Stahl János

A kétszeresen összekapcsolt lineáris programozási feladatról.*

Bevezetés

A

$$
\begin{aligned}
& D_0 y = b \\
& A_0 x_0 + B_0 y + \sum_i A_i x_i = a \\
(1)\quad & D_i y + B_i x_i = b_i \qquad (i = 1, 2 \ldots) \\
& x_0, y, x_1, x_2, \ldots \geq 0 \\
& \max\,(c_0 x_0 + dy + \sum_i c_i\, x_i)
\end{aligned}
$$

alakú lineáris programozási feladatot szokták kétszeresen összekapcsolt vagy kétszeresen összefüggő lineáris programozási feladatnak nevezni. (A cikkben nagy betűvel a számpéldától eltekintve mindig mátrixot, kis betűvel az indexektől eltekintve vektort, görög kisbetűvel skalárt, félkövér nagybetűvel pedig poliédert jelölünk.)

Ilyen lineáris programozási feladat lehet modellje egy olyan több részből álló gazdasági egységnek, ahol az egyes egységek tevékenységét leíró x_i változók mindegyikével kapcsolatban levő y pl. készletezési vagy valamilyen központilag irányított tevékenységet reprezentál, míg a valamennyi változót tartalmazó feltételek pl. valamilyen közös erőforrás kihasználására vonatkoznak. Ugyancsak ilyen modell adódhat egyetlen gazdasági egység több, egymást követő időszakra vonatkozó tevékenységének leírásánál, mikor az x_i-k az egyes időszakokon belüli tevékenységet reprezentálják, y komponensei szállítási vagy ismét készletezési tevékenységeknek felelnek meg és a valamennyi változót összefogó feltételek pl. kibocsátási kötelezettséget fejeznek ki.

De adódhat ilyen lineáris programozási feladat akkor is, ha a feltételek alkotta mátrix „jobb-alsó" részével kapcsolatban nem éppen részegységeket vagy időbeli dinamizmust kifejező blokkdiagonális szerkezetre gondolunk. Legyen pl. a probléma egy olyan termelési-elosztási kérdés megoldása, ahol a szokásos szállítási feladat jobb oldalai vagy egy részük valamilyen termelési kapacitás szintjétől függ — ezt fejezik majd ki a $D_i y$-k — és vannak még a termelést és elosztást összekapcsoló további feltételek, amit az $A_0 x_0 + B_0 y + \sum_i A_i x_i = b_i$ feltételek írnak majd le. (Egyébként minden lineáris programozási feladatot tekinthetünk kétszeresen összekapcsoltnak és a következő dekompozíciós eljárást ennek megfelelően is leírhatnánk.)

* A cikk a szerzőnek a Balatonfüreden megrendezett V. Magyar Operációkutatási Konferencián elhangzott hasonló témájú előadása alapján készült.

(1)-t nagyméretű lineáris programozási feladatnak tekintve, megoldására a szokásos két lehetőség valamelyike kínálkozik.

Az egyik utat olyan módszerek jelentik, melyek a szimplex módszernek az adott feladat speciális szerkezetéből adódó egyszerűsítési lehetőségein alapulnak. Egyszerűsítési lehetőségen a szükséges műveletek számának, a szükséges tárolótérnek csökkentését vagy a műveletek elvégzésének, a tárolótér kihasználásának jobb megszervezését értjük. Az ilyen, ún. strukturális vagy bázisdekompozíciós eljárások tehát az eredeti feladat valamilyen (pl. primál vagy duál megengedett) bázis megoldásain keresztül jutnak el az optimális megoldásig.

A másik lehetőséget az ún. dekompozíciós eljárások jelentik, melyek az eredeti feladat megoldását több kisebb vagy más ok folytán könnyebben kezelhető feladat rendszerint többszöri megoldására vezetik vissza: ezen, ún. részfeladatok megoldásából „rakják össze" a feladat optimális megoldását.

(1)-re strukturális eljárást ad [6] és [7]. [6] az ún. általánosított felsőkorlátos technika [3] egy kiterjesztése. Elsősorban ezzel kapcsolatban mondható el az, ami a strukturális eljárások lényegéből adódik, mennél bonyolultabb a feladat mátrixának szerkezete, annál több és esetenként annál nehezebben kezelhető lehetőséget kell megkülönböztetni a feladat mátrixa hatékony kezelésének biztosításához. Ugyanakkor, ha ez sikerül, egy strukturális eljárás hatékony számítástechnikai eszköz, amit a [6]-ban közölt, próbaszámításokat értékelő táblázat is igazolni látszik.

Egy dekompozíciós eljárás nemcsak mint számítástechnikai eszköz érdekes, hanem a lineáris programozási feladatot több, egymáshoz képest alá és mellérendelt részegységből álló gazdasági egység modelljének tekintve egy ilyen eljárás segítségével ezen rendszer működésének vagy irányításának problémája is vizsgálható (pl. [5]). Az (1)-gyel kapcsolatban említett interpretációk bármelyike alapján így érdekes lehet egy olyan dekompozíciós eljárás, mely (1)-et

$$B_i x_i = b_i - D_i y$$

$$x_i \geq 0$$

$$\max\,(c_i - pA_i)\,x_i$$

alakú lineáris programozási feladatok ($i = 1, 2 \ldots$) vizsgálata alapján oldja meg, ahol p és y a feladatok minden előfordulásánál alkalmasan megválasztott vektorok.

Ilyen részfeladatokhoz pontosabban ezek duálisához jutunk, ha (1)-re a Dantzig—Wolfe eljárást [4] alkalmazzuk olyan formában, hogy a

$$
\begin{aligned}
&D_0 y = b_0 \\
&D_i y + B_i x_i = b_i \qquad (i = 1, 2 \ldots) \qquad (2)\\
&y, x_1, x_2 \ldots \geq 0
\end{aligned}
$$

feltételeket tekintjük részfeladatnak és ezen részfeladat duálisának megoldására ismét a Dantzig—Wolfe eljárást alkalmazzuk. A Dantzig—Wolfe eljárás ilyen kétszeres alkalmazását azonban számítástechnikai eszközként aligha lehetne figyelembe venni.

Vegyük észre azonban, hogy a kívánt alakú részfeladatokhoz jutunk akkor is, ha (1) duálisából, az ugyancsak kétszeresen összekapcsolt

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
& pA_0 \geq c_0 \\
& q_0 D_0 + pB_0 + \sum_i q_i D_i \geqslant d \\
& pA_i + q_i B_i \geq c_i \qquad (i = 1, 2 \ldots) \\
& \min \left(q_0 b_0 + pa + \sum_i q_i b_i\right)
\end{aligned}
$$

lineáris programozási feladatból indulunk ki. Nevezetesen, ha (3)-ra a Dantzig — Wolfe eljárást olyan formában alkalmazzuk, hogy a

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
& pA_0 \geq c_0 \\
& pA_i + q_i B_i \geq c_i \qquad (i = 1, 2 \ldots)
\end{aligned}
$$

feltételeket tekintjük részfeladatnak és ezen részfeladat duálisának megoldására ismét a Dantzig—Wolfe eljárást alkalmazzuk.

Továbbá (1)-et a szóban forgó módon kezelve, az (1)-gyel ekvivalens extremális feladat

$$
(5) \qquad \begin{aligned}
& A_0 x_0 + \sum_j \lambda_j (B_0 \bar{y}_j + \sum_i A_i \bar{x}_{ij}) + \sum_k \mu_k (B_0 \bar{\bar{y}}_k + \sum_i A_i \bar{\bar{x}}_{ik}) = a \\
& \sum_j \lambda_j = 1 \\
& \lambda_j, \mu_k \geq 0 \\
& \max \left(c_0 x_0 + \sum_j \lambda_j (d\bar{y}_j + \sum_i c_i \bar{x}_{ij}) + \sum_k \mu_k (d\bar{\bar{y}}_k + \sum_i c_i \bar{\bar{x}}_{ik})\right)
\end{aligned}
$$

alakú, ahol az $(\bar{y}_j, \bar{x}_{1j}, \bar{x}_{2j}, \ldots)$ $(j = 1, 2 \ldots)$, illetve $(\bar{\bar{y}}_k, \bar{\bar{x}}_{1k}, \bar{\bar{x}}_{2k} \ldots)$ $(k = 1, 2 \ldots)$ elemek a (2) feltételek meghatározta poliéder extremális elemei, illetve extremális irányai. (Valamivel pontosabban és általánosabban fogalmazva, olyan rögzített vektorokról legyen szó, melyekkel a poliéder tetszőleges eleme a szokott módon előállítható.)

Nyilván (5)-tel ekvivalens feladathoz jutunk akkor, ha (5)-be még (2) tetszőleges $(y, x_1, x_2 \ldots)$ elemeinek megfelelő együtthatókat és változókat is bevezetünk, illetve (5) optimumértéke (ha ez létezik) tetszőleges pontossággal megközelíthető minden olyan (5) alakú lineáris programozási feladattal, mely (2) alkalmas elemeinek megfelelő együtthatókból és változókból áll. Ugyanezen megjegyzések érvényesek a duális (7) feladat Dantzig—Wolfe eljárással történő megoldásával kapcsolatban is, amikor az extremális feladat

$$
(6) \qquad \begin{aligned}
& q_0 D_0 + \sum_j \alpha_j (\bar{p}_j B_0 + \sum_i \bar{q}_{ij} D_i) + \sum_k \beta_k (\bar{\bar{p}}_k B_0 + \sum_i \bar{\bar{q}}_{ij} D_i) \geq d \\
& \sum_j \alpha_j = 1 \\
& \alpha_j, \beta_k \geq 0 \\
& \min \left(q_0 b_0 + \sum_j \alpha_j (\bar{p}_j d + \sum_i \bar{q}_{ij} b_i) + \sum_k \beta_k (\bar{\bar{p}}_k d + \sum_i \bar{\bar{q}}_{ik} b_i)\right)
\end{aligned}
$$

alakú, ahol a $(\bar{p}_j, \bar{q}_{1j}, \bar{q}_{2j}, \ldots)$ $(j = 1, 2 \ldots)$, illetve $(\bar{\bar{p}}_k, \bar{\bar{q}}_{1k}, \bar{\bar{q}}_{2k}, \ldots)$ $(k = 1, 2 \ldots)$ elemek a (4) feltételek meghatározta poliéder extremális elemei és irányai.

Mindezek együtt ösztönöznek egy olyan dekompozíciós eljárás vizsgálatára, ahol mindig egy (5), illetve (6) alakú feladat $(\tilde{p}, \tilde{\pi})$, illetve $(\tilde{y}, \tilde{\gamma})$ duális megoldásából adódó $\tilde{p}$-mal és $\tilde{y}$-nal oldjuk meg a

$$\begin{gathered} B_i x_i = b_i - D_i \tilde{y} \\ x_i \geq 0 \\ \max\,(c_i - \tilde{p} A_i)\, x_i \qquad (i = 1, 2 \ldots) \end{gathered} \tag{7}$$

részfeladatokat, hiszen ezek mindegyikének $\tilde{x}_i$ megoldását felhasználva az adódó $(\tilde{y}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \ldots)$ megoldása (2)-nek és ugyanígy $(\tilde{p}, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \ldots)$ megoldása (4)-nek, ahol $\tilde{q}_i$ (7) duálisának megoldása. (Feltéve természetesen, hogy az $\tilde{x}_i$-k és $\tilde{q}_i$-k léteznek.) (2) és [vagy (4) ezen megoldásaihoz tartozó λ, illetve α változókkal a megfelelő feladatot bővítve új $(\tilde{p}, \tilde{\pi})$ és/vagy $(\tilde{y}, \tilde{\gamma})$ adódik stb.

Dekompozíciós eljárás a feladat megoldására

A továbbiakban feltesszük, hogy az $\mathbf{Y} = \{y : D_0 y = b_0,\ y \geq 0\}$ és $\mathbf{P} = \{p : pA_0 \geq c_0\}$ halmazok nem üresek és korlátosak. Legyenek $\mathbf{X}_i = \{x_i : B_i x_i = 0,\ x_i \geq 0\}$ és $\mathbf{Q}_i = \{q_i : q_i B_i \geq c_i\}$ $(i = 1, 2 \ldots)$.

Az alábbiakban előbb megfogalmazzuk az eljárást, az eljárás verifikálását a leírását követő tétel bizonyítása tartalmazza. Az eljárás a következő:

1. Legyen $h = 1$, $\tilde{y}_1$ az $\mathbf{Y}$-nak, $\tilde{p}_1$ pedig $\mathbf{P}$-nek tetszőleges eleme. Az y-ra vonatkozó feladat a

$$\begin{gathered} q_0 D_0 \geq d \\ \min q_0 b_0 \end{gathered}$$

lineáris programozási feladat, a p-re vonatkozó feladat az

$$\begin{gathered} A_0 x_0 = a \\ x_0 \geq 0 \\ \max c_0 x_0 \end{gathered}$$

lineáris programozási feladat. Legyen továbbá $\pi_1 = -\infty$, $\gamma_1 = \infty$.

2. Oldjuk meg a

$$\begin{gathered} B_i x_i = b_i - D_i \tilde{y}_h \\ x_i \geq 0 \\ \max\,(c_i - \tilde{p}_h A_i)\, x_i \end{gathered} \tag{8}$$

lineáris programozási feladatokat $(i = 1, 2 \ldots)$.

Ha ezen feladatok mindegyikének van optimális megoldása, folytassuk 3.-tól.

Ha a (8) feladatok között van olyan, amelyiknek nincs lehetséges megoldása, minden ilyen i-re bővítsük az y-ra vonatkozó feladatot egy β-változóval.

A változóhoz tartozó célfüggvény együttható $\tilde{\bar{q}}_i b_i$, a változóhoz tartozó együtthatóvektor pedig $(\tilde{\bar{q}}_i D_i, 0)$, ahol $\tilde{\bar{q}}_i$ a $\mathbf{Q}_i$-nak egy olyan extremális eleme, melyre $\tilde{\bar{q}}_i(b_i - D_i \tilde{y}_i) < 0$.

Ha a (8) feladatok között van olyan, amelyik nem korlátos, minden ilyen i esetén bővítsük a p-re vonatkozó feladatot egy μ változóval. A változóhoz tartozó célfüggvény együttható $c_i \tilde{\bar{x}}_i$, a változóhoz tartozó együtthatóvektor pedig $(A_i \tilde{\bar{x}}_i, 0)$, ahol $\tilde{\bar{x}}_i$ az $\mathbf{X}_i$-nek egy olyan extremális eleme, melyre

$$(c_i - \tilde{p}_h A_i) \tilde{\bar{x}}_i > 0.$$

Folytassuk 4.-től.

3. Legyen $\tilde{x}_i$ (7), $\tilde{q}_i$ pedig (7) duálisának egy optimális extremális megoldása $(i = 1, 2 \ldots)$.

Bővítsük az y-ra vonatkozó feladatot egy α változóval. A változóhoz tartozó célfüggvény együttható $\tilde{p}_h a + \sum_i \tilde{q}_i b_i$, a vátozóhoz tartozó együtthatóvektor pedig $(\tilde{p}_h B_0 + \sum_i \tilde{q}_i D_i, 1)$.

Bővítsük a p-re vonatkozó feladatot egy λ változóval. A változóhoz tartozó célfüggvény együttható $d\tilde{y}_h + \sum_i c_i x_i$, a változóhoz tartozó együtthatóvektor pedig $(B_0 \tilde{y}_h + \sum_i A_i \tilde{x}_i, 1)$.

4. Oldjuk meg az y-ra vonatkozó feladatot, ha az tartalmaz új változót és oldjuk meg a p-re vonatkozó feladatot, ha az tartalmaz új változót.

Ha az y-ra vonatkozó feladat nem korlátos, az eljárás végetér: az (1) feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Ha a p-re vonatkozó feladat nem korlátos, az eljárás végetér: a duális (3) feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Ellenkező esetben legyen $(\tilde{y}_{h+1}, \tilde{\gamma}_{h+1})$ vagy $\tilde{y}_{h+1}$ az y-ra vonatkozó feladat duálisának egy optimális megoldása, γ_{h+1} pedig a feladat optimumértéke vagy ∞ aszerint, hogy a feladat tartalmaz-e már α változót vagy sem $(\tilde{p}_{h+1}, \tilde{\bar{\pi}}_{h+1})$ vagy $\tilde{p}_{h+1}$ pedig legyen a p-re vonatkozó feladat duálisa egy optimális megoldása és $\tilde{\pi}_{h+1}$ a feladat optimumértéke vagy $-\infty$ aszerint, hogy a feladat tartalmaz-e már λ változót vagy sem.

Ha $\pi_{h+1} \geq \gamma_{h+1}$ az eljárás végetér, (1) egy optimális megoldása a p-re vonatkozó feladat alapján adódik.

Ha $\pi_{h+1} < \gamma_{h+1}$, legyen $h = h + 1$ és folytassuk 2-től.

Tétel. Az 1—4 eljárás vagy végetér az egyes lépések véges számú alkalmazása után, mikoris a 4.-beli konklúziók helyesek, vagy $\lim\limits_{h\to\infty} \pi_h = \lim\limits_{h\to\infty} \gamma_h$ véges érték és ez megegyezik (1) optimumértékével.

Bizonyítás. A következő két megjegyzés helyessége Y és P korlátos voltának következménye.

Mivel $\{y : D_0 y = 0,\ y \geq 0\} = \{0\}$

$$D_0 y = 0$$

$$D_i y + B_i x_i = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots)$$

$$y, x_1, x_2 \ldots \geq 0$$

-ból tehát Y korlátossága folytán $B_i x_i = 0$ $(i = 1, 2 \ldots)$, tehát (5) [(6)] első feltételcsoportjában a $\mu(\beta)$ változók együtthatóvektorai $A_i \bar{\bar{x}}_i$ $(\bar{\bar{q}}_i D_i)$ alakúak(nak választhatók), ahol az $\bar{\bar{x}}_i$ $(\bar{\bar{q}}_i)$-k X_i (Q_i) extremális elemei $(i = 1, 2 \ldots)$.

Másrészt egy

$$A_0 x_0 + \sum_j \lambda_j (B_0 \tilde{y}_j + \sum_i A_i \tilde{x}_{ij}) + \sum_{i,k} \mu_{ik} A_i \widetilde{\overline{x}}_{ik} = a$$

(9)
$$\sum_j \lambda_j = 1$$

$$\lambda_j, \mu_{ik} \geq 0$$

$$\max \, (c_0 x_0 + \sum_j \lambda_j (d\tilde{y}_j + \sum_i c_i \tilde{x}_{ij}) + \sum_{i,k} \mu_{ik} c_i \widetilde{\overline{x}}_{ik})$$

alakú (vagy a λ változókat és rájuk vonatkozó feltételeket még nem tartalmazó) p-re vonatkozó feladatnak mindig van lehetséges megoldása, ahol az $\tilde{y}_j$, $\tilde{x}_{ij}$, $\widetilde{\overline{x}}_{ik}$-k az eljárás során meghatározott elemek. Ellenkező esetben ugyanis lenne olyan (p^*, π^*), melyre

$$p^* A_0 \geq 0$$

$$p^*(B_0 \tilde{y}_j + \sum_i A_i \tilde{x}_{ij}) + \pi^* \geq 0$$

$$p^* A_i \widetilde{\overline{x}}_{ik} \geq 0$$

a (9)-ben szereplő j-kre és (i, k)kra továbbá

$$p^* a + \pi^* < 0$$

P korlátossága folytán a fentiekből $p^* = 0$, ami az utolsó egyenlőtlenségnek ellentmond.

Hasonló igaz egy y-ra vonatkozó feladatra is, azaz 4.-ben a p-re és az y-ra vonatkozó feladattal kapcsolatban valóban nincs más eset az ott elmondottakon kívül.

Legyen valamikor 4.-ben egy p-re vonatkozó (9) feladat nem korlátos. Ekkor léteznek olyan nemnegatív μ_{ik}^*-k és x_0^*, hogy

$$A_0 x_0^* + \sum_{i,k} \mu_{ik}^* A_i \widetilde{\overline{x}}_{ik} = 0$$

és

$$c_0 x_0^* + \sum_{i,k} \mu_{ik}^* c_i \widetilde{\overline{x}}_{ik} > 0$$

Feltételezve (4) megoldhatóságát és a (4)-beli egyenlőtlenségeket x_0^*-gag illetve $\mu_{ij}^* \widetilde{\overline{x}}_{ij}$-vel beszorozva és összegezve ellentmondáshoz jutunk. Így mé, kevésbé oldható meg a (4)-hez képest még további feltételeket tartalmazó (3). Hasonlóan látható be az y-ra vonatkozó feladat nem korlátosságához kapcsolódó 4-beli állítás.

Továbbá lévén a szóba jövő $\widetilde{\overline{x}}_{ik}$-k és $\widetilde{\overline{q}}_{ik}$-k száma véges és egy 2.-ben újonnan bevezetendő μ_{ik} vagy β_{ik} változó eddig még nem szerepelt ilyen elemhez tartozik, a p-re, illetve y-ra vonatkozó feladatok előbb vagy utóbb λ, illetveα változót is fognak tartalmazni, hacsak az eljárás nem végződik a most említett esetek valamelyikével.

Ilyen esetben, ha pl. a p-re vonatkozó feladat korlátos, optimális $(x_0^*, \ldots$ $\ldots \lambda_j^*, \ldots, \ldots \mu_{ik}^* \ldots)$ megoldásához tartozó $(x_0^*, y^*, x_1^*, x_2^* \ldots)$, ahol $y^* =$ $= \sum_j \lambda_j^* \tilde{y}_j$, $x_i^* = \sum_j \lambda_j^* \tilde{x}_{ij} + \sum_k \mu_{ik}^* \widetilde{\overline{x}}_{ik}$ $(i = 1, 2 \ldots)$, nyilván olyan megoldása (1)-nek, melyhez tartozó célfüggvényérték a megfelelő π^* és ugyanígy, ha az

y-ra vonatkozó feladatban szerepel α változó és a feladat korlátos, akkor a (3) duális feladat olyan megoldása nyerhető, melyhez tartozó duál-célfüggvényérték az aktuális γ^*.

(Előbbiek alapján az előző konklúziók is némileg kiegészíthetők: ha a p-re (az y-ra) vonatkozó feladat nem korlátos és tartalmaz λ (α) változót, az (1) ((3)) feladat nem korlátos és ugyanakkor az y-ra (a p-re) vonatkozó feladat eddig nem tartalmazott α (λ) változót.]

Mindaddig, amíg π_h és γ_h valamelyike nem véges, $\pi_h \leq \gamma_h$ és az előzőek szerint ez igaz, akkor is, ha mindkettőre véges érték adódik, melynek be kell következnie, ha az eljárás nem fejeződik be másképpen. Továbbá ξ-vel jelölve (1) optimumértékét, mely ekkor szükségképpen létezik, $\pi_h \leq \xi \leq \gamma_h$, amivel igazoltuk a 4.-beli $\pi_{h+1} \geq \gamma_{h+1}$ (pontosabban $\pi_{h+1} = \gamma_{h+1}$) esetre vonatkozó állítást.

Nyilván a π_h-k monoton nem csökkennek és a γ_h-k monoton nem nőnek, hiszen a p-re és y-ra vonatkozó feladatok egymást követő előfordulásaik között új változókkal bővülnek vagy változatlanok maradnak. (Utóbbi esetben $p_{h+1} = p_h$ vagy $y_{h+1} = y_h$ választható 4-ben.) Azt kell már csak belátnunk, hogy $\lim\limits_{h\to\infty} \pi_h < \lim\limits_{h\to\infty} \gamma_h$ lehetetlen.

Az adódó $\tilde{p}_h$-k és $\tilde{y}_h$-k sorozata P illetve Y-beli elemekből áll. Egy konvergens részsorozatot tekintve és a továbbiakban csak ezen részsorozattal foglalkozva jelöljük (p^*, y^*)-gal ennek limeszpontját.

Elég nagy h-tól kezdve a (8) feladatoknak és duálisuknak is van lehetséges megoldásuk, következésképpen ugyanez igaz a

$$B_i x_i = b_i - D_i y^*$$

$$x_i \geq 0$$

$$\max\,(c_i - p^* A_i) x_i$$

feladatokra és duálisukra, tehát van optimális megoldásuk is. Jelölje ezeket x_i^* és q_i^* $(i = 1, 2 \ldots)$.

Minthogy $\tilde{\pi}_h = \pi_h - \tilde{p}_h a$, tetszőleges h-ra és annál nagyobb h'-re $(\tilde{p}_{h'}, \tilde{\pi}_{h'})$ optimális voltából

$$\tilde{p}_i(B_0 \tilde{y}_h + \sum_i A_i \tilde{x}_{ih}) + \pi_{h'} - \tilde{p}_{h'} a \geq d\tilde{y}_h + \sum_i c_i \tilde{x}_{ih}$$

azaz

$$\pi_{h'} \geq d\tilde{y}_h - p_{h'} B_0 \tilde{y}_h + \tilde{p}_{h'} a + \sum_i (c_i - \tilde{p}_{h'} A_i) \tilde{x}_{ih}. \tag{10}$$

Ugyanígy

$$\gamma_{h'} \leq d\tilde{y}_{h'} - \tilde{p}_h B_0 \tilde{y}_{h'} + \tilde{p}_h a + \sum_i \tilde{q}_{ih}(b_i - D_i \tilde{y}_{h'}). \tag{11}$$

A két utolsó egyenlőtlenség jobb oldalán álló kifejezés ismert folytonossági meggondolások alapján elég nagy h-tól kezdve tetszőlegesen közel van $\zeta^* = dy^* - p^* B_0 y^* + p^* a + \sum\limits_i (c_i - p^* A_i)\, x_i^* = dy^* - p^* B_0 y^* + p^* a + {}$ $+ \sum\limits_i q_i^*(b_i - D_i y^*)$-hoz, amiből $\lim\limits_{h\to\infty} \pi_h = \lim\limits_{h\to\infty} \gamma_h$ következik és ezzel a tétel valamennyi állítását beláttuk.

Kizárólag illusztrációként, illetve esetleg a megértés megkönnyítésére is szolgál a következő számpélda.

Az

$$\begin{aligned}
y_1 + y_2 &\leq 5 \\
-2x_0 + 2y_1 - y_2 + x_1 + 4x_2 &\leq 5 \\
-x_0 - y_1 + y_2 + 2x_1 + x_2 &\leq 20 \\
y_1 - 2y_2 + 4x_1 - x_2 &\leq 20 \\
y_1 + 4y_2 + 2x_1 + 2x_2 &\leq 50 \\
x_0, y_1, y_2, x_1, x_2 &\geq 0 \\
\max\,(-4x_0 + 2y_1 + 4y_2 + 8x_1 + x_2)&
\end{aligned}$$

lineáris programozási feladatnál legyen

$$D_0 = [1\ 1],$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix},\ B_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

tehát az eljárás során egyetlen alfeladat lesz és a fentieknek megfelelően particionálódnak a feladat további paraméterei és változói. (Amit már a cikk többi részétől eltérő jelölések is kifejeznek.)

Az $\{y_1, y_2) : y_1 + y_2 \leq 5, y_1, y_2 \geq 0\}$ és $\{(p_1, p_2): -2p_1 - p_2 \geq -4, p_1, p_2 \geq \geq 0\}$ halmazok korlátosak és nem üresek és legyen $y_1 = (2, 3)$ és $\tilde{p}_1 = (0, 0)$. (1.)

A 2.-ban lépésben megoldandó (8) feladat a

$$\begin{aligned}
4x_1 - x_2 &\leq 24 \\
2x_1 + 2x_2 &\leq 36 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \\
\max\,(8x_1 + x_2)&
\end{aligned}$$

lineáris programozási feladat; melynek optimális megoldása $\tilde{x}_1 = (84/10, 96/10)$, duálisának optimális megoldása pedig $\tilde{q}_1 = (7/5, 6/5)$.

$B_0\tilde{y}_1 + A_1\tilde{x}_1 = (478/10, 274/10)$ és a megfelelő célfüggvény együttható $d\tilde{y}_1 + c_1\tilde{x}_1 = 928/10$, hasonlóan $\tilde{p}_1 B_0 + \tilde{q}_1 D_1 = (13/5, 2)$ és a megfelelő célfüggvény együttható $\tilde{p}_1 a + \tilde{q}_1 b_1 = 88$. (3.)

Ennek megfelelően 4.-ben az y-ra vonatkozó feladat a

$$\begin{aligned}
q_0 + 13/5\alpha_1 &\geq 2 \\
q_0 + 2\alpha_1 &\geq 4 \\
\alpha_1 &= 1 \\
q_0, \alpha_1 &\geq 0 \\
\min\,(5q_0 + 88\alpha_1)&
\end{aligned}$$

lineáris programozási feladat, melynek optimális megoldása $q_0^* = 2$, $\alpha_1^* = 1$, optimumértéke $\xi_2 = 98$ és melynek duálisa optimális megoldásából $\tilde{y}_2 = (0, 5)$.

Hasonlóan, a p-re vonatkozó feladat a

$$\begin{aligned} -2x_0 + 478/10\,\lambda_1 &\leq 5 \\ -x_0 + 274/10\,\lambda_1 &\leq 20 \\ \lambda_1 &= 1 \\ x_0, \lambda_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\max\,(-4x_0 + 928/10\,\lambda_1)$$

lineáris programozási feladat, melynek optimális megoldása $x_0^* = 214/10$, $\lambda_1^* = 1$, optimumértéke $\pi_2 = 72/10$ és melynek duálisa optimális megoldásából $\tilde{p}_2 = (2, 0)$.

2. iterációs lépés.

2.

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &\leq 30 \\ 2x_1 + 2x_2 &\leq 30 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\max\,(6x_1 - 7x_2).$$

Optimális megoldása: $\tilde{x}_1 = (15/2, 0)$.
Duális optimális megoldása: $\tilde{q}_1 = (3/2, 0)$.

3.

$$B_0\tilde{y}_2 + A_1\tilde{x}_1 = (5/2, 20), \quad d\tilde{y}_2 + c_1\tilde{x}_1 = 80,$$
$$\tilde{p}_2B_0 + \tilde{q}_1D_1 = (11/2, -5), \quad \tilde{p}_2a + \tilde{q}_1b_1 = 40.$$

4. y-ra vonatkozó feladat:

$$\begin{aligned} q_0 + 13/5\alpha_1 + 11/2\alpha_2 &\geq 2 \\ q_0 + 2\alpha_1 - 5\alpha_2 &\geq 4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ q_0, \alpha_1, \alpha_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\min\,(5q_0 + 88\alpha_1 + 40\alpha_2)$$

Optimális megoldása: $q_0^* = 9$, $\alpha_1^* = 1$, $\alpha_2^* = 0$,
Optimumértéke: $\xi_3 = 85$.
Duális optimális megoldása: $\tilde{y}_3 = (0, 5)$.
p-re vonatkozó feladat:

$$\begin{aligned} -2x_0 + 478/10\,\lambda_1 + 5/2\,\lambda_2 &\leq 5 \\ -x_0 + 274/10\,\lambda_1 + 20\,\lambda_2 &\leq 20 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\max\,(-4x_0 + 928/10\,\lambda_1 + 80\,\lambda_2)$$

$$\lambda_1^* = 1,\ \lambda_2^* = 0,\ x_0^* = 0.$$

$$\pi_3 = 80.$$

$$\tilde{p}_3 = (0,\ 64/37).$$

3. iterációs lépés

2.
$$4x_1 - x_2 \leq 30$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$\max\ (168/37\ x_1 - 27/37\ x_2)$$
$$\tilde{x}_1 = (9, 6)$$
$$\tilde{q}_1 = (39/37,\ 6/37).$$

3.
$$B_0\tilde{y}_3 + A_1\tilde{x}_1 = (18/37,\ 9/37),\ d\tilde{y}_3 + c_1\tilde{x}_1 = 2340/37,$$
$$\tilde{p}_3B_0 + \tilde{q}_1D_1 = (28,\ 29),\ \tilde{p}_3a + \tilde{q}_1b_1 = 98.$$

4.
$$q_0 + 13/5\,\alpha_1 + 11/2\,\alpha_2 + 18/37\,\alpha_3 \geq 2$$
$$q_0 + 2\alpha_1 - 5\alpha_2 + 9/37\,a_3 \geq 4$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$
$$q_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$$
$$\min\ (5q_0 + 88\alpha_1 + 40\alpha_2 + 2340/37\,\alpha_3)$$
$$q_0^* = 137/37,\ \alpha_3^* = 1,\ \alpha_1^* = \alpha_2^* = 0.$$
$$\xi_4 = 3025/37\ (\approx 81{,}7),\ \tilde{y}_4 = (0,\ 5).$$
$$-2x_0 + 478/10\,\lambda_1 + 5/2\,\lambda_2 + 28\,\lambda_3 \leq 5$$
$$-x_0 + 274/10\,\lambda_1 + 20\,\lambda_2 + 29\,\lambda_3 \leq 20$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$
$$x_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$$
$$\max\ (-4x_0 + 928/10\,\lambda_1 + 80\,\lambda_2 + 98\,\lambda_3).$$
$$\lambda_2^* = 1,\ \lambda_3^* = 0,\ x_0^* = \lambda_1^* = 0.$$
$$\pi_4 = 80,\ \tilde{p}_4 = (0,\ 2).$$

4. iterációs lépés

2.
$$4x_1 - x_2 \leq 30$$
$$2x_1 + 2x_2 \leq 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$\max\ (4x_1 - x_2)$$

$$\tilde{x}_1 = (9, 6)$$

$$\tilde{q}_1 = (1, 0).$$

3. $$\tilde{p}_4 B_0 + \tilde{q}_1 D_1 = (-1, 0),\ \tilde{p}_4 a + \tilde{q}_1 b_1 = 60$$

4. $$q_0 + 13/5\,\alpha_1 + 11/2\,\alpha_2 + 18/37\,\alpha_3 - \alpha_4 \geq 2$$

$$q_0 + 2\alpha_1 - 5\alpha_2 + 9/37\,\alpha_3 \geq 4$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$$

$$q_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \geq 0$$

$$\min\,(5q_0 + 88\alpha_1 + 40\alpha_2 + 2340/37\,\alpha_3 + 60\alpha_4)$$

$$q_0^* = 4,\ \alpha_4^* = 1,\ \alpha_1^* = \alpha_2^* = \alpha_3^* = 0.$$

$$\xi_5 = 80.$$

A feladat optimális megoldása (0, 0, 5, 15/2, 0), duálisának optimális megoldása (4, 0, 2, 1, 0).

Megjegyzések

Első megjegyzésünk, hogy a 3.-ban bevezetett új változók miatt a $\tilde{p}_h \neq \tilde{p}_{h+1}$ és $\tilde{y}_h \neq \tilde{y}_{h+1}$ relációk közül legalább az egyike biztosan teljesül. Legyen ugyanis

$$\xi_h = d\tilde{y}_h - \tilde{p}_h B_0 \tilde{y}_h + \tilde{p}_h a + \sum_i (c_i - \tilde{p}_h A_i)\,\tilde{x}_i =$$

$$= d\tilde{y}_h - \tilde{p}_h B_0 \tilde{y}_h + \tilde{p}_h a + \sum_i \tilde{q}_i (b_i - D_i \tilde{y}_h).$$

$$\tilde{p}_h \neq \tilde{p}_{h+1},\ \text{ha}$$

$$\tilde{p}_h (B_0 \tilde{y}_h + \sum_i A_i \tilde{x}_i) + \tilde{\pi}_h < d\tilde{y}_h + \sum_i c_i \tilde{x}_i$$

azaz $\pi_h < \xi_h$ és $\tilde{y}_h \neq \tilde{y}_{h+1}$, ha

$$(\tilde{p}_h B_0 + \sum_i \tilde{q}_i D_i)\,\tilde{y}_h + \tilde{\gamma}_h > \tilde{p}_h a + \sum_i \tilde{q}_i b_i$$

azaz $\gamma_h > \xi_h$. Minthogy 4.-ből — illetve induláskor 1.-ből — $\pi_h < \gamma_h$, állításunk igaz. Nyilván helyes marad akkor is, ha β vagy μ változó bevezetésével jutunk 4.-hez.

Az előző tétel állítása igaz akkor is, ha 4.-ben az y-ra vonatkozó feladatot csak $\xi_h < \gamma_h$, a p-re vonatkozó feladatot pedig csak $\xi_h > \pi_h$ esetén bővítjük a megfelelő α vagy λ változóval.

Csak a $\lim\limits_{h \to \infty} \pi_h < \lim\limits_{h \to \infty} \gamma_h$ egyenlőtlenség lehetetlen voltának bizonyítását kell módosítanunk. Ugyanis most nem feltétlenül teljesül (10) és (11) mindegyike, de előző megjegyzésünk szerint legalább az egyik fennáll. Mindenesetre, ha mindkettő igaz, alkalmazható a korábbi gondolatmenet.

Ha pl. csak (10) írható fel, akkor a h-adik lépésben nem állt fenn $\xi_h < \gamma_h$, amiért is nem vezettük be az $(\tilde{y}_h, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \ldots)$-nak megfelelő α változót az y-ra vonatkozó feladatba.

Tehát

$$\gamma_h \leq d\tilde{y}_h - \tilde{p}_h B_0 \tilde{y}_h + \tilde{p}_h a + \sum_i q_i(b_i - D_i \tilde{y}_h).$$

Mivel itt a jobb oldal ismét tetszőlegesen közel van ξ^*-hoz és $\gamma_{h'} \leq \gamma_{h'}$ $\lim_{h\to\infty} \pi_h < \lim_{h\to\infty} \gamma_h$ lehetetlensége már adódik.

Az, hogy mind az y-ra, mind pedig a p-re vonatkozó feladatba minden lépésben bevezetjük a megfelelő α és λ változót, az egy, a gyakorlatban elfogadott, dekompozíciós eljárásoknál alkalmazott taktikának felel meg. A p-re vonatkozó feladatnak a $\xi_h > \pi_h$ esetben történő bővítése annak felel meg, hogy (2) $(\tilde{y}_h, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \ldots)$ megoldásához tartozó λ változónak a $(\tilde{p}_h, \tilde{\pi}_h)$-val számított relatív költség alapján a bővítés előnyösnek látszik. Ugyancsak a dekompozíciós eljárásoknál szokásos stratégiáknak megfelelően (2) további $(\tilde{y}_h, x_1, x_2 \ldots)$ megoldásainak megfelelő változókkal is bővíthetjük a p-re vonatkozó feladatot, ha ilyen (8) megoldása során adódik. Ugyanez igaz az y-ra vonatkozó feladattal kapcsolatban is, mindez azonban már attól függ, hogy miképpen oldjuk meg a (8) feladatokat, tehát általában a dekompozíciós eljárás számológépen történő realizálásától.

Az — általában csak közelítő — 1—4. eljárás figyelemre méltó tulajdonságának tartjuk, hogy a p-re és y-ra vonatkozó feladatok sorozatát megoldva, együtt adódik egyrészt egy egyre jobb célfüggvényértékű megoldása (1)-nek, másrészt pedig egy egyre kisebb felső becslés (1) optimumértékére. Valamivel pontosabban fogalmazva, értsük bele 4.-be, hogy $\xi_h \geq \gamma_h$ esetén $\tilde{y}_{h+1} = \tilde{y}_h$ és $\xi_h \leq \pi_h$ esetén $\tilde{p}_{h+1} = \tilde{p}_h$. Egyszerűen adódik, hogy nem lehetséges az, hogy végtelen sokszor egymás után mindig csak az egyik és mindig ugyanazon, pl. a p-re vonatkozó feladatot kelljen újra megoldanunk az eljárás során.

Ez abból következik, hogy rögzített $\tilde{y} = \tilde{y}_h = \tilde{y}_{h+1} = \ldots$ mellett a (7) feltételrendszerek meghatározta poliédereknek csak véges sok $\tilde{x}_{ij}$ extremális elemük és $\tilde{\tilde{x}}_{ik}$ extremális irányuk van, melyeknek megfelelő változókkal a p-re vonatkozó feladat bővíthető. Tehát elég nagy h'-re.

$$\tilde{p}_{h'}(B_0\tilde{y} + \sum_i A_i \tilde{x}_{ij}) + \pi_{h'} - \tilde{p}_{h'} a \geq d\tilde{y} + \sum_i c_i \tilde{x}_{ij}$$

minden j-re, azaz

$$\pi_{h'} \geq d\tilde{y}_{h'} - \tilde{p}_{h'} B_0 \tilde{y}_{h'} + \tilde{p}_{h'} a + \sum_i (c_i - \tilde{p}_{h'} A_i)\tilde{x}_i = \xi_{h'}$$

Továbbá szeretnénk mégegyszer hangsúlyozni, hogy amennyiben (1)-nek nincs optimális megoldása, azt az eljárás véges számú lépés végrehajtása után jelzi, valamint azt, hogy az eljárás tetszés szerinti $\tilde{y}_1 \in Y$ és $\tilde{p}_1 \in P$-ből kiindulva végrehajtható.

Megjegyezzük, hogy mivel 2. két egymás utáni előfordulása között a (8) feladatok jobb oldala és célfüggvénye is megváltozhat, ezen feladatok megoldása az ún. paraméteres primál-duál szimplex módszerrel (pl. [2]) célszerű, amely természetesen alkalmas az eljárás során lehetséges olyan eset kezelésére is, mikor a jobb oldal és célfüggvény közül csak az egyik változik meg.

Közgazdasági alkalmazás szempontjából is van érdekessége az eljárásnak. Már utaltunk a (8) részfeladatok interpretálhatóságára. Továbbá az y-ra és p-re vonatkozó ún. központi feladatok viszonya most mellérendelt a Dantzig—Wolfe eljárás bevezetőben említett kétszeres alkalmazásával nyerhető algoritmussal szemben. A kétszeresen összefüggő lineáris programozási feladat általunk is felsorolt gazdasági interpretációira gondolva úgy is fogalmazhatunk, hogy egy központi erőforrásokért felelős egység ezekre különféleképpen árakat határoz meg (a p-re vonatkozó feladat megoldásával) és ugyanakkor egy központi készletekért felelős egység ezek felhasználására különféleképpen szinteket határoz meg (az y-ra vonatkozó feladat megoldásával). Ezt egymással párhuzamosan végzik egyrészt a részegységektől nyert válaszinformációk ($\tilde{x}_i$ és $\tilde{q}_i$), másrészt pedig a másiktól kapott információk alapján. Ezen utóbbiak a valóságos tervezésben mindig meglevő, de ennek az ismert dekompozíciós eljárások nyújtotta modelljeiből kimaradó horizontális információáramlás [5) egyfajta modelljének tekinthetők.

Az eljárás egy speciális esete

Tekintsük végül az 1—4. eljárást abban a speciális esetben, ha (1)-ben $D_1 = D_2 = \ldots 0$, mikor is a feladat mátrixa a Dantzig—Wolfe eljárásnál „szokásos" szerkezetű, azaz a

$$\begin{aligned} A_0x_0 + B_0y + \sum_i A_ix_i &= a \\ D_0y &= b_0 \\ B_ix_i &= b_i \qquad (i = 1, 2 \ldots) \\ x_0, y, x_1, x_2 \ldots &\geq 0 \\ \max\ (c_0x_0 + dy + \sum_i c_ix_i) & \end{aligned} \tag{12}$$

lineáris programozási feladat megoldásával foglalkozunk.

Az 1—4 eljárás most a következőt adja. (A következő 1′—4′ eljárás leírásánál az y-ra vonatkozó feladatnál a $D_0y = b$, $y \geq 0$ feltételeket megőrizend, a feladat duálisára térünk át. Ez most elvileg semmilyen problémát nem jelent, hogy egy konkrét feladatnál is érdemes-e így eljárni, az az adott feladatól függ.)

1′. Az y-ra vonatkozó, a δ változó maximalizálását előíró feladat a

$$D_0y = b_0$$

$$y \geq 0$$

feltételeket tartalmazza, $\tilde{y}$ legyen tetszőleges, ezen feltételeket kielégítő vektor. A p-re vonatkozó feladat az

$$A_0x_0 = a$$

$$x_0 \geq 0$$

$$\max c_0x_0$$

lineáris programozási feladat. Legyen továbbá $\tilde{\pi} = -\infty$, $\tilde{\delta} = \infty$.

2′. Ha $\tilde{\delta} \leq \tilde{\pi}$, az eljárás véget ér, a p-re vonatkozó feladat utolsó megoldásából származtatható (12) optimális megoldása.

$\tilde{\delta} > \tilde{\pi}$ esetén oldjuk meg a p-re vonatkozó feladatot.

Ha a feladat nem korlátos, az eljárás végetér, (12) duálisának nincs lehetséges megoldása.

Ellenkező esetben legyen $\tilde{p}$ a p-re vonatkozó feladat duálisa egy optimális megoldásának a p-re vonatkozó feladat első feltételcsoportjához tartozó komponenseiből alkotott vektor és legyen $\tilde{\pi}$ a feladat optimumértéke, ha a feladat tartalmaz már λ változót.

3'. Oldjuk meg a

$$B_i x_i = b_i$$

$$x_i \geq 0$$

$$\max\,(c_i - \tilde{p}A_i)\,x_i$$

lineáris programozási feladatokat ($i = 1, 2 \ldots$).

Ha a szóban forgó feladatok valamelyikének nincs megoldása, az eljárás végetér, (12)-nek sincs lehetséges megoldása

Ha ezen feladatok valamelyike nem korlátos, bővítsük a p-re vonatkozó feladatot minden ilyen i-re egy μ változóval. A változóhoz tartozó célfüggvény együttható $c_i\widetilde{x}_i$, a változóhoz tartozó együtthatóvektor pedig $(A_i\widetilde{x}_i, 0)$, ahol $\widetilde{x}_i$ X_i egy olyan extremális eleme, melyre $(c_i - \tilde{p}A_i)\widetilde{x}_i > 0$. Folytassuk 2'-től.

Ha a szóban forgó feladatok mindegyikének van optimális megoldása, legyenek az $\tilde{x}_i$-k extremális optimális megoldások és legyenek a $\tilde{q}_i$-k a feladatok duálisainak extremális optimális megoldásai ($i = 1, 2 \ldots$).

Legyen továbbá

$$\tilde{\xi} = d\tilde{y} - \tilde{p}B_0\tilde{y} + \tilde{p}a + \sum_i \tilde{q}_i b_i = d\tilde{y} - \tilde{p}B_0\tilde{y} + \tilde{p}a + \sum_i (c_i - \tilde{p}A_i)\,\tilde{x}_i$$

Vezessünk be a p-re vonatkozó feladatba egy λ változót, melynek célfüggvény együtthatója $d\tilde{y} + \sum_i c_i\tilde{x}_i$, a változóhoz tartozó együtthatóvektor pedig $(B_0\tilde{y} + \sum_i A_i\tilde{x}_i, 1)$ és bővítsük az y-ra vonatkozó feladat feltételeit a

$$-\left((d - \tilde{p}B_0)\,y + \tilde{p}a + \sum_i \tilde{q}_i b_i\right) + \delta \leq 0$$

feltétellel. Ha $\tilde{\xi} < \tilde{\delta}$ folytassuk 4'-től, egyébként folytassuk 2'-től.

4'. Oldjuk meg az y-ra vonatkozó feladatot.

Ha a feladatnak nincs lehetséges megoldása, az eljárás végetér, (12)-nek nincs lehetséges megoldása. Ellenkező esetben legyen $(\tilde{y}, \tilde{\delta})$ a feladat egy optimális megoldása és folytassuk 2'-től.

Ha (12)-t a Dantzig—Wolfe eljárással oldjuk meg oly módon, hogy a

$$D_0 y = b_0$$

$$B_i x_i = b_i \qquad (i = 1, 2 \ldots)$$

$$y, x_1, x_2 \ldots \geq 0$$

feltételrendszert egyetlen — egymástól függetlenül kezelhető részekre széteső — alfeladatnak tekintjük az extremális feladat egyszerű megoldása egy

p-re vonatkozó feladathoz hasonló, az alfeladat egyszeri megoldása pedig egyrészt a 3′-beli másrészt a

$$D_0 y = b_0$$

$$y \geq 0$$

feltételrendszerű lineáris programozási feladatok megoldását igényli.

Hogy az alfeladat, illetve az egyes független részek megoldásáról történő visszatérés pontosan mikor és pontosan hogyan történik, az nagyrészt „taktikai" kérdés, a számológépi realizációtól is függ, esetleg az éppen megoldott feladat viselkedésén keresztül. Így 1′—4′ és a Dantzig—Wolfe eljárás ilyen, formailag sem túl érdekes különbözőségét nem érezzük lényegesnek. (Egyébként a p-re vonatkozó feladatot is oly módon írtuk fel, hogy abban az alfeladat minden korábbi megoldását megőriztük, ami szintén egy lehetséges, a gyakorlat alapján jónak tartott taktikát realizál.)

A Dantzig—Wolfe eljárással kapcsolatos tapasztalatok alapján az sem látszik érdekesnek, hogy 1′—4′ általában nem véges eljárás. A lényeges különbség az, hogy az egyik rész megkülönböztetett kezelésével el tudjuk érni, hogy a feladat optimumértékére egy monoton csökkenő felső becslés ($\bar{\delta}$) adódik. (A Dantzig—Wolfe eljárásnál adódó felső becslések sorozata nem monoton.)

Hasonló eljáráshoz és ezt az [1]-beli algoritmussal összevetve hasonló konklúzióűhoz juthatunk, ha 1.—4.-et olyan esetre specializáljuk, mikor (1)-ben $A_1 = A_2 = \ldots = 0$.

(Beérkezett: 1973. november 22.)

IRODALOM

1. Benders, J. F.: Partitioning procedures for solving mixed variable programming problems. Numerische Mathematik. 1962. 1. szám. 238–252. o.
2. Dantzig, G. B.: Linear programming and extensions. Princeton, 1963. University Press.
3. Dantzig, G. B.—van Slyke, R. M.: Generalized upper bounded techniques for linear programs. Journal of Computer and System Sciences. 1967. 1. szám. 213–226. o.
4. Dantzig, G. B.—Wolfe, Ph.: The decomposition algorithm for linear programs. Econometrica. 1961. 4. szám.
5. Kornai, J.: Gondolatok a többszintű tervezési rendszerekről. Közgazdasági Szemle. 1971. 9. szám.
6. Hartman, J. K.—Lasdon, L. S.: A generalized upper bounding technique for doubly coupled linear programs. Naval Research Logistics Quarterly 1970. 4. szám.
7. Ritter, K.: A decomposition method for linear programming problems with coupling constraints and variables. Mathematics Research Center, University of Wisconsin. 1970. Sept. 739. o.

ON THE TWOFOLD CONNECTED LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

The article deals with a decomposition algorithm elaborated for the solution of a so called twofold connected (1) linear programming problem. In each step of the decomposition algorithm a vector $\tilde{p}$ is determined, it corresponds to the „common conditions" as well as an $\tilde{y}$ for the „common variable y" by solving a linear programming problem; then problems (7) are solved.

Two cases are possible. In the first case the procedure solves problem (1) in steps of finite number. In the second case the procedure is infinite: the optimum values of linear programming problems resulting $\tilde{p}$ and $\tilde{y}$ constitute a monotonous non-decrea-

sing or a monotonous non-increasing series, their common limit is the optimum value of problem (1). (If this does not exist, it is indicated in a finite number of steps.) There are solutions to (1) and its dual, their objective function values are the elements of the series in question.

In the introduction some economic interpretations of (1) are mentioned. The second part of the article contains the algorithm, its verification as well as a numerical problem. In the next part there are some remarks and addenda; the last part contains a special case of the algorithm and its comparison to the Dantzig — Wolfe method.

О ДВУКРАТНО СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Статья занимается декомпозиционным методом, выработанным для решения так называемой двукратно связанной задачи линейного программирования. В каждом шагу декомпозиционного метода решением задачи линейного программирования определяется $\tilde{p}$, удовлетворяющий «общим условиям» $A_0x_0+B_0y+\sum_i A_ix_i=a$ и $\tilde{y}$ для «общей переменной y», потом решается задача (7).

В общем имеются два случая. Первый случай — задачу (1) решаем в шагах конечной величины.

В другом случае альгоритм бесконечен, и оптимум задач линейного программирования, дающих $\tilde{p}$ и $\tilde{y}$ составляют монотонно не убывающую или монотонно не возрастающую прогрессию, общий предел которых — оптимум задачи (1). (Если такого не существует, то после выполнения шагов метода в конечной величине это проявляется).

В то же время имеются решения (1) и ее двойственной задачи, у которых значения целевых функций являются элементами данных прогрессий.

В ведении упоминаем некоторые экономические интерпретации (1). Вторая часть статьи содержит метод, его вертификацию и также числовой пример. В следующей части фигурирует несколько заметок и добавок. Последняя часть содержит специальный случай метода и его сопоставление с методом «Дантциг—Волф».