pontozási eljárás duáljának duálja éppen az eredeti módszer.

2.2. Megjegyzés. A g függvény szempontjából a kisebb érték a kedvezőbb, ezért az általa meghatározott $\succeq^g: \mathcal{R} \to \mathcal{P}_N$ rangsorolási módszer: $g(\mathbf{R})_i \leq g(\mathbf{R})_j \Rightarrow X_i \succeq^g X_j$.

Vagyis egy pontozási eljárás által meghatározott $\succeq^f$ rangsorolási módszer esetén értelmezhetjük ennek $\succeq^g$ duálját is.

2.1. Következmény. *Egy $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás által generált $\succeq^f : \mathcal{R} \to \mathcal{P}_N$ rangsorolási módszer akkor és csak akkor megfordítható, ha minden $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}$ esetén a $g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ duál pontozási eljárás által generált $\succeq^g : \mathcal{R} \to \mathcal{P}_N$ rangsorolási módszerrel azonos eredményt ad.*

2.2. Állítás. *Az $\succeq^f : \mathcal{R} \to \mathcal{P}_N$ rangsorolási eljárás akkor és csak akkor megfordítható, ha $\succeq^g : \mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ duál megfelelője is az.*

Bizonyítás. Ha $\succeq^f$ megfordítható, akkor $X_i \succeq^f_{\mathbf{R}} X_j \Rightarrow X_j \preceq^f_{\mathbf{R}^\top} X_i$, azaz $f(\mathbf{R})_i \geq f(\mathbf{R})_j \Rightarrow f(\mathbf{R}^\top)_i \leq f(\mathbf{R}^\top)_j$ minden $X_i, X_j \in N$ és $\mathbf{R} \in \mathcal{R}$ mellett. Mivel $f(\mathbf{R})_i \geq f(\mathbf{R})_j \Leftrightarrow g(\mathbf{R})_i \leq g(\mathbf{R})_j$ és $f(\mathbf{R}^\top)_i \leq f(\mathbf{R}^\top)_j \Leftrightarrow g(\mathbf{R}^\top)_i \geq g(\mathbf{R}^\top)_j$, valamint $g(\mathbf{R})_i \leq g(\mathbf{R})_j \Rightarrow X_i \succeq^g X_j$, ebből éppen a kívánt $X_i \succeq^g_{\mathbf{R}} X_j \Rightarrow X_j \preceq^g_{\mathbf{R}^\top} X_i$ implikáció adódik minden $X_i, X_j \in N$ és $\mathbf{R} \in \mathcal{R}$ esetén. A másik irány abból következik, hogy a duál duálja az eredeti módszer. $\square$

Egy pontozási eljárás által generált rangsorolási módszer monotonitása kapcsolatba hozható annak duálisával, ahogy azt az alábbi eredmény szemlélteti.

2.3. Állítás. *Egy $\succeq^f : \mathcal{R} \to \mathcal{P}_N$ megfordítható rangsorolási eljárás akkor és csak akkor gyengén (erősen) monoton, ha $\succeq^g : \mathcal{R} \to \cup_{N \subseteq \mathbb{N}} \mathcal{P}_N$ duál megfelelője is az.*

Bizonyítás. A 2.1. következményből adódik. A bizonyításban kulcsszerepet játszik $\succeq^f$ megfordíthatósága, mert ez garantálja az

$$\left(X_i \succeq^g_{\mathbf{R}} X_k \Leftrightarrow X_i \succeq^f_{\mathbf{R}} X_k\right) \Rightarrow \left(X_i \preceq^f_{\mathbf{R}^\top} X_k \Leftrightarrow X_i \preceq^g_{\mathbf{R}} X_k\right)$$

és a többi, hasonló jellegű implikáció fennállását. $\square$

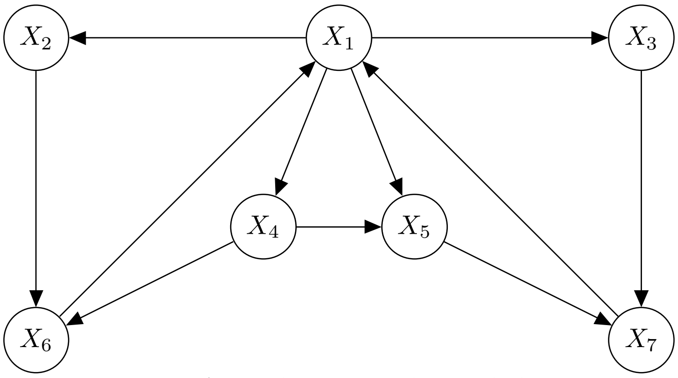
2.3.5 Önkonzisztens monotonitás

Az önkonzisztens monotonitás (self-consistent monotonicity) (Chebotarev és Shamis, 1997) azt követeli meg, hogy a rangsorban a nem rosszabb alternatívák ne hátrébb, a biztosan jobbak pedig szigorúan előrébb kerüljenek. Mikor lehet két objektum között ilyen kapcsolatot találni? Először is, a velük összehasonlított objektumok erejét kell összevetni, amit éppen a vizsgált rangsorolási módszer biztosít (erre utal az önkonzisztens elnevezés). Másrészt, az egyik objektum akkor lesz legalább olyan jó, mint a másik, ha nem rosszabb ellenfelei ellen legalább olyan eredményes volt, mint a másik. Előfordulhat, hogy ellenfeleik egymással való összehasonlítása nem szükséges, mert a páros összehasonlítás kimenetele valamelyik extrémumot veszi fel, azaz $r_{ij} > 0$ és $r_{ji} = 0$ vagy fordítva.

A körülményes formális definíció helyett a részletek iránt érdeklődő olvasó figyelmébe ajánljuk a Chebotarev és Shamis (1999) és a González-Díaz et al.

(2014) cikkeket. Csató (2013c) magyar nyelven, részletesen tárgyalja ezt az axiómát. Az alábbi példa illusztrálja az önkonzisztens monotonitás által előírt feltételeket.

2.2. Példa (Chebotarev és Shamis, 1999). A feladat jobb áttekinthetősége érdekében célszerű az eredmények vizuális megjelenítése; az *1. ábrán* szereplő gráfban az irányított élek a győztestől a vesztes felé haladnak. Ezt a megoldást a későbbiekben is használni fogjuk.



1. ábra. A 2.2. példa rangsorolási problémája

Az önkonzisztens monotonitás által megkövetelt néhány feltétel:

1. $X_6 \succeq X_7 \Rightarrow X_2 \succeq X_3$ és $X_7 \succeq X_6 \Rightarrow X_3 \succeq X_2$
   X_2 és X_3 egyaránt kikapott X_1-től, és azonos mértékben győzte le X_6-ot, illetve X_7-et. Ez azt jelenti, hogy az utóbbi objektumpár rangsorbeli viszonya egyértelműen eldönti az előbbiét.

2. $X_6 \succeq X_7 \Rightarrow X_4 \succ X_5$
   X_4-nek két legalább olyan erős ellenfele volt, mint X_5-nek, mindketten vereséget szenvedtek X_1-től, X_4 viszont nem gyengébb alternatívát győzött le, emellett X_5-öt is megverte.

3. $(X_2 \succeq X_3$ és $X_4 \succeq X_5) \Rightarrow X_6 \succeq X_7$
   X_6 és X_7 egyaránt legyőzte X_1-et, és kikaptak másik két objektumtól, ezek azonban X_6 esetén (X_2 és X_4) legalább olyan erősek voltak, mint X_7-nél (X_3 és X_5).

4. A fenti implikációk szigorú formában is felírhatók:
   $X_6 \succ X_7 \Rightarrow X_2 \succ X_3$ és $X_7 \succ X_6 \Rightarrow X_3 \succ X_2$
   $(X_2 \succeq X_3$ és $X_4 \succ X_5) \Rightarrow X_6 \succ X_7$
   $(X_2 \succ X_3$ és $X_4 \succeq X_5) \Rightarrow X_6 \succ X_7$.

Vagyis $X_6 \sim X_7$, ezért $X_2 \sim X_3$ sem lehetséges, mert $X_6 \sim X_7 \Rightarrow (X_2 \sim X_3$ és $X_4 \succ X_5) \Rightarrow X_6 \succ X_7$, ami ellentmondás. Az önkonzisztens monotonitás ugyanakkor nem mond semmit X_2 és X_3, X_6 és X_7, vagy X_2 és X_6 viszonyáról, jóllehet úgy érezzük, a $X_6 \succ X_7$ sorrend logikusabbnak tűnik.

Ennek oka, hogy a gráf két izomorf részre bontható az $\{X_1, X_2, X_4, X_6\}$, illetve $\{X_1, X_3, X_5, X_7\}$ csúcsokkal és a köztük levő élekkel, amiből csak a $X_4 \rightarrow X_5$ irányított él marad ki, ez pedig az első részgráf, illetve az egymásnak megfelelő pozíciójú objektumok fölényét ($X_2 \succ X_3$, $X_4 \succ X_5$ és $X_6 \succ X_7$) sugallja.

3 Néhány pontozási eljárás

3.1 Axiomatikus szempontú áttekintés

A 2.2. alfejezetben felsorolt érvek alapján Bouyssou (2004) tanulmányának végén azt ajánlja, érdemes lenne elkezdeni a pontozási módszerek alapos vizsgálatát. Az ez irányú kutatások egyelőre kezdeti szakaszban vannak, semmiképpen sem tekinthetők lezártnak. Legígéretesebbnek egyfajta axiomatikus megközelítés alkalmazása tűnik: néhány kívánatos vagy elvárt tulajdonság definiálásával jól láthatóvá válnak azok ellentmondásai, kölcsönös kapcsolatai, illetve az egyes módszerek eltérései. Ez hasonlít a kooperatív játékelmélet elosztási koncepciói esetén követett megközelítéshez: a 2012-ben közgazdasági Nobel-díjat nyert Lloyd S. Shapley nevéhez fűződő *Shapley-érték*re (Shapley, 1953) már számos axiomatizáció született, nem is említve a különböző játékosztályokon megfigyelhető eltéréseket (Pintér, 2009).

Az első, közvetlenül adódó megoldási lehetőség a sorösszegek alapján történő rangsorolás (Borda, 1781; Copeland, 1951). A módszert Rubinstein (1980) karakterizálta bajnokságokban (tournament), ahol minden összehasonlítás kimenetele ismert és az egyik alternatíva egyértelműen jobbnak bizonyult a másiknál, nincsenek döntetlenek vagy eltérő preferenciaintenzitások. Amennyiben az összehasonlítások száma minden (X_i, X_j) alternatívapár esetén azonos, azaz $r_{ij} + r_{ji} = r_{k\ell} + r_{\ell k}$ tetszőleges $X_i, X_j, X_k, X_\ell \in N$ objektumnégyes mellett, akkor *körmérkőzéses* (round-robin) problémáról beszélhetünk. A szavazási modellekkel foglalkozó irodalomban legalább három axiomatizáció létezik a sorösszeg módszerre ebben az esetben (Young, 1974; Hansson és Sahlquist, 1976; Nitzan és Rubinstein, 1981; Bouyssou, 1992). Ezek az itt tárgyalt általános esetben nem érvényesek, ráadásul hiányzó és többszörös összehasonlítások mellett alkalmazása erősen vitatható (González-Díaz et al. 2014) de például a hiányzó összehasonlítások döntetlenként való kezelésével ez a nehézség elvileg feloldható (Telcs et al., 2013). Ezzel azonban eltérünk az eredeti feladattól, így különböző megoldásokat kaphatunk.

A páros összehasonlítási mátrix bizonyos transzformáltjain és a Perron-Frobenius tételen (mely szerint egy nemnegatív, valós, négyzetes és irreducibilis mátrixban a domináns sajátértékhez tartozik az egyetlen, szigorúan pozitív sajátvektor) alapul az *invariáns* és a *fair bets* (Daniels, 1969; Moon és Pullman, 1970), vagy az előbbi egy perturbált változatának megfelelő *PageRank* módszer (Brin és Page, 1998). Ezeket az eljárásokat, valamint Slutzki és Volij (2005) és Slutzki és Volij (2006) karakterizációit részletesen bemutatjuk a 3.2. és a 3.3. szakaszban, az invariáns módszer gráfelméleti, ordinális tulajdonságokon alapuló axiomatizációjával (Altman és Tennenholtz, 2005) azonban nem foglalkozunk.

A játékelméleti irodalomban hasonló feladatként merül fel egy irányított gráf csúcsainak rangsorolása. Ebben a környezetben könnyen érthető a lokális és globális pontozási eljárások megkülönböztetése: előbbiek az irányított gráf helyi struktúráját vizsgálják (a csúcsok értékelésénél csak azok közvetlen kapcsolatait, a bemenő és kimenő élek számát veszik figyelembe), utóbbiak viszont az egész gráfot tekintik (Herings et al., 2005). Ez egyúttal egy jól ismert axióma, az irreleváns összehasonlításoktól való függetlenség megjelenését indukálja (Rubinstein, 1980; González-Díaz et al., 2014). Rubinstein (1980) eredményének általánosítására van den Brink és Gilles (2003) tanulmánya tett kísérletet. A számos megoldási javaslat közül érdemes megemlíteni az invariáns és fair bets módszerekkel szoros kapcsolatban álló λ eljárást (Borm et al., 2002), és a *pozíciós erő*t (positional power) (Herings et al., 2005); ezeket a 3.4.1. és a 3.4.2. alfejezetekben tárgyaljuk.

A különböző pontozási eljárásokra definiálása mellett viszonylag kevesebb az egyszerre több módszert axiomatikus megközelítéssel vizsgáló munka. Laslier (1997), a lehetséges karakterizációkra is kitérve, számos megoldási koncepciót részletesen elemez, ugyanakkor vizsgálatát körmérkőzéses bajnokságokra korlátozza, ezért jelen cikk szempontjából kevésbé releváns. Chebotarev és Shamis (1998) cikke kiváló áttekintést nyújt az ismert axiomatizációkról, több szempont szerint csoportosítja az ezekhez szükséges tulajdonságokat (összesen több mint 40 módszert tárgyal). Altman és Tennenholtz (2008) pedig belátja, hogy az irányított gráfokra nem létezik olyan pontozási eljárás, amely egyszerre rendelkezne jó lokális és globális tulajdonságokkal.

Chebotarev és Shamis (1999) az önkonzisztens monotonitás (Chebotarev és Shamis, 1997) szempontjából vizsgálja a pontozási eljárások két osztályát, bizonyítva, hogy minden győzelem-vereség kombinálásán (win-loss combining) alapuló eljárás megsérti azt. Ebbe a csoportba tartozik az invariáns és fair bets eljárás, illetve a játékelméleti irodalomban használt módszerek többsége. Ugyanakkor található néhány olyan, győzelem-vereség egyesítő (win-loss unifying) eljárás, amely teljesíti ezt a feltételt. Közülük kiemelkedik az egyik klasszikus módszer, a *maximum likelihood* (Zermelo, 1929; Bradley és Terry, 1952). Az eljárás széles körben ismert és elterjedt, azóta is születnek ezzel kapcsolatos új eredmények: Conner és Grant (2000) a módszer kiterjesztésére tesz kísérletet, míg Conner és Grant (2009) egy új monotonitási tulajdonságról mutatja meg, hogy az általánosított eljárás teljesíti azt.

Az axiomatikus megközelítés a pontozási eljárások által meghatározott rangsorolási módszerek összehasonlítására is alkalmazható (González-Díaz et al., 2014). Az eredmények alapján kiemelkedően teljesít a Zermelo-féle maximum likelihood, amely azonban egy bonyolult nemlineáris egyenletrendszer megoldását kívánja, ezért számítási szempontból nem tekinthető tökéletes választásnak. Egy másik, elméleti szempontból vonzó eljárás az *általánosított sorösszeg* (generalized row sum) módszer (Chebotarev, 1989, 1994). Ez pontozási eljárások egy olyan parametrikus családja, mely egyik határértékként a sorösszeget, másikként pedig a *legkisebb négyzetek* (least squares) módszerét (Horst, 1932; Mosteller, 1951; Morrissey, 1955; Gulliksen, 1956; Kaiser és

Serlin, 1978) adja. Kiszámítása egy lineáris egyenletrendszer megoldásával történik, ennek köszönhetően bizonyos esetekben egy megfelelően választott gráfon is értelmezhető (Shamis, 1994).

Bár a legkisebb négyzetek módszere szintén megsérti az önkonzisztens monotonitás axiómáját, egyszerűsége okán mégis széles körben használják. Belátható, hogy az eljárás ekvivalens a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok esetén alkalmazott $LLSM$ módszerrel (Bozóki et al., 2010; Csató, 2012), illetve a statisztikában használt EKS-eljárással.[7] Úgy tűnik, a párhuzamosan folyó kutatások eddig nem nagyon ismerték fel ezt az azonosságot, a megoldás egyértelműségének két független bizonyítása is létezik (Kaiser és Serlin, 1978; Bozóki et al., 2010). Ez azonban egyáltalán nem tekinthető rendkívülinek. Az invariáns módszer legalább három különböző alkalommal került bevezetésre (Daniels, 1969; Moon és Pullman, 1970; Pinski és Narin, 1976), a maximum likelihood esetén ugyancsak két alapművet szokás említeni (Zermelo, 1929; Bradley és Terry, 1952). Kóczy és Nichifor (2013) sem említi, hogy az invariáns módszer hibáinak korrigálására javasolt eljárás azonos a korábbról ismert fair bets módszerrel, így a szerzők valószínűsíthetően más úton jutottak erre a következtetésre. Hasonló esetek más tudományterületen sem ismeretlenek: a stabil házasság probléma megoldására szolgáló Gale-Shapley algoritmust (Gale és Shapley, 1962) a gyakorlati felhasználók már a módszer publikálása előtt felfedezték.

A közelmúltban – González-Díaz et al. (2014) úttörő tanulmányától eltekintve – a legkisebb négyzetek módszere mégis viszonylag kevés figyelmet kapott, holott az általánosított sorösszeg módszerrel való szoros kapcsolata azt sugallja, kedvező axiomatikus tulajdonságokkal bírhat. Közeli rokonságban van a játékelméleti pozíciós erő fogalmával is, emellett a számítás menete, a PageRank módszerhez hasonlóan, szemléletesen értelmezhető gráfokon (Csató, 2013b).

Témánk részben érintkezik a tudománymetriában használt eljárások irodalmával, noha Slutzki és Volij (2006), illetve González-Díaz et al. (2014) óvatosságra int az eredmények egymásra történő átvihetősége tekintetében (lásd a 3.2.1. szakasz utolsó bekezdését). Mindenesetre érdemes említést tenni Palacios-Huerta és Volij (2004) karakterizációs eredményeiről, illetve Kóczy és Strobel (2010) axiomatikus tárgyalásáról; az utóbbi által bevezetett egyik tulajdonságot, a monotonitást mi is használni fogjuk.

3.2 Az invariáns és fair bets módszerek

3.2.1 Az eljárások matematikai háttere

Jelölje az $\mathbf{R}$ páros összehasonlítási mátrix $\sum_j r_{ij}$ sorösszegeit és $\sum_i r_{ij}$ oszlopösszegeit, vagyis az j objektum győzelmeinek, illetve vereségeinek számát, r_{i*} és r_{*j}. Legyen $\mathbf{C}$ az oszlopösszegekből képzett diagonális mátrix.

3.1. Definíció. Az $I(\mathbf{R})$ *invariáns* módszer (Daniels, 1969; Moon és Pull-

[7] Utóbbiról bővebben a 4. fejezetben olvashatunk.

man, 1970; Pinski és Narin, 1976) a

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{r_{ij}}{r_{*j}} v_j \quad \text{minden } X_i \in N\text{-re},$$

mátrixjelölésekkel $v = \mathbf{R}\mathbf{C}^{-1}v$ egyenletrendszer (irreducibilis $\mathbf{R}$ mátrix mellett normalizálástól eltekintve egyértelmű) $I(\mathbf{R}) = v$ megoldása.

3.2. Definíció. Az $F(\mathbf{R})$ *fair bets* módszer (Daniels, 1969; Moon és Pullman, 1970) a

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ji} v_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} v_j\,, \quad \text{vagy} \quad v_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{r_{ij}}{r_{*i}} v_j \quad \text{minden } X_i \in N\text{-re},$$

azaz a $\mathbf{C}v = \mathbf{R}v$ egyenletrendszer (irreducibilis $\mathbf{R}$ mátrix esetén normalizálástól eltekintve egyértelmű) $F(\mathbf{R}) = v$ megoldása.

Látható, hogy mindkettőnél szükség van a végső v_i súlyok normalizálására, erre leggyakoribb a $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ választás. Tetszőleges $(N, \mathbf{R})$ rangsorolási problémára $I(\mathbf{R}) \propto \mathbf{C}F(\mathbf{R})$, vagyis a két vektor az alternatívák ugyanazon sorrendjét eredményezi. Irreducibilis $\mathbf{R}$ mellett mindkét vektor pozitív, $I(\mathbf{R})$ az $\mathbf{R}\mathbf{C}^{-1}$, míg $F(\mathbf{R})$ a $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{R}$ mátrix 1 sajátértékéhez tartozó jobboldali sajátvektor.

A fair bets módszer neve a következő megfontolásból adódik. A $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ értékeket tekintsük fogadási tétek egy sorozatának úgy, hogy az X_i alternatívára kötött fogadás esetén v_j összeg nyerhető, amennyiben X_i legyőzi X_j-t, és v_i összeget kell fizetni akkor, ha X_i vereséget szenved X_j-től (tehát ez utóbbi független a győztes kilététől). Ekkor az $F(\mathbf{R})$ vektorral a fogadás igazságos, mert a várható $\sum_{j=1}^{n} r_{ji} v_i$ kifizetés pontosan megegyezik a várható $\sum_{j=1}^{n} r_{ij} v_j$ veszteséggel. Az invariáns módszer esetén pedig v_i az az összeg, amit ez az igazságos fogadás fizet az X_i alternatíva győzelmekor. További interpretációk találhatók a Chebotarev és Shamis (1999), illetve a Slutzki és Volij (2006) tanulmányokban.

Érdemes más szempontból is megvizsgálni a két eljárást. Az invariáns módszernél az X_i alternatíva v_i pontszáma attól függ, mennyi juttatást (például hivatkozást) kap a többitől. Ez weblapok, cikkek rangsorolásánál lehet előnyös, ahol a referenciák megadása ingyen van: ha egy folyóirat többet hivatkozik egy másikra, a rá való hivatkozások száma nem csökken. Ezzel szemben a fair betsnél az objektumok győzelmeinek és vereségeinek száma kiegyensúlyozott, mint egy sportbajnokságban, ahol a kettő egymást kizáró lehetőség.

Ennek megfelelően Slutzki és Volij (2006) az invariáns módszer alkalmazását ajánlja folyóiratok, weblapok és cikkek rangsorolásánál (gyakorlatilag a tudománymetriában), mivel így az értékelés csak az adott objektumra vonatkozó hivatkozások számától függ, további referenciák megadása nem érinti negatívan azt. Az X_i alternatíva X_j-vel szembeni jobb teljesítménye, azaz r_{ij} növekedése biztosan kedvező X_i számára, azonban a tudománymetriában, ahol ez a X_j által adott, X_i-re vonatkozó hivatkozások számának növekedését jelenti, nem feltétlenül érinti hátrányosan X_j-t (González-Díaz et al., 2014). Ezzel szemben a Kóczy és Nichifor (2013) által – többek között az invariáns módszer helyett – javasolt eljárás éppen a fair bets-szel azonos, bár ezt a cikk nem mondja ki.

3.2.2 Karakterizáció irreducibilis esetben

Az előző alfejezet alapján már látható, miért jelent nehézséget a rangsorolási eljárások közötti választás. Első ránézésre ugyanis egyáltalán nem világos, mi alapján tekinthető jobbnak az invariáns vagy a fair bets módszer: mindkettő egy-egy igazságossági koncepciót képvisel, melyek közül objektív szempontból egyik sem tűnik a másiknál rosszabbnak. Ilyen kérdések eldöntésében nyújthat segít az axiomatikus tárgyalás, melynek során olyan tulajdonságokat keresünk, melyek leszűkítik az előírásuk mellett szóba jöhető eljárások körét. Ez a csökkenés néha olyan mértékű, hogy végeredményként az üres halmazt kapjuk, például az Arrow-féle lehetetlenségi tételben (Arrow, 1951). Optimális esetben éppen egyetlen módszer marad (karakterizáció).

Az invariáns és fair bets módszerek karakterizációjával kapcsolatos első kihívás az értelmezési tartomány megválasztása. A rangsorolási problémák egy adott osztályán érvényes axiomatizáció nem feltétlenül igaz egy szűkebb vagy bővebb halmazon, a kiválasztott tulajdonságok pedig kivezethetnek a megengedett értelmezési tartományból.

Tekintsük az $\mathcal{R}_N$ halmazt; itt mind az invariáns, mind a fair bets módszer jól definiált. A 2.3.1. szakaszban bemutatott tulajdonságok vonatkozásában a következőket tudjuk:

3.1. Lemma. *Az invariáns és a fair bets módszer egységes* (Slutzki és Volij, 2006).

3.2. Lemma. *A fair bets módszer erősen egységes* (Slutzki és Volij, 2006).

3.1. Következmény. *A fair bets módszer közömbös* (Slutzki és Volij, 2006).

3.3. Lemma. *Az invariáns módszer gyengén additív* (Slutzki és Volij, 2006).

3.4. Lemma. *Az invariáns módszer invariáns a referencia intenzitásra* (Slutzki és Volij, 2006).

3.5. Lemma. *A fair bets módszer fordítottan arányos a vereségekkel* (Slutzki és Volij, 2006).

A fenti axiómák már elegendőek ahhoz, hogy mindkét eljárást karakterizálhassuk. Jelölje $\mathcal{R}_N(N)$ a rögzített N alternatívahalmazzal rendelkező irreducibilis rangsorolási problémák halmazát.

3.1. Tétel. *Legyen $n \geq 2$. Az invariáns módszer az egyetlen olyan $\mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, ami egységes, gyengén additív és invariáns a referencia intenzitásra* (Slutzki és Volij, 2006).

3.2. Tétel. *Legyen $n \geq 2$. A fair bets módszer az egyetlen olyan $\mathcal{R} \to \mathbb{R}^n$ pontozási eljárás, ami egységes, közömbös és fordítottan arányos a vereségekkel.*

A tételekben szereplő három-három tulajdonság független, azaz közülük bármely kettőt kiválasztva található olyan, az invariáns, illetve a fair bets eljárástól különböző pontozási módszer, ami mindkettőt kielégíti (így a harmadikat értelemszerűen megsérti).

A fair bets eljárásnak létezik egy alternatív karakterizációja is, melyben az N alternatívahalmaz nem rögzített. Ez azon alapul, hogy a több objektummal rendelkező rangsorolási problémák – alkalmas feltételek megkövetelésével – visszavezethetők a kétszereplős esetre, ahol a megoldás triviális (Slutzki és Volij, 2006).

Az invariáns módszer egy másik, gráfelméleti axiómákon alapuló karakterizációját adta meg Altman és Tennenholtz (2005).

3.2.3 A fair bets módszer alternatív axiomatizációja

Az előzőekben látott mindkét karakterizációban szerepel az egységesség követelménye, ami intuitívan kevéssé vonzó, túlságosan erősnek tűnő tulajdonság, mert egyértelműen megmondja, milyen értékelővektort kell kapni egy szabályos rangsorolási probléma esetén (Slutzki és Volij, 2005). Ez egy sokkal természetesebbnek tűnő névtelenségi követelménnyel is kiváltható, aminek azonban ára van: az axióma erejének kihasználáshoz ki kell bővíteni a vizsgált rangsorolási problémák halmazát, szükségessé válik a nem összehasonlíthatóság bevezetése. Ez egyben azt is jelenti, hogy a rangsorolás a továbbiakban nem írható le egy $f : \mathcal{R}_1 \to \mathbb{R}^n$ értékelőfüggvénnyel, ez ugyanis nem teszi lehetővé a nem összehasonlítható ligák kezelését.

3.3. Definíció. A $\succeq^{fb}\colon \mathcal{R}_1 \to \mathcal{P}_N$ *fair bets rangsorolási módszer*t az $F(\mathbf{R})$ fair bets pontozási eljárás generálja: $X_i \succeq^{fb}_{\mathbf{R}} X_j \Leftrightarrow F(\mathbf{R})_i \geq F(\mathbf{R})_j$ minden $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}_1$ rangsorolási problémára (Slutzki és Volij, 2005).

A fair bets rangsorolási módszer karakterizációjához a 2.3.3. alfejezetben bemutatott tulajdonságok szükségesek.

3.3. Tétel. $\succeq^{fb}$ *az egyetlen* $\succeq\colon \mathcal{R} \to \mathcal{P}_N$ *domináns, kvázi teljes, szétválasztható, névtelen, kvázi egyenletesség őrző és a vereségekre negatívan reagáló rangsorolási módszer* (Slutzki és Volij, 2005).

A hat axióma egymástól független, bármelyik ötöt kiválasztva található olyan módszer, ami ezek mindegyikét kielégíti, de nem azonos a fair bets-szel. Ha a vizsgálódás körét olyan problémákra szűkítjük, ahol csak egyetlen vagy több, nem összehasonlítható liga szerepel, tehát egyik csoport sem erősebb a másiknál, akkor az eljárás karakterizációja a dominancia megkövetelése nélkül is érvényes (Slutzki és Volij, 2005).

Legyen $\mathbf{R}^\top$ a transzponált páros összehasonlítási mátrix, ahol a korábbi győzelmek vereségnek, a vereségek győzelmeknek számítanak.

3.4. Definíció. A $\succeq^{dfb}\colon \mathcal{R}_1 \to \mathcal{P}_N$ *duál fair bets rangsorolási módszer*t a duál fair bets pontozási eljárás generálja: $X_i \succeq^{fb}_{\mathbf{R}} X_j \Leftrightarrow F(\mathbf{R}^\top)_i \leq F(\mathbf{R}^\top)_j$ minden $(N, \mathbf{R}) \in \mathcal{R}_1$ rangsorolási problémára (Slutzki és Volij, 2005).

Az eljárásra Slutzki és Volij (2005) ad egy lehetséges interpretációt. A fair bets eljárás – a jobb oldali sajátvektor használata következtében – nagyobb súlyt ad az erősebb játékosok elleni győzelemnek, mint a gyengébbekkel szembeni vereségeknek, mert a

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{r_{ij}}{r_{*i}} v_j$$

egyenletben változatlan $r_{*i} = \sum_{j=1}^{n} r_{ji}$ mellett X_i számára kedvező az r_{ij} eredmények olyan átcsoportosítása, amely a nagyobb v_j értékelésű (jobb) ellenfelekkel szemben javítja a összehasonlítások kimenetelét. A duál fair bets-nél a megfelelő egyenlet

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{r_{ji}}{r_{i*}} v_j,$$

vagyis állandó $r_{i*} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}$ mellett X_i-nek az r_{ij} eredmények olyan átcsoportosítása kedvez, amely az erősebb, nagyobb v_j értékelésű ellenfelekkel szemben rontja a összehasonlítások kimenetelét. Ilyen értelemben a fair bets módszer egyfajta szubjektív értékítéletet hordoz, melynek használata elég nehezen indokolható, legfeljebb azzal érvelhetünk, hogy ezáltal – például a sportban – nagyobb az ösztönzés a „meglepő", a papírformát borító eredmények elérésére. Ezzel szemben a duál fair bets a kiszámíthatóságot, jó előrejelezhetőséget díjazza.

A dominancia, kvázi teljesség és szétválaszthatóság megkövetelésével a fair bets és a duál fair bets (valamint az invariáns és a duál invariáns) módszerek egyértelműen kiterjeszthetők az összes rangsorolási problémára. A 3.3. tétel bizonyításából látszik, de intuitív alapon is várható, hogy a vereségekre való negatív reakció központi szerepet játszik a karakterizációban. Analóg módon definiálható a győzelmekre való pozitív reakció.

3.4. Tétel. *$\succeq^{dfb}$ az egyetlen $\succeq: \mathcal{R} \to \mathcal{P}_N$ domináns, kvázi teljes, szétválasztható, névtelen, kvázi egyenletesség őrző és a győzelmekre pozitívan reagáló rangsorolási módszer* (Slutzki és Volij, 2005).

Tehát a másik öt tulajdonság megkövetelése esetén már nem írható elő egyszerre mindkettő, a vereségekre történő negatív és a győzelmekre történő pozitív reakció teljesülése kizárja egymást, kivéve a triviális kétszereplős esetet, ahol a fair bets és duálja azonos.

3.3 A PageRank módszer

A Google keresőmotor alapját jelentő PageRank algoritmus (Brin és Page, 1998) a páros összehasonlításon alapuló rangsorolás irodalmában is egyre népszerűbb: előbbire a GoogleScholar kereső szerint több mint 10 ezer, utóbbira pedig több mint 5 ezer hivatkozás van.

A PageRank módszer irányított (multi)gráfokon történő interpretációja igen szemléletes. Az algoritmus egy átlagos felhasználó viselkedését modellezi: kezdetben minden csúcs azonos fontosságú, majd a szörfölő a más csúcsokba mutató irányított élek mentén véletlenszerűen kattint a weblapon található linkekre. Ugyanakkor, előre megadott $d \in [0, 1]$ valószínűséggel, az is megtörténhet, hogy a linkek mellőzésével azonos valószínűséggel választ egy új oldalt.

Legyen az irányított gráf csúcsainak halmaza N, $G \subseteq N \times N$ pedig egy ezen értelmezett irreflexív bináris reláció. A G gráf legalább gyengén összefüggő, vagyis a neki megfelelő irányítatlan gráf összefüggő. Jelölje $P_i = \{X_j \in N : (X_j, X_i) \in G\}$ az X_i csúcs elődeinek halmazát, $p_i = |P_i|$ ezek számát. Hasonlóan, legyen $S_i = \{X_j \in N : (X_i, X_j) \in G\}$ az X_i csúcs követőinek halmaza, míg $s_i = |S_i|$ ezek száma.

Formálisan a

$$P_i = \frac{d}{n} + (1 - d) \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ji}}{s_j} P_j \quad \text{minden } \ X_i \in N\text{-re}$$

egyenletrendszer megoldását keressük, ahol $n = |N|$ az irányított gráf csúcsainak száma, w_{ji} a X_j csúcsból X_i-be mutató él súlya. Alapesetben nincs szó súlyozásról, két csúcs között legfeljebb egy irányított él lehet, azaz $w_{ij} \in \{0, 1\}$. Ugyanakkor ennek bevezetése semmilyen nehézséget sem okoz, úgy kell tekinteni, mintha a két érintett csúcs között több él lenne. Bizonyos alkalmazásokban a kimenő élekkel nem rendelkező csúcsokból véletlenszerűen választva egy másikba kerülünk, az egyenlet jobb oldalán még szerepel egy további $(1 - d) \sum_j \delta(S_j) P_j$ tag, ahol $\delta(S_j) = 1 \Leftrightarrow S_j = 0$ és $\delta(S_j) = 0$ egyébként (Radicchi, 2011).

A PageRank módszer könnyen visszavezethető az $(N, \mathbf{R})$ rangsorolási problémára, egyedül arra kell figyelni, hogy ennek definíciójában az (X_i, X_j) irányított él létezése X_i-nek kedvezőtlen, míg X_j-nek kedvező, azaz $r_{ij} = w_{ji}$ és $r_{ji} = w_{ij}$.

Ha eltekintünk az exogén paramétertől, azaz $d = 0$, akkor a PageRank pontosan megegyezik az invariáns módszerrel. $d > 0$ esetén egyrészt nincs szükség a súlyok normalizálására, másrészt a megoldás reducibilis $\mathbf{R}$ mátrixok esetén is létezni fog.

Érdemes megjegyezni, hogy más pontozási eljárásoknak is létezik a PageRank-hez hasonló, bár első ránézésre talán kevésbé vonzó gráfinterpretációja, példaként említhető az általánosított sorösszeg (bizonyos esetekben) (Shamis, 1994), vagy a legkisebb négyzetek módszere (Csató, 2013b). Utóbbinál nem törődünk az élek irányításával, azok csak a csúcsok kezdeti pontszámában játszanak szerepet, a PageRank-nél viszont éppen fordítva, a kezdeti értékelések lesznek azonosak, és az iteráció során vesszük figyelembe a páros összehasonlítások kimenetelét.

3.4 Irányított gráfok csúcsainak rangsorolása

Most két olyan eljárást mutatunk be, melyeket a súlyozatlan irányított gráfok $\mathcal{G}$ osztályán definiáltak. A játékelméleti irodalom jelöléseivel összhangban – a PageRank módszer értelmezésével szemben – ezúttal az (X_i, X_j) irányított él létezése az X_i csúcsnak lesz kedvező, és a X_j-nek kedvezőtlen, így az $\mathbf{R}$ páros összehasonlítási mátrix a G irányított gráf szomszédsági mátrixa lesz. A jelölések egyszerűsítése érdekében kizárólag az előbbit használjuk. Ennek megfelelően $\mathbf{R} \in \mathcal{G}$ akkor és csak akkor, ha $r_{ij} \in \{0, 1\}$ minden $X_i, X_j \in N$-re. Hasonlóképp, $\mathcal{G}_N$ az irreducilis, $\mathcal{G}_1$ pedig az egyetlen legerősebb ligával rendelkező súlyozatlan irányított gráfok osztálya.

3.4.1 Internal slackening

Slikker et al. (2012) a gráf csúcsainak rangsorolására egy iteratív eljáráscsaládot javasol, a λ^α pontozási módszer egy $\alpha \in (0, \infty)$ paraméter függvénye. Kezdetben minden csúcs súlya azonos, majd azok aktuális pontszáma szétosztásra kerül az összes, 1 súllyal szereplő elődje (ahonnan irányított él megy az adott csúcsba), és az α súllyal szereplő önmaga között.

Legyen $\beta^{\alpha,0} = (1/n)\mathbf{e}$, ahol $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ és $e_i = 1$ minden $X_i \in N$-re, így az iteratív formula:

$$\beta^{\alpha,t}(\mathbf{R})_i = \sum_{j \in S_i} \frac{\beta^{\alpha,t-1}(\mathbf{R})_j}{p_j + \alpha} + \alpha \frac{\beta^{\alpha,t-1}(\mathbf{R})_i}{p_j + \alpha} \quad \text{minden } X_i \in N\text{-re.}$$

3.5. Definíció. A $\lambda^\alpha : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^n$ *internal slackening* pontozási eljárás ennek a sorozatnak a határértéke, vagyis $\lambda^\alpha(\mathbf{R}) = \lim_{t\to\infty} \beta^{\alpha,t}(\mathbf{R})$.

$\alpha = 1$ esetén ez a λ pontozási eljárással egyezik meg (Borm et al., 2002). Tehát λ^α a következő egyenletrendszer megoldásaként kapható a $\sum_{i \in N} \lambda_i^\alpha = 1$ normalizálás mellett:

$$\lambda^\alpha(\mathbf{R})_i = \sum_{j \in S_i} \frac{\lambda^\alpha(\mathbf{R})_j}{p_j + \alpha} + \alpha \frac{\lambda^\alpha(\mathbf{R})_i}{p_j + \alpha} \quad \text{minden } X_i \in N, \ \mathbf{R} \in \mathcal{G}\text{-re.}$$

A feladatnak nem minden irányított gráf esetén létezik egyértelmű megoldása, ez csak akkor biztosított, ha $\mathbf{R} \in \mathcal{G}_N$, a páros összehasonlítási mátrix irreducibilis. Ugyanakkor könnyű kiterjeszteni az egyetlen legerősebb ligával rendelkező $\mathcal{G}_1$ osztályra; a gyengébb ligák szereplői automatikusan nulla értékelést kapnak (Slikker et al., 2012). A módszer számítását segíti a következő eredmény.

3.5. Tétel (Slikker et al., 2012). *Legyen* $\mathbf{R} \in \mathcal{G}_1$ *és* $\alpha \in (0, \infty)$. *Ekkor*

$$\lambda^\alpha(\mathbf{R}) \propto \left(\lambda^1(\mathbf{R})_i \frac{2\,(p_i + \alpha)}{(1 + \alpha)\,(p_i + 1)} \right)_{i \in N}.$$

3.2. Következmény. *Ha* $\lambda^1(\mathbf{R})_i \geq \lambda^1(\mathbf{R})_j$ *és* $p_i = p_j$ *az* $X_i, X_j \in N$ *alternatívákra valamilyen* $\mathbf{R} \in \mathcal{G}_1$ *páros összehasonlítási mátrix esetén, akkor* $\lambda^\alpha(\mathbf{R})_i \geq \lambda^\alpha(\mathbf{R})_j$ *tetszőleges* $\alpha \in (0, \infty)$*-re.*

A 3.5. tétel révén lehetővé válik az eljárás kiterjesztése az $\alpha = 0$ és $\alpha \to \infty$ határesetekre, vagyis a $\lambda^0 : \mathcal{G}_1 \to \mathbb{R}^n$ és $\lambda^\infty : \mathcal{G}_1 \to \mathbb{R}^n$ módszerek bevezetése, ahol:

$$\lambda^0(\mathbf{R})_i = \frac{\lambda^1(\mathbf{R})_i \frac{2p_i}{p_i+1}}{\sum_{j \in N} \lambda^1(\mathbf{R})_j \frac{2p_j}{p_j+1}} \quad \text{minden } X_i \in N,\ \mathbf{R} \in \mathcal{G}_1\text{-re;}$$

$$\lambda^\infty(\mathbf{R})_i = \frac{\lambda^1(\mathbf{R})_i \frac{2}{p_i+1}}{\sum_{j \in N} \lambda^1(\mathbf{R})_j \frac{2}{p_j+1}} \quad \text{minden } X_i \in N,\ \mathbf{R} \in \mathcal{R}_1\text{-re.}$$

Ha az $\mathbf{R}$ szomszédsági mátrix irreducibilis (azaz a hozzá tartozó G irányított gráf erősen összefüggő), akkor az internal slackening módszer szoros kapcsolatban áll az invariáns és fair bets eljárásokkal.

3.6. Tétel. *Legyen $\mathbf{R} \in \mathcal{G}_N$. Ekkor $\lambda^0(\mathbf{R}) = I(\mathbf{R})$ és $\lambda^\infty(\mathbf{R}) = F(\mathbf{R})$* (Slikker et al., 2012).

A 3.2. következményből és a 3.6. tételből adódik az alábbi eredmény.

3.3. Következmény. *Ha $\lambda^1(\mathbf{R})_i \geq \lambda^1(\mathbf{R})_j$ és $p_i = p_j$ az $X_i, X_j \in N$ alternatívákra valamilyen $\mathbf{R} \in \mathcal{G}_N$ páros összehasonlítási mátrix esetén, akkor $I(\mathbf{R})_i \geq I(\mathbf{R})_j$ és $F(\mathbf{R})_i \geq F(\mathbf{R})_j$.*

A gráf interpretáció segítségével az internal slackening módszer kiterjeszthető a teljes $\mathcal{G}$ osztályra, ahol több legerősebb liga (multiple top cycles) is létezhet (Slikker et al., 2012). Ezáltal kiküszöbölhető a fair bets (és az invariáns) módszerek egyik jelentős hátránya, a nem összehasonlítható ligák megjelenése.

A fair bets és invariáns módszerekhez hasonlóan itt is felmerülhet a kérdés, miért az adott alternatívát legyőzők között osztjuk szét a pontszámát. Analóg módon bevezethető a $\delta\lambda^\alpha : \mathcal{G} \to \mathbb{R}^n$ duál internal slackening módszer, $\delta\lambda^\alpha(\mathbf{R}) = \lambda^\alpha(\mathbf{R}^\top)$, ami a következő egyenletrendszer megoldásaként kapható a $\sum_{i \in N} \lambda_i^\alpha = 1$ normalizálás mellett:

$$\delta\lambda_i^\alpha(\mathbf{R}) = \sum_{j \in P_i} \frac{\delta\lambda_j^\alpha(\mathbf{R})}{s_j + \alpha} + \alpha \frac{\delta\lambda_i^\alpha(\mathbf{R})}{s_j + \alpha} \quad \text{minden } i \in N,\ \mathbf{R} \in \mathcal{G}\text{-re,}$$

hiszen az elődök és követők szerepe felcserélődik.

Ezúttal is kimondható egy, a 3.5. tételhez hasonló állítás, amivel tetszőleges α-ra kiszámítható a duál internal slackening módszer értékelővektora.

3.7. Tétel. *Legyen $G \in \mathcal{R}_1$ és $\alpha \in (0, \infty)$. Ekkor*

$$\delta\lambda^\alpha(\mathbf{R}) \propto \left(\delta\lambda_i^1(\mathbf{R}) \frac{2(s_i + \alpha)}{(1+\alpha)(s_i + 1)} \right)_{i \in N}.$$

Itt szintén a kisebb értéke kedvezőbb. A 3.6. tétel szerint $\delta\lambda^0(\mathbf{R}) = DI(\mathbf{R})$ és $\delta\lambda^\infty(\mathbf{R}) = DF(\mathbf{R})$, ezeken kívül a duál lambda eljárással fogunk foglalkozni ($\alpha = 1$).

Az invariáns és fair bets módszerek analógiájára az internal slackening módszer szintén kiterjeszthető a súlyozott irányított gráfok $\mathcal{R}$ osztályára, bár ennek lehetőségét Slikker et al. (2012) nem említi.

3.4.2 Pozíciós erő

Az internal slackening módszer $\mathcal{R}$-re kiterjesztett változata ugyan lehetővé teszi a legerősebb ligák értékelését, a gyengébb ligákon belül azonban továbbra sem ad rangsort. Erre kínál egy megoldást a *pozíciós erő* (positional power) (Herings et al., 2005), ami egyszerre veszi figyelembe az irányított gráf lokális és globális struktúráját: amennyiben az X_i csúcs dominálja j-t, a rögzített c értékelés mellett az utóbbi erejének $1/a$ hányadát is megkapja. Egy kiválasztott csúcs ereje az alábbi képlettel számítható:

$$x_i = \sum_{j \in S_i} \left(c + \frac{1}{a} x_j \right) \quad \text{minden } X_i \in N\text{-re.}$$

Az eddig tárgyalt módszerekkel ellentétben ez nem egy homogén egyenletrendszer, nincs szükség normalizálásra. Jelölje $\mathbf{s}$ a követők, az egyes csúcsokból kiinduló élek számának vektorát, ami a $\mathbf{C}$ mátrix főátlójában szereplő elemekből képzett vektorral azonos. Ekkor a megoldandó feladat

$$(\mathbf{E} - (1/a)\mathbf{R})\,\mathbf{x} = c\mathbf{s}\ ,$$

ahol $\mathbf{E} \in I\!R^{n \times n}$, $e_{ii} = 1$ minden $X_i \in N$-re. Az egyenletrendszernek mindig létezik egyértelmű megoldása, ha $a > n-1$, így $c = 1$ mellett $a = n$ választása maximalizálja a globális struktúra, a követők értékelésének hatását ($a \to \infty$ esetén a megoldás $\mathbf{s}$-hez konvergál, így csak a követők száma számít) (Herings et al., 2005).

3.6. Definíció. Az $x : \mathcal{G} \to I\!R^n$ *pozíciós erő* az

$$x(\mathbf{R}) = (\mathbf{I} - (1/n)\mathbf{R})^{-1}\,\mathbf{s}$$

egyenletrendszer $x(\mathbf{R})$ megoldása.

Tehát a pozíciós erő minden súlyozatlan irányított gráfra egyértelmű. A $\delta x : \mathcal{G} \to I\!R^n$ *pozíciós gyengeség* (positional weakness) az irányított gráf összes élének megfordításával kapott gráfra kiszámított pozíciós erővel egyezik meg: $\delta x(\mathbf{R}) = p(\mathbf{R}^\top)$, ahol ismét a kisebb érték lesz kedvezőbb (Herings et al., 2005). Ez a korábbiakhoz hasonlóan tekinthető a duál pozíciós erőnek. A kettő különbsége az $x^{Cp} : \mathcal{R} \to I\!R^n$ *Copeland pozíciós erő*, azaz $x^{Cp}(\mathbf{R}) = x(\mathbf{R}) - \delta x(\mathbf{R})$.

A pozíciós erő kiterjeszthető olyan súlyozott irányított gráfokra, melyekben többszörös hurokélek is előfordulhatnak (Herings et al., 2005). Utóbbiak megengedése egy új irányt jelentene a páros összehasonlításokon alapuló rangsorolásban, azonban a cikkben is csak említés szintjén szerepel, ezért mi sem tárgyaljuk.

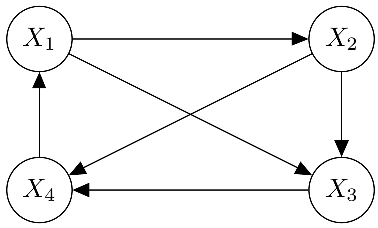
3.5 Példa

Egy példán keresztül illusztráljuk a bemutatott módszereket.

3.1. Példa (Slutzki és Volij, 2005; Slikker et al., 2012). Legyen $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ és

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A rangsorolási probléma a *2. ábrán* látható.



2. ábra. A 3.1. példa rangsorolási problémája

Az $\mathbf{s}$ pontszám módszer alapján az alternatívák rangsora $(X_1 \sim X_2) \succ (X_3 \sim X_4)$, mert az első kettő 2-2, a többi pedig 1-1 győzelemmel rendelkezik. A fair bets értékelővektor $F(\mathbf{R}_1)^\top = (v_1, v_2, v_3, v_4) = (4, 3, 1, 2)/10$, tehát a rangsor $X_1 \succ X_2 \succ X_4 \succ X_3$. A transzponált probléma $\sum_{j \in N} r_{ij} v_i = \sum_{j \in N} r_{ji} v_j$, $\forall X_i \in N$ egyenletrendszerének megoldása $v^\top = (v_1, v_2, v_3, v_4) = (2, 1, 3, 4)/10$, vagyis a duál fair bets rangsor $X_2 \succ X_1 \succ X_3 \succ X_4$. Az eltérés oka a különböző megközelítés: a fair bets nagyobb súlyt ad az erősebb ellenfelek felett aratott győzelmeknek, mint a gyengébb ellenfelekkel szembeni vereségeknek, míg a duál fair bets éppen ennek fordítottját írja elő. A példában a fair bets rangsor X_3-mal szemben X_4-nek kedvez, mert az X_1 (erős játékos) felett aratott győzelem értékesebb, mint az X_3 (gyenge játékos) elleni vereség, míg az X_3-mal szembeni vereség kevésbé súlyos, mint az X_2-től elszenvedett. Hasonlóan vezethető le az $X_1 \succ X_2$ reláció. A duál fair bets módszer éppen ennek az ellenkezőjét csinálja, ott az azonos pontszámmal rendelkező objektumok viszonya az ellenkező irányba dől el.

Az invariáns módszerrel kapott értékelővektor $I(\mathbf{R}_1)^\top = (4, 3, 2, 4)/13$, vagyis a rangsor $(X_1 \sim X_4) \succ X_2 \succ X_3$. Ez még jobban felértékeli azt az X_4 objektumot, amelynek sikerült legyőznie X_1-et. Például folyóiratok rangsorolásánál gondolhatjuk azt, hogy X_4-re azért nem hivatkozik X_2 és X_3, mert előbbi annyival magasabban áll a képzeletbeli mércén, miután a mindkettejüknél jobb X_1 újságban szerepel egy referencia X_4-re. Ugyanez a duál invariáns eljárásnál $DI(\mathbf{R}_1) = (4, 2, 3, 4)/13$, tehát a sorrend $X_2 \succ X_3 \succ (X_1 \sim X_4)$. Itt X_3 is megelőzi X_1-et annak eredményeként, hogy az utóbbi vereséget szenvedett a gyengének számító X_4 objektumtól: bizonyos alkalmazásokban célszerű lehet a duál fair betsnél jobban büntetni az ilyen teljesítményt.

Az internal slackening pontozási eljárás két extremális pontja a 3.6. tétel értelmében a fair bets és az invariáns módszer. $\alpha = 1$ esetén a λ módszer (Borm et al., 2002) értékelővektora $\lambda^1(\mathbf{R}_1) = (8, 6, 3, 6)/23$, azaz a rangsor

$X_1 \succ (X_2 \sim X_4) \succ X_3$. A duál λ módszer eredménye $(6, 3, 6, 8)/23$, vagyis a sorrend $X_2 \succ (X_1 \sim X_3) \succ X_4$. Mindkettő indokolhatónak tűnik. A fair bets-szel szemben a lambda módszernél előbbre került az X_4 objektum, azonban még nem ért el az invariáns módszerhez hasonló kiemelkedő pozíciót. Ugyanígy, a duális eljárás jobban bünteti X_1-et, mint a duál fair bets, de nem annyira, mint a duál invariáns. Ez látható a többi, a 3.5. tétel segítségével számítható α értékre is:

$$\lambda^\alpha(\mathbf{R}_1) \propto \left(8 \cdot \frac{2+2\alpha}{2+2\alpha}, 6 \cdot \frac{2+2\alpha}{2+2\alpha}, 3 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha}, 6 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha}\right) =$$
$$= \left(8, 6, 3 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha}, 6 \cdot 2 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha}\right)$$

Ebből már könnyen meghatározhatók a különböző α értékek melletti rangsorok:

$$\succeq^\lambda_{\mathbf{R}_1} = \begin{cases} (X_1 \sim X_4) \succ X_2 \succ X_3, & \text{ha } \alpha = 0 \\ X_1 \succ X_4 \succ X_2 \succ X_3, & \text{ha } 0 < \alpha < 1 \\ X_1 \succ (X_2 \sim X_4) \succ X_3, & \text{ha } \alpha = 1 \\ X_1 \succ X_2 \succ X_4 \succ X_3, & \text{ha } 1 < \alpha\,. \end{cases}$$

Hasonlóan, a 3.7. tétel révén tetszőleges α értékre megadható a duál internal slackening módszer eredménye:

$$\delta\lambda^\alpha \propto \left(6 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha}, 3 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha}, 6 \cdot \frac{2+2\alpha}{2+2\alpha}, 8 \cdot \frac{2+2\alpha}{2+2\alpha}\right) =$$
$$= \left(6 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha}, 3 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha}, 6, 8\right),$$

amiből a különböző α értékek melletti rangsorok:

$$\succeq^{\delta\lambda}_{\mathbf{R}_1} = \begin{cases} X_2 \succ X_3 \succ (X_1 \sim X_4), & \text{ha } \alpha = 0 \\ X_2 \succ X_3 \succ X_1 \succ X_4, & \text{ha } 0 < \alpha < 1 \\ X_2 \succ (X_1 \sim X_3) \succ X_4, & \text{ha } \alpha = 1 \\ X_2 \succ X_1 \succ X_3 \succ X_4, & \text{ha } 1 < \alpha\,. \end{cases}$$

Végezetül számoljuk ki a csúcsok pozíciós erejét és gyengeségét, valamint a Copeland pozíciós erőt. Ezúttal csak a rangsorokat közöljük, melyek a fenti sorrendben a következők: $X_1 \succ X_2 \succ X_4 \succ X_3$, $X_2 \succ X_1 \succ X_3 \succ X_4$, valamint $X_2 \succ X_1 \succ X_4 \succ X_3$. Utóbbi értékelővektorával kapcsolatban érdemes megjegyezni, hogy – amint azt Herings et al. (2005) bizonyítja – a Copeland pozíciós erők összege nulla, ráadásul a példában $x^{Cp}(\mathbf{R}_1)_4 = -x^{Cp}(\mathbf{R}_1)_1$ és $x^{Cp}(\mathbf{R}_1)_3 = -x^{Cp}(\mathbf{R}_1)_2$, ami egyfajta szimmetrikus viszonyra utalhat. A pozíciós erő a fair betshez, a pozíciós gyengeség a duál fair betshez hasonlóan értelmezhető. A kettő eredőjeként alakul ki a Copeland pozíciós erő, némileg furcsa végeredménnyel. Miközben X_2 jobbnak bizonyul X_1-nél a kiegyensúlyozottabb teljesítmény okán, ugyanez a mezőny alján, X_3 és X_4 viszonyában éppen ellenkező következményekkel jár. Ez a megközelítés a sportban vonzónak tűnhet: a jó játékosokat akkor díjazzuk, ha nem szenvednek el váratlan vereségeket, míg a gyengébbeket inkább akkor, amikor sikerül meglepetést okozniuk. A vizsgált példából kapott intuitív benyomás elméleti alátámasztása természetesen még további kutatást igényel.

3.6 A bemutatott módszerek néhány problémája

Ahogy azt a 3.1. példa mutatja, a rangsorolási módszerek kiválasztásában célszerű lehet az axiomatikus megközelítés alkalmazása, intuitív alapon nehéz kiválasztani a megfelelő eljárást. Az előzőekben bemutattuk az invariáns és a fair bets módszerek karakterizációit, azonban az ehhez szükséges tulajdonságok – a monotonitással, megfordíthatósággal, vagy az önkonzisztens monotonitással szemben –, valószínűleg éppen az axiomatizáció céljából lettek kitalálva.[8]

Ennek megfelelően az alfejezetben a 2.3.4. és a 2.3.5. szakaszokban tárgyalt tulajdonságokkal foglalkozunk, melyek alapján bármelyik bemutatott módszer kritizálható. A lista messze nem teljes, a téma iránt érdeklődő olvasóknak ajánljuk a Chebotarev és Shamis (1998) és a González-Díaz et al. (2014) cikkeket.[9] A tárgyalás szinte kizárólag a negatív eredményekre fókuszál, aminek alapvetően két oka van. Egyrészt szeretnénk felhívni a figyelmet a módszer korlátaira. Másrészt úgy véljük, a nem teljesen kitöltött esetre ismert karakterizációs eredmények korlátozott száma miatt célszerűbb a módszerek hibái alapján választani: amennyiben ezek mindegyikéről sikerül kimutatni, hogy a konkrét alkalmazásban nem okoznak problémát, használatuk megalapozottnak tekinthető.

3.6.1 Manipuláció

3.1. Állítás *Az invariáns módszer nem monoton* (Kóczy és Strobel, 2009).

Bizonyítás. Ellenpéldát adunk.

3.2. Példa. Legyen $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, illetve

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R}_2' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az invariáns értékelővektor $I(\mathbf{R}_2) = (30,\ 24,\ 22,\ 21)/97$, így a rangsor $X_1 \succ X_2 \succ X_3 \succ X_4$, majd a X_4 alternatíva két újabb vereséget szenved el X_1 ellen. Amennyiben az eljárás nem manipulálható, az első és utolsó helyezetteknek nem szabad változnia. De $I(\mathbf{R}_2') = (54, 32, 34, 35)/155$, tehát $X_1 \succ X_4 \succ X_3 \succ X_2$, az X_4 objektum a második helyre ugrott előre. A probléma oka, hogy az X_1 elleni vereségek számának növekedése az arányosság megtartása miatt csökkenti a többi értékét, a legerősebb X_1 objektum helyzetének további javulása pedig ,,magával húzza" X_4-et. Sőt, X_4-nek nem csak

[8] Slutzki és Volij (2005) a tanulmány bevezetésében megemlíti, hogy a fair bets módszer karakterizációjában érdemes lenne a monotonitás Rubinstein (1980)-féle, természetes követelményt jelentő változatát használni, ez azonban a szerzők bevallása szerint nem segít a reprezentációs tétel megfogalmazásában, ehelyett a némileg kétségesebb a nemnegatív reakció a vereségekre tulajdonságot választják.

[9] Terveim szerint készülő doktori értekezésemben is részletesen ki fogok térni erre a témára.

a relatív értékelése javul, hanem az abszolút is, mivel $21/97 < 35/155$. Ennek akkor lehet jelentősége, ha az értékeléseket nem rangsorolásra használjuk, hanem valamilyen szűkös erőforrás elosztásáról szóló döntésnél. □

3.3. Példa. Létezik ennél kisebb méretű ellenpélda is. Legyen $N = \{X_1, X_2, X_3\}$, illetve

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R}'_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az invariáns értékelővektor $I(\mathbf{R}_3) = (14, 16, 15)/45$, így a rangsor $X_2 \succ X_3 \succ X_1$, majd az X_1 alternatíva egy újabb vereséget szenved el X_2 ellen. Amennyiben az eljárás nem manipulálható, az első és utolsó helyezetteknek nem szabad változnia. Ehhez képest $I(\mathbf{R}'_3) = (21, 26, 20)/67$, tehát $X_2 \succ X_1 \succ X_3$, az X_1 objektum, rosszabb teljesítménye ellenére, a második helyre ugrott előre. A probléma oka hasonló a korábbihoz, és $14/45 < 21/67$ következtében ismét javul X_1 abszolút értékelése is.

3.4. Következmény. *A PageRank módszer nem monoton.*

Tehát Slutzki és Volij (2006) ajánlását érdemes óvatosan kezelni, erősen megfontolandó az invariáns (PageRank) módszer tudománymetriai alkalmazása. Ez bizonyos sportágaknál is gondot okozhat, például egy tenisz örökranglista esetén megtörténhet az a furcsaság, hogy valaki jobban járt volna, ha több vereséget gyűjt össze egy kiemelkedő játékos ellen (Radicchi, 2011).

Az invariáns módszer nem monotonitására – véletlen generált mátrixokkal – könnyű ellenpéldát találni, a fair bets eljárásra és a két duálra azonban nem sikerült ilyet adnunk.

1. Sejtés. *A duál invariáns, fair bets és duál fair bets módszerek mindegyike monoton.*

A monotonitás meglehetősen szoros összefüggésben van a *nemnegatív reagálás a győzelemre* (nonnegative responsiveness to the beating relation) tulajdonsággal, amit a fair bets eljárás teljesít, ez is alátámaszthatja a fenti sejtést (González-Díaz et al., 2014).

3.2. Állítás. *A lambda módszer nem monoton.*

Bizonyítás. Bemutatunk egy minimális méretű, nem túl nagy értékeket tartalmazó ellenpéldát.

3.4. Példa. Legyen $N = \{X_1, X_2, X_3\}$, illetve

$$\mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R}'_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A lambda módszer értékelővektora $\lambda^1(\mathbf{R}_4) = (20, 16, 21)/57$, így a rangsor $X_3 \succ X_2 \succ X_1$, majd az X_1 alternatíva egy újabb vereséget szenved el

X_2 ellen. Amennyiben az eljárás nem manipulálható, a második és harmadik helyezetteknek nem szabad változnia. Ehhez képest $\lambda^1(\mathbf{R}'_4) = (25, 24, 24)/73$, tehát $X_1 \succ (X_2 \sim X_3)$, az X_1 objektum lett a győztes: X_1 gyengébb teljesítményének hatására X_2 helyzete javul, ami negatívan hat X_3 értékelésére. Itt azonban X_1 abszolút súlya csökken, mert $20/57 > 25/73$, bár ennek mértéke nyilvánvalóan kisebb, mint X_3-é. □

3.5. Példa. A 3.4. példa alapján az a gyanúnk támadhat, hogy a lambda módszer alkalmazásakor a monotonitás $r'_{ij} > r_{ij}$ feltétele által (elvileg) negatívan érintett X_i objektum abszolút értékelése mindig csökken (szemben az invariáns eljárással, lásd a 3.2. és a 3.3. példákat), ez azonban nem igaz. Legyen $N = \{X_1, X_2, X_3\}$, illetve

$$\mathbf{R}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R}'_5 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Itt $2 = (r_5)'_{12} > (r_5)_{12} = 1$, de $\lambda^1(\mathbf{R}_4) = (78, 80, 85)/243$ és $\lambda^1(\mathbf{R}_5) = (91, 100, 90)/281$, azaz $X_3 \succ^{\lambda^1}_{\mathbf{R}_5} X_1$ és $X_1 \succ^{\lambda^1}_{\mathbf{R}'_5} X_3$, valamint $78/243 < 91/281$. A 3.2. állítás bizonyításában ezt a példát is megadhattuk volna, de az ott szereplő egyszerűbb, kisebb számokat tartalmaz.

A 3.6. tétel szerint szoros kapcsolat áll fenn az invariáns, lambda és fair bets módszerek között, ezért az 1. sejtés tükrében, érdemes megnézni az eddig vizsgált példákat internal slackening eljárás minden $\alpha \in (0, \infty)$ paraméterértékére.

3.1. Megjegyzés. Az $\mathbf{R}_3$ és $\mathbf{R}'_3$ mátrixok mellett $\lambda^1(\mathbf{R}_3) = (7,\ 8,\ 6)/21$ és $\lambda^1(\mathbf{R}'_3) = (28,\ 39,\ 24)/91$, vagyis $p(\mathbf{R}_3)^\top = (2,\ 2,\ 5)$ és $p(\mathbf{R}_3)^\top = (3,\ 2,\ 5)$ következtében

$$\lambda^\alpha(\mathbf{R}_2) \propto \left(7 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha},\ 8 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha},\ 6 \cdot \frac{10+2\alpha}{6+6\alpha}\right),$$

és

$$\lambda^\alpha(\mathbf{R}'_2) \propto \left(28 \cdot \frac{6+2\alpha}{4+4\alpha},\ 39 \cdot \frac{4+2\alpha}{3+3\alpha},\ 24 \cdot \frac{10+2\alpha}{6+6\alpha}\right).$$

Az eljárás akkor nem erősen monoton, ha $X_1 \preceq^{\lambda^\alpha}_{\mathbf{R}_3} X_2$, de $X_1 \succeq^{\lambda^\alpha}_{\mathbf{R}_3} X_2$, vagy $X_1 \preceq^{\lambda^\alpha}_{\mathbf{R}_2} X_3$, de $X_1 \succeq^{\lambda^\alpha}_{\mathbf{R}_3} X_3$, vagy $X_2 \succeq^{\lambda^\alpha}_{\mathbf{R}_3} X_3$, de $X_2 \preceq^{\lambda^\alpha}_{\mathbf{R}_3} X_3$. Itt $7(4+2\alpha)/(3+3\alpha) \leq 8(4+2\alpha)/(3+3\alpha)$ minden $\alpha \geq 0$ esetén teljesül a 3.2. és a 3.3. következmények alapján, míg a $28(6+2\alpha)/(4+4\alpha) \geq 39(4+2\alpha)/(3+3\alpha)$ feltétel $\alpha \geq 0$ mellett lehetetlen. Ugyanakkor $7(4+2\alpha)/(3+3\alpha) \leq 6(10+2\alpha)/(6+6\alpha)$, ha $\alpha \leq 1/4$, és $28(6+2\alpha)/(4+4\alpha) \geq 24(10+2\alpha)/(6+6\alpha)$ tetszőleges $\alpha \geq 0$-ra, következésképp $\alpha \leq 1/4$ fennállásakor (például az invariáns módszernél) a λ^α pontozási eljárás manipulálható. Végül $8(4+2\alpha)/(3+3\alpha) \geq 6(10+2\alpha)/(6+6\alpha)$, amennyiben $\alpha \geq 1/5$, de $39(4+2\alpha)/(3+3\alpha) \leq 24(10+2\alpha)/(6+6\alpha)$ semmilyen $\alpha \geq 0$ mellett sem teljesül.

A fentiek alapján nyitott kérdés, hogy az internal slackening módszer pontosan milyen α értékek mellett nem monoton: $\alpha = 0$ (invariáns) és $\alpha = 1$

(lambda) mellett a 3.1. és a 3.2. állítások szerint biztosan nem az, utóbbi viszont valószínűleg nem éles korlát. Az 1. sejtés alapján a fair bets módszer, az $\alpha \to \infty$ eset már monoton.

Az 1. sejtés alapján logikusnak tűnik, hogy a duál fair bets és duál invariáns módszerek „között" (lásd a 3.7. tételt) elhelyezkedő duál lambda módszer is mentes a manipulációtól; itt sem sikerült ellenpéldát találnunk.

2. Sejtés. *A duál lambda módszer monoton.*

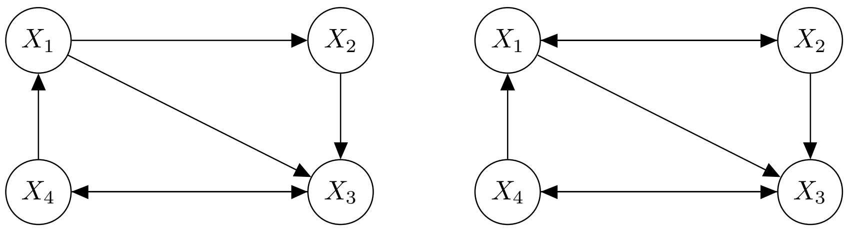
Az 1. és a 2. sejtések alapján megfogalmazható egy újabb megérzés.

3. Sejtés. *A duál internal slackening módszer tetszőleges $\alpha \geq 0$ esetén monoton.*

Az internal slackening módszert Slikker et al. (2012) kizárólag súlyozatlan irányított gráfok esetén tárgyalja, ezért érdemes megvizsgálni, az $\mathcal{R}_N$-nél szűkebb $\mathcal{G}_N$ halmazon találunk-e ellenpéldát.

3.3. Állítás. *A lambda módszer az erősen összefüggő, súlyozatlan irányított gráfok $\mathcal{G}_N$ osztályán sem monoton.*

Bizonyítás. $n = 3$-ra nem találtunk ellenpéldát.



(a) Az $(N, \mathbf{R}_6)$ rangsorolási probléma (b) Az $(N, \mathbf{R}_6')$ rangsorolási probléma

3. ábra. A 3.6. példa rangsorolási problémái

3.6. Példa. Legyen $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, illetve

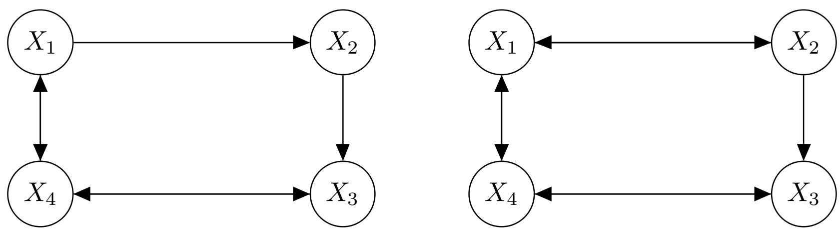
$$\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R}_6' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A két rangsorolási probléma a *3. ábrán* látható. A lambda módszer értékelővektora $\lambda^1(\mathbf{R}_6) = (2, 1, 2, 3)/8$, így a rangsor $X_4 \succ (X_1 \sim X_3) \succ X_2$, majd X_1 vereséggel zár X_2-vel szemben. Amennyiben az eljárás nem manipulálható, X_1 nem előzheti meg X_3-at. Ehhez képest $\lambda^1(\mathbf{R}_6') = (3, 3, 2, 3)/11$, tehát $(X_1 \sim X_2 \sim X_4) \succ X_3$, az X_1 objektum (holtversenyben) győztes lett. Ráadásul X_1 abszolút súlya is emelkedik, mert $1/4 < 3/11$. □

Már csak a pozíciós erő monotonitásának vizsgálata maradt hátra.

3.4. Állítás. *A pozíciós erő nem monoton.*

Bizonyítás. $n = 3$-ra nem találtunk ellenpéldát.



(a) Az $(N, \mathbf{R}_7)$ rangsorolási probléma (b) Az $(N, \mathbf{R}'_7)$ rangsorolási probléma

4. ábra. A 3.7. példa rangsorolási problémái

3.7. Példa. Legyen $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, illetve

$$\mathbf{R}_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R}'_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A két rangsorolási probléma a *4. ábrán* látható. A pozíciós erő értékelővektora $x(\mathbf{R}_7) = (708,\ 324,\ 404,\ 724)/223$ (ez a vektor nem 1-re normalizált), így a rangsor $X_4 \succ X_1 \succ X_3 \succ X_2$, majd az X_1 alternatíva vereséggel zár X_2 ellen. Amennyiben az eljárás nem manipulálható, X_1 nem léphet előrébb a rangsorban. Ugyanakkor $x(\mathbf{R}'_7) = (48,\ 44,\ 24,\ 44)/13$, azaz $X_1 \succ (X_2 \sim X_4) \succ X_3$, az X_1 objektum lett a győztes. X_1 gyengébb teljesítményének hatására X_2 helyzete sokat javul, ez pedig negatívan hat X_4 értékelésére.

Ez a rangsor elég furcsának tűnik, mert az $X_3 \to X_2$ irányított él behúzásával egy olyan problémát kapunk, ahol az objektumok helyzete teljesen szimmetrikus. Valóban, ekkor $p(\mathbf{R}''_7) = (4,\ 4,\ 4,\ 4)$, ami azt sugallja, hogy $\mathbf{R}'_7$-ben X_2-nek kellene elsőnek, X_3-nak pedig utolsónak lennie. A pozíciós gyengeségek $\delta x(\mathbf{R}'_7) = (44,\ 24,\ 44,\ 48)/13$ és $\delta x(\mathbf{R}''_6) = (4,\ 4,\ 4,\ 4)$, így $x^{Cp}(\mathbf{R}'_7) = (4,\ 20,\ -20,\ -4)/13$ és $x^{Cp}(\mathbf{R}''_7) = (0,\ 0,\ 0,\ 0)$. Tehát intuíciónkkal a Copeland pozíciós erő van összhangban. □

A másik két kapcsolódó eljárás manipulálhatóságát nem tudtuk bizonyítani.

4. Sejtés. *A pozíciós gyengeség és Copeland pozíciós erő módszerek monotonok.*

Összességében úgy tűnik, a monotonitás miatt az invariáns (PageRank) módszer helyett célszerűbb a fair bets eljárás, vagy a duálok használata. Amennyiben mégis az előbbi mellett döntünk, célszerű kitérni arra, miként lehet elkerülni az ebből fakadó problémákat.

3.6.2 Megfordíthatóság

3.5. Állítás. *Az invariáns (PageRank), fair bets, λ, internal slackening és pozíciós erő módszerek nem megfordíthatók.*

Bizonyítás. A 3.1. példában szereplő irányított gráfon egyik eljárás sem teljesíti a megfordíthatóság 2.1. következményben megkövetelt feltételét, miszerint a pontozási eljárás duálja azonos rangsort eredményez. A fair bets módszerre ezt már González-Díaz et al. (2014, Example 4.4) is belátta. □

Ebből a 2.2. állítás alapján adódik a következő eredmény.

3.5. Következmény. *A duál invariáns, duál fair bets, duál λ, duál internal slackening és pozíciós gyengeség (duál pozíciós erő) módszerek nem megfordíthatók.*

3.6. Állítás. *A Copeland pozíciós erő megfordítható.*

Bizonyítás. A módszer definíciójából adódik: $x^{Cp}(\mathbf{R})_i \geq x^{Cp}(\mathbf{R})_j \Leftrightarrow x(\mathbf{R})_i - \delta x(\mathbf{R})_i \geq x(\mathbf{R})_j - \delta x(\mathbf{R})_j \Leftrightarrow x(\mathbf{R}^\top)_i - \delta x(\mathbf{R}^\top)_i \leq x(\mathbf{R}^\top)_j - \delta x(\mathbf{R}^\top)_j \Leftrightarrow x^{Cp}(\mathbf{R}^\top)_i \leq x^{Cp}(\mathbf{R}^\top)_j$. □

A fair bets módszer alkalmazása elleni egyik legjelentősebb érv a megfordíthatóság hiánya González-Díaz et al. (2014). A Copeland pozíciós erőhöz hasonló ötlettel ez könnyedén kiküszöbölhetőnek tűnik: elég lenne bevezetni a fair bets és a duál fair bets értékelővektorok különbségét.

3.6.3 Önkonzisztens monotonitás

Alaposabban tanulmányozva a 3.1. példában kapott rangsorokat, feltűnő, hogy mindegyikben fennáll az $X_2 \succ X_3$ összefüggés. Ez nem tekinthető puszta véletlennek, nehéz lenne a fordított sorrend mellett érvelni. Ugyanis mindkét objektum vereséget szenvedett X_1-től, viszont legyőzte X_4-et, ilyen tekintetben tökéletesen azonos teljesítményt mutatva. Ellenben X_2 jobbnak bizonyult X_3-nál, így logikusnak tűnik szigorúan előrébb rangsorolni. Többek között ez is egy, az önkonzisztens monotonitás által előírt követelmény egy pontozási eljárás által adott sorrendre vonatkozóan.

Eszerint a tárgyalt módszerek bizonyos esetekben teljesítik az önkonzisztens monotonitást. Általánosan azonban nem ez a helyzet.

3.8. Tétel. *Az invariáns, duál invariáns, fair bets, duál fair bets, lambda, duál lambda, internal slackening, duál internal slackening, pozíciós erő, pozíciós gyengeség és Copeland pozíciós erő módszerek nem önkonzisztens monotonok* (Chebotarev és Shamis, 1999).

Bizonyítás. A tételben szereplő mindegyik módszer győzelem-vereség kombináló pontozási eljárás, így nem teljesíthetik az önkonzisztens monotonitást (Chebotarev és Shamis, 1999, Theorem 8). A 2.2. példában az (X_i, X_j) irányított élt $r_{ij} = 1$ reprezentálhatja, a páros összehasonlítási mátrix többi eleme pedig 0. Ekkor az invariáns eljárásra $(X_6 \sim X_7) \succ (X_2 \sim X_3)$, duáljára $(X_2 \sim X_3) \succ X_6 \succ X_7$, a fair betsnél $(X_2 \sim X_3) \sim (X_6 \sim X_7)$, duáljánál pedig $(X_2 \sim X_3) \succ X_6 \succ X_7$. A λ módszer esetén $(X_6 \sim X_7) \succ (X_2 \sim X_3)$, duáljára $(X_2 \sim X_3) \succ X_6 \succ X_7$. $p_2 = p_3 = 1$ és $s_2 = s_3 = 1$ alapján X_2 és X_3 elődeinek és követőinek száma azonos, valamint $X_2 \sim^{\lambda^1} X_3$ és $X_2 \sim^{\delta\lambda^1} X_3$, ezért a 3.2. következmény szerint $X_2 \sim^{\lambda^\alpha} X_3$

és $X_2 \sim^{\delta\lambda^\alpha} X_3$ tetszőleges $\alpha > 0$-ra. Végül a pozíciós erő alkalmazásakor $(X_6 \sim X_7) \succ (X_2 \sim X_3)$, a pozíciós gyengeségnél $(X_2 \sim X_3) \succ X_6 \succ X_7$, míg a Copeland pozíciós erőben $(X_2 \sim X_3) \succ X_6 \succ X_7$. Utóbbi és az eljárások duál változatai valamivel jobban teljesítenek, mert az $X_2 \sim X_3$ és $X_6 \sim X_7$ feltételekből csak az előbbit sértettek meg, az eredeti változatok viszont mindkettőt. □

3.2. Megjegyzés. Az önkonzisztens monotonitásra adott ellenpélda néhány esetben a szükségesnél bonyolultabb, például a fair bets módszer már $n = 5$ esetén megsérti azt (González-Díaz et al., 2014).

A 3.8. tétel egyben azt is mutatja, hogy a 3.6.2. szakasz végén említett út, az eredeti és duál értékelővektorok különbségének képzése csak a megfordíthatóság megteremtésére alkalmas, az önkonzisztens monotonitás megsértésének kiküszöbölésére nem (ahogy a pozíciós erőnél is látszik), hiszen mindegyik módszernél fennáll az $X_2 \sim X_3$ döntetlen viszony.

3.6.4 Az értelmezési tartomány kérdése

A 3.2.3. alfejezetben bemutattuk a fair bets módszer egy lehetséges kiterjesztését reducibilis $\mathbf{R}$ páros összehasonlítási mátrixokra, ami értelemszerűen megtehető az invariáns és az internal slackening eljárások, illetve ezek duáljai esetén is. Itt két, ezzel kapcsolatos kritikus pontot tárgyalunk.

A párhuzamos ligák nem összehasonlíthatósága azért vitatható, mert ez még nem jelenti azt, hogy a kettő között semmilyen kapcsolat sem található: egy G irányított gráf erős összefüggőségének hiányában irányítatlan változata még lehet összefüggő. A 2.1. példában igény mutatkozhat az $[X_1]$ és $[X_5]$ ligák közötti különbségtételre, amit az imént tárgyalt önkonzisztens monotonitás követelménye is támogat, miszerint X_1 egyértelműen jobbnak tekinthető X_5-nél, ugyanis mindketten legyőzték X_3-at és X_4-et, de az előbbi X_2-t is. Slikker et al. (2012) meg is mutatja, hogy az internal slackening módszer kiterjeszthető az ilyen, több legerősebb ligát tartalmazó esetekre. Ugyanakkor ezen általánosítások mindegyike a korábbinál bonyolultabb tárgyalást igényel, jelentős mértékben rontja az áttekinthetőséget. Így, amennyiben ilyen irányú igény merül fel, célszerű az általánosabb értelmezési tartományt megengedő eljárásokhoz, a pozíciós erőhöz, az általánosított sorösszeghez vagy a legkisebb négyzetek módszeréhez fordulni.

A másik kérdés, hogy minden esetben jó megoldás jelent-e az, ha a gyengébb liga legjobb tagja is hátrébb kerül, mint az erősebb leggyengébb résztvevője?

3.8. Példa (Conner és Grant, 2000). Legyen $N = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ és

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 99 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 99 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vagyis X_1 nagymértékben jobbnak bizonyult X_2-nél (100-ból 99-szer legyőzte), X_3 pedig a X_4-nél. A két halmaz közötti átjárást, az összefüggőséget az biztosítja, hogy X_1 egyszer X_4-et is megverte. Ekkor a két liga $\{X_1, X_2\}$ és $\{X_3, X_4\}$, ebben a természetes sorrendben. Emiatt az X_2 alternatíva X_3 elé fog kerülni a rangsorban, ez azonban egyedül X_1 és X_4 összehasonlításának a másik kettőhöz képest kevéssé megbízható kimenetelén alapul. Amennyiben figyelembe vesszük az r_{14} elem erős bizonytalanságát, sokkal logikusabbnak tűnik az $X_1 \succ X_3 \succ X_2 \succ X_4$ sorrend felállítása. Néhány módszernél ez érvényesül is, például a legkisebb négyzetek által szolgáltatott, 0-ra normalizált értékelővektor (25, −24, 24, −25).

Chebotarev (1994) ugyancsak ezzel érvel az általánosított sorösszeg használata mellett: irreducibilis páros összehasonlítási mátrixok esetén a különböző ligák között csak a körmérkőzéses esetben létezik egyértelmű sorrend.

4 Alkalmazások

4.1 A páros összehasonlítások felhasználásának néhány területe

Országok gazdasági teljesítményének mérésekor elengedhetetlen az eltérő árszínvonalból adódó különbségek kiszűrése. Bár az egyes fogyasztási javak és szolgáltatások árai elvben jól mérhetők, az aggregáció során nem egyértelmű, milyen termékszerkezettel kell azokat összesúlyozni. Tekintsük a vizsgált országok $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ és a termékek $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ halmazát, legyen a $k \in M$ fogyasztási jószág ára a $i \in N$ országban p_k^i, mennyisége pedig q_k^i. A leggyakrabban használt Fisher-index (Fisher, 1922) az i és j ország árszínvonalának összehasonlítására (a p felső index arra utal, hogy az árakat vetjük össze egymással):

$$F_{i/j}^p = \left(\prod_{\ell \in N} \frac{\sum_{k \in M} q_k^\ell p_k^i}{\sum_{k \in M} q_k^\ell p_k^j} \right)^{1/n}$$

Ez a mutató rendelkezik a reciprocitási tulajdonsággal ($F_{j/i}^p = 1/F_{i/j}^p$), ugyanakkor semmi sem garantálja tranzitivitását ($F_{i/k}^p = F_{i/j}^p \cdot F_{j/k}^p$), a multiplikatív módon felírt páros összehasonlítás mátrix inkonzisztens lehet. Ennek kezelésére többnyire a legkisebb négyzetek eljárást használják, ami a vásárlóerőparitás számításában – kidolgozói nevéből – EKS-módszerként ismert (Éltető és Köves, 1964; Szulc, 1964). Az azóta eltelt 50 évben sem módosítottak érdemben a kiindulási alapokon. Itt az egyenlő súlyozás módosítása jelenthet új kutatási irányt, miután a magas szinten aggregált adatok megbízhatóságáról számos információ áll rendelkezésre, például a $\sum_{k \in M} q_k^\ell p_k^i / \sum_{k \in M} q_k^\ell p_k^j$ hányadosok eltérése különböző $\ll \in N$ országokra az egyes országok termékszerkezetének hasonlóságát is mutathatja (Rao és Timmer, 2003).

A tudományos teljesítmények számszerűsítésére felmerülő igények kielégítése gyakran folyóiratok / tudományos kutatók / szakmai műhelyek egymásra való hivatkozásai alapján történik. Ezek a referenciák megadják egy kiválasztott objektumpár összehasonlításának eredményét, melyek segítségével képet kapunk azok jelentőségéről. Ehhez még az sem szükséges, hogy a kiválasztott folyóiratok azonos tudományterületekről származzanak: elegendő lehet, ha bármely kettő között találunk olyan láncot, ami alapján feltárható azok relatív fontossága. Itt azonban megjelenik egy új tényező, a vizsgált időszak alatt megjelent cikkek száma: egy hosszabb folyóiratra értelemszerűen nagyobb valószínűséggel érkeznek külső hivatkozások.

A jól ismert impakt faktor (Garfield, 1955) egyáltalán nem tesz különbséget a hivatkozások között, amit többen komoly hibának tekintenek (Rétallér és Tasnádi, 2013). Pinski és Narin (1976) az invariáns módszer egy, a megjelent cikkek számával korrigált változatát vezette be a folyóiratok rangsorolására, az általuk adott eljárást Palacios-Huerta és Volij (2004) karakterizálta. Kóczy és Nichifor (2013) megmutatta, hogy mindkettő érzékeny a cikkek darabolására, ezért egy ezt kiszűrő módosítást javasolt, mely azonos a fair bets módszerrel. Kóczy és Strobel (2010) egy másik eljárást, a *tournament* módszert ajánlja az invariáns módszer hibáinak kiküszöbölésére. Ez nem veszi figyelembe a megjelent cikkek számát, ezért – számos más, a 3.1. alfejezetben említett eljárás mellett – egyszerűen beilleszthető a mi tárgyalásunkba. Hasonló kérdések merülnek fel weblapok rangsorolásánál, ilyen elven alapul a Google keresőmotorjának működése is (Brin és Page, 1998).

A feladat nem ismeretlen a pszichológiában sem, az elsők között bukkant fel a Thurstone (1927) cikkben. A későbbiekben több pszichológus játszott úttörő szerepet a rangsorolási módszerek kidolgozásában (Gulliksen, 1956; Kaiser és Serlin, 1978). E területen azért lehet hasznos a páros összehasonlítások bevezetése, mert a kísérleti alanyok gyakran nem képesek abszolút skálán értékelni az egyes tényezőket, csak azok relatív viszonyának megbízható leírása várható tőlük.

Hasonló problémák jelentkezhetnek egy konferenciára beérkezett absztraktok elfogadásakor: mivel egy-egy értékelésre felkért szakember csak az általa kapott dolgozatokat látja, nem tudja megítélni a teljes mezőny erejét. Ennek következtében az általa adott pontszám nem ritkán erősen szubjektív, vannak szigorú és engedékeny bírálók, az ebből eredő torzítások kiszűrésében pedig a páros összehasonlítási módszertan nyújthat segítséget (Bozóki et al., 2013). A megközelítést borszakértők értékelésére is alkalmazták (London és Csendes, 2013). Ugyanez érvényes a napjainkban egyre népszerűbb internetes termékértékelő és -összehasonlító oldalak esetében. Jiang et al. (2011) a Netflix prize (`http://www.netflixprize.com`) adatbázist használta filmek rangsorolására, a páros összehasonlítások kimenetelét egy-egy kiválasztott néző értékelései alapján meghatározva, miáltal az eljárás alkalmas a beérkező vélemények különböző skálázásának kiküszöbölésére.

Sok, több százas vagy ezres nagyságrendű, egymástól többé-kevésbé független egyéni döntés alapján nagy biztonsággal állíthatók fel különböző sorrendek. A módszertant felsőoktatási intézmények felvételizői preferenciák segítségével történő rangsorolására használta Avery et al. (2013), egy nemrég megjelent hazai cikkben is hasonló megközelítéssel találkozunk (Telcs et al., 2013). Machado et al. (2012) pedig kórházak értékelését javasolta az orvosrezidensek választásainak felhasználásával.

Szavazási modellekben ezzel analóg feladatot jelent a preferenciák aggregálása: itt a két, egymással versengő alternatívára leadott szavazatok megoszlása képviselheti a páros összehasonlítás eredményét (Chebotarev és Shamis, 1998).

Végül az egyik klasszikus alkalmazási terület a sport. Zermelo (1929) tanulmányát számos olyan cikk követte, mely a gyakorlatban felmerülő különböző problémák megoldására tett kísérletet: Radicchi (2011) például egy tenisz örökranglista felállítását javasolta a PageRank-módszer alkalmazásával. Más megközelítéssel ugyanerre tett kísérletet Temesi et al. (2012). Csató (2013a) a svájci rendszerben[10] lebonyolított 2010-es férfi (open) sakkolimpián résztvevő csapatok rangsorolását végezte el egy páros összehasonlítási modell segítségével, megmutatva, hogy az alternatív sorrendek több szempontból kedvezőbb tulajdonságokkal bírnak, mint a hivatalos végeredmény. A sportbeli alkalmazások előnyei között említendő a hatalmas mennyiségben, kis utánajárással elérhető, kevés szubjektív elemet tartalmazó adatok felhasználásának lehetősége.

4.2 Megoldási keret a gyakorlatban felmerülő problémákhoz

Az alkalmazások során gyakran kérdéses, hogy a páros összehasonlítások ismert kimenetelei pontosan milyen $\mathbf{R}$ mátrixot eredményeznek. Többnyire az összehasonlítások számának megadása jelenti a kisebb problémát: például egy svájci rendszerű versenynél nyilvánvaló, hogy a lejátszott mérkőzések mindegyike azonosan egy súllyal szerepel, míg a többi alternatívapár esetén az összehasonlítások hiányoznak (Csató, 2013a).

A többszörös összehasonlítások, a súlyozás számos megfontolásból adódhat, például:

1. Egymásra való hivatkozásoknál: a vizsgált időszak alatt bármennyi referencia születhet egy adott cikkre vagy folyóiratra;

2. Nemzetközi árszínvonal-összehasonlításnál a két ország termékkosarának eltérése szolgáltathat információt a Fisher-index megbízhatóságáról (Rao és Timmer, 2003);

3. A sportbajnokságok, szavazások vagy pszichológiai vizsgálatok gyakran m számú fordulóra bonthatók, melyek mindegyikében egy alternatívapár legfeljebb egyszer kerül összehasonlításra. Ilyenkor logikus választásnak tűnik az ezek kimeneteleit leíró $\mathbf{R}^{(p)}, p = 1, 2, \ldots, m$ mátrixok olyan megválasztása, hogy $r_{ij}^{(p)} + r_{ji}^{(p)} = 1$ teljesüljön, amennyiben az X_i és X_j objektumok összehasonlításra kerültek, illetve $r_{ij}^{(p)} + r_{ji}^{(p)} = 0$, ha

[10] A svájci rendszer gyakori módszere a versenyek lebonyolításának olyan sportokban, ahol nem körmérkőzéses rendszerben játszanak és valahogy össze kell párosítani a fordulókban az egymás ellen játszó játékosokat vagy csapatokat.

nem. Többnyire azonban ekkor is az általunk használt, aggregált $\mathbf{R} = \sum_{p=1}^{m} \mathbf{R}^{(p)}$ mátrixot szokás vizsgálni (González-Díaz et al., 2014). Ez nem véletlen: Chebotarev és Shamis (1999) bizonyítja, hogy egyetlen, az egyéni $\mathbf{R}^{(p)}$ mátrixokon alapuló rangsoroló eljárás sem elégíti ki a 2.3.5. alfejezetben bemutatott önkonzisztens monotonitás tulajdonságot, ha az alternatívapárok közötti összehasonlítások száma nem azonos.

Temesi et al. (2012) egy tenisz örökranglista felállítására tett kísérletet a legjobb játékosok egymás elleni mérkőzései alapján. Utóbbiak száma tükrözheti a páros összehasonlítás megbízhatóságát, a cikk azonban eltekintett ennek kezelésétől. Az ok elsősorban az adatokban keresendő: például egy 16 : 0-s egymás elleni mérleg azt jelentené, hogy a súlyozott esetben óriási jelentősége lenne ennek a tökéletes, más játékosok számára lényegében megismételhetetlen dominanciának. Ehelyett (az egyik kódolásban) az $\mathbf{A}$ eredménymátrixon keresztül került beépítésre ez az információ.

Az összehasonlítások számának meghatározása után még mindig hátravan azok kimenetelének definiálása. Erre számtalan stratégia választható, mindenesetre célszerű több lehetséges kódolást párhuzamosan vizsgálni és egymással összevetni. Csató (2013a) például megmutatja, hogy az eredményül kapott sorrend nem érzékeny a különböző intenzitású győzelmek matematikailag elfogadható (monoton) transzformációira. Optimális esetben, a rangsorolási eljárások axiomatikus tulajdonságainak figyelembevételével, lehetőség nyílik a gyakorlati példában megfigyelt eredmények átkódolásának elméleti alátámasztására is (Csató, 2012).

A Közgazdasági Szemle márciusi számában Telcs et al. (2013) a felvételizők preferenciái alapján végezte el felsőoktatási intézmények rangsorolását: az ezek közötti páros összehasonlítások kimenetele a beadott jelentkezési lapok segítségével adható meg. Azonban korántsem egyértelmű, vajon mikor lehet két csúcsot összekötni, mikor mondhatjuk azt, hogy az egyik egyetem egyértelműen jobb a másiknál. A szerzők az alábbi feltételezésekkel éltek:

1. Nincs különbség a preferenciák erőssége között;
2. A közvetett preferenciák is számítanak (az első helyen megjelölt intézmény jobb a harmadiknál, negyediknél stb.);
3. A megjelölt szakok preferáltak az összes kihagyotthoz képest („A nem megjelölt szakok kevésbé preferáltak, mint bármelyik megjelölt");
4. A nem megjelölt szakok egyenrangúak, a köztük levő viszony döntetlennek minősül.

Ezek közül az első kettő aligha vitatható. A harmadik pont, a megjelölt objektumok összes kihagyotthoz képesti előnyben részesítése tekintetében már inkább indokolt az óvatosság. Több dolog is visszatarthat egy felvételizőt az általa legjobbnak gondolt szak megjelölésétől, például a további szakokra történő jelentkezés pénzbeli (és adminisztrációs) költségei, a magas ponthatárok miatt számára eleve elérhetetlen helyek kihagyása, vagy az egyetemre járás járulékos költségeinek (szállás, étkezés) nagysága. Ez indokolja, hogy Avery et al. (2013) hasonló vizsgálata az intézmények közötti preferenciákat csak a megadott választási halmazon belül értelmezi, valamelyik szakot akkor tekinti jobbnak egy másiknál, ha előrébb szerepel a felvételiző jelentkezési lapján. Végül a negyedik feltevés, a nem megjelölt objektumok egyenrangúként besorolását mellőzve – a hiányzó összehasonlítások megengedésével – célszerű lehet a két alternatíva összehasonlításának eredményét ismeretlennek tekinteni, vagyis az $r_{ij}^{(p)} = r_{ji}^{(p)} = 0{,}5$ helyett az $r_{ij}^{(p)} = r_{ji}^{(p)} = 0$ megoldást alkalmazni.

Összességében a gyakorlati alkalmazások egyik központi kérdése a valóságból származó megfigyelések matematikai nyelvre fordítása, ezért a páros összehasonlítási problémák megoldása során az alábbi lépések követését ajánljuk:

1. A matematikai módszerek alkalmazhatóságának ellenőrzése: például, ha a kiválasztott objektumok képesek befolyásolni a páros összehasonlítások eredményét, ösztönözve voltak-e a minél jobb eredmény elérésére (lásd a 3.6. alfejezetet);

2. Az egyes alternatívapárokra elvégzett összehasonlítások számának megadása;

3. A páros összehasonlítások kimenetelének kódolása;

4. A rangsorolási eljárás kiválasztása, lehetőség szerint az axiomatikus megközelítés tükrében;

5. A kapott sorrendek érzékenységvizsgálata a kiinduló hipotézisek szempontjából;

6. Az eredmények elemzése, összehasonlítása a már ismert rangsorokkal, megoldásokkal.

A folyamat természetesen nem egyirányú, szekvenciális. Az adatok elemzése rámutathat a kiinduló feltevés vagy a matematikai kódolás és a kiválasztott rangsorolási módszerek korlátaira, ráadásul az összehasonlítások súlyozása sem mindig függetleníthető azok kimenetelének meghatározásától (Temesi et al., 2012). A keret néha szűkíthető is, statisztikai jellegű vizsgálatokban például az első lépés értelemszerűen kimarad.

5 Összefoglalás

Tanulmányunkban a páros összehasonlításon alapuló rangsorolás egy általános modelljét és ennek gyakorlati alkalmazásait tekintettük át. Részletesen tárgyaltunk néhány pontozási eljárást, az invariáns (PageRank), fair bets, internal slackening és pozíciós erő módszereket. Bemutattuk az internal slackening által az invariáns és fair bets eljárások között teremtett kapcsolatot, illetve az utóbbiak egy karakterizációját. Ugyanakkor azt találtuk, hogy más tulajdonságok szempontjából bizonyos módszerek alkalmazása vitatható. A monotonitás megsértése miatt az alternatívák ellenérdekeltek lehetnek a jobb teljesítmény elérésében, ami elsősorban akkor előnytelen, ha lehetőségük van a páros összehasonlítások kimenetelének befolyásolására. A megfordíthatóság követelménye szerint a rangsorolási probléma ,,ellentettjét" véve, az alternatívák rangsorának is az ellenkezőjére kell változnia. Ezen axióma alapján bevezettük a pontozási eljárások duálisát, és azt találtuk, hogy azok jellemzően jobban teljesítenek a monotonitás szempontjából, bár itt még maradt néhány nyitott probléma. Ezt a két tulajdonságot egyedül a Copeland pozíciós erő teljesíti, az önkonzisztens monotonitás által előírt intuitív feltételt viszont, az összes többihez hasonlóan, megsérti. A pozíciós erő kivételével a többi módszernél nehézséget jelenthet az értelmezési tartomány korlátozott volta is.

A terület egyik legfontosabb kérdése az ideális pontozási eljárás megtalálása, ebben az axiomatikus tárgyalás kínál segítséget. Számos eljárásnak egyelőre nem ismert a karakterizációja, a meglevő eredmények pedig több szempontból vitathatók. Ezért inkább normatív alapon célszerű dönteni: ha sikerül megindokolni, miért nem jelentenek problémát az egyes kritikus tulajdonságok, akkor a választás kevéssé kifogásolható. Az újabb reprezentációs tételek megalkotásának nehézsége miatt egyelőre az elvárt axiómák összegyűjtése, továbbiakkal történő kiegészítése tűnhet ígéretesnek (González-Díaz et al., 2014).

Az alkalmazások szempontjából tanulságos lehet a különböző módszerek valós és szimulált példákon keresztül történő összevetése, amiből adott esetben kiderülhet, hogy két, látszólag eltérő eljárás valójában nem is áll olyan távol egymástól. A rangsoroláselmélettel foglalkozó kutatások gyakran nem titkolt célja célja az elméletileg megfelelően alátámasztott módszerek bevezetése a napi gyakorlatba, a nem ritkán erősen vitatható heurisztikus eljárások helyett vagy mellett. Erre ösztönözhet a laikusok számára fekete dobozként viselkedő matematikai formulák közérthetővé tétele, ami például a gráfinterpretációkon keresztül érhető el (Shamis, 1994; Brin és Page, 1998; Slikker et al. 2012; Csató, 2013b).

Irodalom

1. I. Ali, W. D. Cook és M. Kress. On the minimum violations ranking of a tournament. *Management Science*, 32(6):660–672, 1986.
2. A. Altman és M. Tennenholtz. Ranking systems: the PageRank axioms. In *Proceedings of the 6th ACM conference on Electronic commerce*, pages 1–8, 2005.
3. A. Altman és M. Tennenholtz. Axiomatic foundations for ranking systems. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 31(1):473–495, 2008.
4. K. J. Arrow. *Social choice and invidual values.* Wiley, New York, 1951.
5. C. N. Avery, M. E. Glickman, C. M. Hoxby és A. Metrick. A revealed preference ranking of U.S. colleges and universities. *The Quarterly Journal of Economics*, 128(1):425–467, 2013.

6. J. C. Borda. Mémoire sur les élections au scrutin. *Histoire de l'Academie Royale des Sciences*, 1781.
7. P. Borm, R. van den Brink és M. Slikker. An iterative procedure for evaluating digraph competitions. *Annals of Operations Research*, 109(1-4):61–75, 2002.
8. D. Bouyssou. Ranking methods based on valued preference relations: A characterization of the net flow method. *European Journal of Operational Research*, 60(1):61–67, 1992.
9. D. Bouyssou. Monotonicity of 'ranking by choosing': A progress report. *Social Choice and Welfare*, 23(2):249–273, 2004.
10. S. Bozóki, J. Fülöp és L. Rónyai. On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(1-2): 318–333, 2010.
11. S. Bozóki, L. Csató, L. Rónyai és J. Tapolcai. Robust peer review decision process. Kézirat, 2013.
12. R. A. Bradley és M. E. Terry. Rank analysis of incomplete block designs: I. The method of paired comparisons. *Biometrika*, 39(3-4):324–345, 1952.
13. S. Brin és L. Page. The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. *Computer networks and ISDN systems*, 30(1):107–117, 1998.
14. P. Yu. Chebotarev. Generalization of the row sum method for incomplete paired comparisons. *Automation and Remote Control*, 50(3):1103–1113, 1989.
15. P. Yu. Chebotarev. Aggregation of preferences by the generalized row sum method. *Mathematical Social Sciences*, 27(3):293–320, 1994.
16. P. Yu. Chebotarev és E. Shamis. Constructing an objective function for aggregating incomplete preferences. In A. Tangian és J. Gruber (szerk.): *Constructing Scalar-Valued Objective Functions*, volume 453 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, pages 100–124. Springer Berlin Heidelberg, 1997.
17. P. Yu. Chebotarev és E. Shamis. Characterizations of scoring methods for preference aggregation. *Annals of Operations Research*, 80:299–332, 1998.
18. P. Yu. Chebotarev és E. Shamis. Preference fusion when the number of alternatives exceeds two: indirect scoring procedures. *Journal of the Franklin Institute*, 336(2):205–226, 1999.
19. G. R. Conner és C. P. Grant. An extension of Zermelo's model for ranking by paired comparisons. *European Journal of Applied Mathematics*, 11(3):225–247, 2000.
20. G. R. Conner és C. P. Grant. Neighborhood monotonicity, the extended Zermelo model, and symmetric knockout tournaments. *Discrete Mathematics*, 309(12):3998–4010, 2009.
21. A. H. Copeland. A reasonable social welfare function. Seminar on Applications of Mathematics to social sciences, University of Michigan, 1951.
22. L. Csató. A paired comparisons ranking and Swiss-system chess team tournaments. Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület VI. éves konferencia, 2012. *http://media.coauthors.net/konferencia/conferences/7/LLSM_Buch_ranking_.pdf*.
23. L. Csató. Ranking by pairwise comparisons for Swiss-system tournaments. *Central European Journal of Operations Research*, 21(4):783–803, 2013.
24. L. Csató. A graph interpretation of the least squares ranking method. 2013b. *http://www.sztaki.mta.hu/~bozoki/csatolaszlo/Csato-AGraphInterpretation-2013-manuscript.pdf*. Benyújtva.

25. L. Csató. Páros összehasonlításon alapuló pontozási eljárások monotonitása: önkonzisztencia és önkonzisztens monotonitás – Adalékok a pontozási eljárások axiomatikus tárgyalásához. Műhelytanulmány, Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest, 2013c. *http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/1399.*
26. T. Csendes és E. Antal. PageRank based network algorithms for weighted graphs with applications to wine tasting and scientometrics. In *Proceedings of the 8th International Conference on Applied Informatics*, pages 209–216, 2010.
27. H. E. Daniels. Round-robin tournament scores. *Biometrika*, 56(2):295–299, 1969.
28. Ö. Éltető és P. Köves. Egy nemzetközi összehasonlításoknál fellépő indexszámítási problémáról. *Statisztikai Szemle*, 42(5):507–518, 1964.
29. I. Fisher. *The making of index numbers: a study of their varieties, tests, and reliability.* Houghton Mifflin, Boston, 1922.
30. D. Gale és L. S. Shapley. College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69(1):9–15, 1962.
31. E. Garfield. Citation indexes for science. A new dimension in documentation through association of ideas. *Science*, 122:1123–1127, 1955.
32. J. González-Díaz, R. Hendrickx és E. Lohmann. Paired comparisons analysis: an axiomatic approach to ranking methods. *Social Choice and Welfare*, 42(1):139–169, 2014.
33. H. Gulliksen. A least squares solution for paired comparisons with incomplete data. *Psychometrika*, 21(2):125–134, 1956.
34. B. Hansson és H. Sahlquist. A proof technique for social choice with variable electorate. *Journal of Economic Theory*, 13(2):193–200, 1976.
35. P. J.-J. Herings, G. van der Laan és D. Talman. The positional power of nodes in digraphs. *Social Choice and Welfare*, 24(3):439–454, 2005.
36. P. Horst. A method for determining the absolute affective value of a series of stimulus situations. *Journal of Educational Psychology*, 23(6):418–440, 1932.
37. O. Hudry. A survey on the complexity of tournament solutions. *Mathematical Social Sciences*, 57(3):292–303, 2009.
38. X. Jiang, L.-H. Lim, Y. Yao és Y. Ye. Statistical ranking and combinatorial Hodge theory. *Mathematical Programming*, 127(1):203–244, 2011.
39. H. F. Kaiser és R. C. Serlin. Contributions to the method of paired comparisons. *Applied Psychological Measurement*, 2(3):423–432, 1978.
40. J. G. Kemeny. Mathematics without numbers. *Daedalus*, 88(4):577–591, 1959.
41. L. Á. Kóczy és A. Nichifor. The intellectual influence of economic journals: quality versus quantity. *Economic Theory*, 52(3):863–884, 2013.
42. L. Á. Kóczy és M. Strobel. The invariant method can be manipulated. *Scientometrics*, 81(1):291–293, 2009.
43. L. Á. Kóczy és M. Strobel. The world cup of economics journals: A ranking by a tournament method. IEHAS Discussion Papers 1018, Institute of Economics, Hungarian Academy of Sciences, 2010.
44. J.-F. Laslier. *Tournament solutions and majority voting.* Springer Berlin, 1997.
45. S. J. Liebowitz és J. P. Palmer. Assessing the relative impacts of economics journals. *Journal of Economic Literature*, 22(1):77–88, 1984.

46. A. London és T. Csendes. HITS based network algorithm for evaluating the professional skills of wine tasters. Carpathian Applied Mathematics Workshop 2013. *http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes/saci13107.pdf.*
47. M. P. Machado, R. Mora és A. Romero-Medina. Can we infer hospital quality from medical graduates' residency choices? *Journal of the European Economic Association*, 10(6):1400–1424, 2012.
48. J. W. Moon és N. J. Pullman. On generalized tournament matrices. *SIAM Review*, 12(3):384–399, 1970.
49. J. H. Morrissey. New method for the assignment of psychometric scale values from incomplete paired comparisons. *Journal of the Optical Society of America*, 45(5):373–378, 1955.
50. F. Mosteller. Remarks on the method of paired comparisons: I. The least squares solution assuming equal standard deviations and equal correlations. *Psychometrika*, 16(1):3–9, 1951.
51. H. Moulin. Choosing from a tournament. *Social Choice and Welfare*, 3(4): 271–291, 1986.
52. S. Nitzan és A. Rubinstein. A further characterization of Borda ranking method. *Public Choice*, 36(1):153–158, 1981.
53. I. Palacios-Huerta és O. Volij. The measurement of intellectual influence. *Econometrica*, 72(3):963–977, 2004.
54. R. D. Pasteur. When perfect isn't good enough: Retrodictive rankings in college football. In J. A. Gallian (szerk.): *Mathematics & Sports*, Dolciani Mathematical Expositions 43, pages 131–146. Mathematical Association of America, 2010.
55. M. Pauly. Can strategizing in round-robin subtournaments be avoided? *Social Choice and Welfare*, DOI 10.1007/s00355-013-0767-6, 2013.
56. G. Pinski és F. Narin. Citation influence for journal aggregates of scientific publications: theory, with application to the literature of physics. *Information Processing & Management*, 12(5):297–312, 1976.
57. M. Pintér. A Shapley-érték axiomatizálásai. *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 26:289–315, 2009.
58. F. Radicchi. Who is the best player ever? A complex network analysis of the history of professional tennis. *PloS one*, 6(2):e17249, 2011.
59. D. S. P. Rao és M. P. Timmer. Purchasing power parities for industry comparisons using weighted Elteto-Koves-Szulc (EKS) methods. *Review of Income and Wealth*, 49:491–511, 2003.
60. O. Rétallér és A. Tasnádi. Az impakt faktor és jelentősége a közgazdaságtudományban. Műhelytanulmány (working paper), Budapesti Corvinus Egyetem, Budapest, 2013. *http://unipub.lib.uni-corvinus.hu/1281.*
61. A. Rubinstein. Ranking the participants in a tournament. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 38(1):108–111, 1980.
62. T. L. Saaty. *The analytic hierarchy process: planning, priority setting, resource allocation.* McGraw-Hill International Book Co., New York, 1980.
63. E. Shamis. Graph-theoretic interpretation of the generalized row sum method. *Mathematical Social Sciences*, 27(3):321–333, 1994.
64. L. S. Shapley. A value for n-person games. In H. W. Kuhn és A. W. Tucker (szerk.): *Contributions to the Theory of Games Volume II*, pages 307–317. Princeton University Press, Princeton, 1953.

65. P. Slater. Inconsistencies in a schedule of paired comparisons. *Biometrika*, 48 (3-4):303–312, 1961.
66. M. Slikker, P. Borm és R. van den Brink. Internal slackening scoring methods. *Theory and Decision*, 72(4):445–462, 2012.
67. G. Slutzki és O. Volij. Ranking participants in generalized tournaments. *International Journal of Game Theory*, 33(2):255–270, 2005.
68. G. Slutzki és O. Volij. Scoring of web pages and tournaments–axiomatizations. *Social Choice and Welfare*, 26(1):75–92, 2006.
69. R. Smith. Journal accused of manipulating impact factor. *British Mediacal Journal*, 314(7079):461, 1997.
70. B. Szulc. Indeksy dla porownan wieloregionalnych. *Przeglad Statysticzny*, 3: 239–254, 1964.
71. A. Telcs, Zs. T. Kosztyán és Á. Török. Hallgatói preferenciasorrendek készítése az egyetemi jelentkezések alapján. *Közgazdasági Szemle*, LX(3):290–317, 2013.
72. J. Temesi, L. Csató és S. Bozóki. Mai és régi idők tenisze – A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok egy alkalmazása. In T. Solymosi és J. Temesi (szerk.): *Egyensúly és optimum. Tanulmányok Forgó Ferenc 70. születésnapjára*, pages 213–245. Aula Kiadó, Budapest, 2012.
73. L. L. Thurstone. A law of comparative judgment. *Psychological Review*, 34 (4):273–286, 1927.
74. R. van den Brink és R. P. Gilles. Ranking by outdegree for directed graphs. *Discrete Mathematics*, 271(1-3):261–270, 2003.
75. H. P. Young. An axiomatization of Borda's rule. *Journal of Economic Theory*, 9(1):43–52, 1974.
76. E. Zermelo. Die Berechnung der Turnier-Ergebnisse als ein Maximumproblem der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, 29(1):436–460, 1929.

RANKING METHODS BASED ON PAIRED COMPARISONS

The ranking of the alternatives or selecting the best one are fundamental issues of social choice theory, statistics, psychology and sport. Different solution concepts, and various mathematical models of applications are reviewed based on the international literature. We are focusing on the definition of paired comparison matrix, on main scoring procedures and their relation. The paper gives a theoretical analysis of the invariant, fair bets and PageRank methods, which are founded on Perron-Frobenius theorem, as well as the internal slackening and positional power procedures used for ranking the nodes of a directed graph. An axiomatic approach is proposed for the choice of an appropriate method. Besides some known characterizations for the invariant and fair bets methods, we also discuss the violation of some properties, meaning their main weakness.

Keywords: preference aggregation, paired comparison, ranking, characterization