KÁDAS SÁNDOR

# A geometriai programozás és két gazdasági alkalmazása*

## 1. A geometriai programozás

A geometriai programozás a matematikai programozás egy viszonylag új ága, az első cikkek a témakörben az 1960-as évek elején, az első könyv [1] pedig 1966-ban jelent meg. Az alapvető elméleti eredmények és az alkalmazhatóság felismerése amerikai szerzők nevéhez fűződik, de érdekes eredményeket ért el a témában többek között Klafszky Emil is [2, 3].

A geometriai programozás alapfeladata egy speciális nem-lineáris programozási feladat, amelyben a célfüggvény és a feltételek is pozitív együtthatós általánosított polinomok (melyeket szokás pozinomoknak, a feladatot pedig pozinomiális programozási problémának nevezni). Ehhez hozzárendelhető egy duálfeladat. A primál-duál feladatpár a következő:

*Primál feladat*

$$\min g_0(t)$$

$$t \in R^m$$

$$t > 0$$

$$g_1(t) \leq 1$$

$$\vdots$$

$$g_p(t) \leq 1$$

ahol

$$\left.\begin{aligned} g_k(t) &= \sum_{i \in J[k]} c_i t_1^{a_{i1}} \ldots t_m^{a_{im}} \\ J[k] &= \{m_k, m_k + 1, \ldots, n_k\} \end{aligned}\right\} k = 0, 1, \ldots, p$$

$$m_0 = 1,\ m_k = n_{k-1} + 1 \quad (k = 1, \ldots, p);\ n_p = n,$$

$c_i > 0$ minden $i$-re és $a_{ij}$ tetszőleges valós számok.

* A cikk 2. ill. 3. része a szerzőnek az ezévi, Oslóban rendezett, ökonometriai ill. balatonfüredi operációkutatási konferencián tartott előadásában szereplő modell rövidített leírása. A 2. rész modelljének részletesebb ismertetésére, a numerikus számítási eredmények és a modellel kapcsolatos tapasztalatok értékelésére a szerző egy későbbi cikkben szeretne visszatérni.

*Duál feladat*

$$\max_{\delta \in R^n} v(\delta) = \left[\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i}{\delta_i}\right)^{\delta_i}\right] \prod_{k=1}^{p} \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)}$$

ahol $$\lambda_k(\delta) = \sum_{i \in J[k]} \delta_i \quad \text{és}$$

$$\delta \geq 0$$

$$\sum_{i \in J[0]} \delta_i = 1 \quad \text{(a „normalitási feltétel”)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \delta_i = 0,\ j = 1, \ldots, m \quad \text{(az „ortogonalitási feltételek”).}$$

Látjuk, hogy a duálfeladat változóinak számát a primál additív kifejezések száma (a célfüggvényben és a feltételekben együttesen) adja, míg a duálfeltételek száma eggyel nagyobb a primál változókénál.

Az első pillantásra kissé bonyolult jelölések mögötti lényeg szemléltetésére bemutatunk egy egyszerű példát:

a primál feladat:

$$\min\, (t_1^2 t_2 + 2 t_1^{1/2} t_2^{-1/2})$$

$$t_1 > 0,\ t_2 > 0$$

$$3 t_1 t_2 + \frac{1}{2} t_1^{-2} t_2 \leq 1$$

$$2 t_1 t_2 \leq 1,$$

a hozzátartozó duálfeladat pedig:

$$\max_{\delta_1, \ldots, \delta_5 \geq 0} \delta_1^{-\delta_1} \left(\frac{2}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \left(\frac{3}{\delta_3}\right)^{\delta_3} \left(\frac{1}{2\delta_4}\right)^{\delta_4} \left(\frac{2}{\delta_5}\right)^{\delta_5} (\delta_3 + \delta_4)^{\delta_3 + \delta_4} \delta_5^{\delta_5}$$

$$\delta_1 + \delta_2 = 1$$

$$2\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_2 + \delta_3 - 2\delta_4 + \delta_5 = 0$$

$$\delta_1 - \frac{1}{2}\delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 = 0.$$

A primál feladat eredeti formájában nem konvex, de bevezetve az $e^{z_k} = t_k$ helyettesítést az új változókban már könnyen láthatóan az. Bizonyítható (l. pl. [1]-ben), hogy a duálfüggvény logaritmusa konkáv, s mivel a duálfeladat lineárisan korlátozott, azért ez is konvex programozási probléma. A geometriai programozás dualitás elméletében alapvető szerepet játszik a geometriai egyenlőtlenség, amely a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség általánosítása, innen származik a problémakör elnevezése.

A dualitástétel értelmében egy $(t, \delta)$ primál-duál megengedett megoldás párra:

$$g_0(t) \geq v(\delta),$$

továbbá általános feltételek mellett a primál program minimumértéke megegyezik a duálprogram maximumértékével és egy egyszerű összefüggés (a változók logaritmusában lineáris egyenletrendszer) áll fenn az optimális primál- és duál megoldások között, tehát ha meghatározzuk a duálfeladat egy optimális megoldását, abból könnyen kapható egy primál optimális megoldás.

Ez adja meg a dualitástétel és az ilyen feladattípus jelentőségét. Míg a primál feladatban a célfüggvény és a feltételek egyaránt nem-lineárisak, addig a duálban a feltételek lineárisak, tehát, ez, különösen nagyobb méreteknél számítástechnikailag sokkal könnyebben kezelhető. Sok gyakorlati feladat fogalmazható meg ilyen alakban, a geometriai programozásnak számos alkalmazása van mérnöki tervezési-optimalizálási problémákban (l. pl. [1], [4]-ben), azonban a gazdasági alkalmazások újkeletűek.

Nijkamp [5] ipari komplexumok telepítésének tervezésére, Nijkamp—Paelinck [6] egy környezetvédelmi-területfejlesztési modell, Dinkel—Kochenberger—Seppälä [7] pedig különböző területi tervezési modellek számszerűsítésére használta fel a geometriai programozást.

Ezen feladattípus (amelyben az általános nem-lineáris problémához képest, a duálfeladaton keresztüli megoldhatóság miatt általában sokkal nagyobb méretek kezelhetők) alkalmazása közgazdasági modellekben biztató.

Például a $T = \gamma I^\alpha L^\beta$ Cobb—Douglas termelési függvény, vagy az

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\alpha_1}, \quad \frac{L}{L_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\alpha_2}$$

ún. technológiai függvények könnyen vezethetnek geometriai programozási feladatra, mint erre a 2. és 3. részben példát is látunk majd.

Az ilyen alakban való megfogalmazásnak a legfőbb korlátja az együtthatók pozitivitásának feltétele, amely a feladat konvexitását biztosítja, Viszont közismert, hogy nem-konvex optimalizálási feladatok megbízható megoldására amúgy sincs használható módszer.

## 2. Egy dinamikus népgazdasági modell

Egy 15 éves, öt egyenként 3 éves részperiódusra bontott időszakot vizsgálunk (a felbontás ilyen konkrét módja a modell szempontjából nem alapvető fontosságú). A gazdaság állapotát befolyásoló döntéseket: a beruházást, munkaerő elosztást, minimális nettó termelési előírást csak az egyes 3 éves periódusokra összevontan vizsgáljuk (hogy kevesebb változónk legyen), $t$ az aktuális periódus sorszámát jelenti. A gazdaságot 3 ipari és 3 nem ipari ágazatra bontjuk, ezek:

| | |
|---|---|
| 1. Nehézipar | 4. Építőipar |
| 2. Könnyűipar | 5. Mezőgazdaság |
| 3. Élelmiszeripar | 6. Egyéb |

A 6. ágazat tartalmazza többek között a közlekedést, kereskedelmet és a szolgáltatásokat. A 4—6 ágazatok termelését egzogénnek vesszük (mivel ezek termelési függvényekkel való leírhatósága kérdéses), az értékek előrejelzésére exponenciális trendet alkalmazunk; az ipari ágazatok termelését pedig Cobb—Douglas termelési függvényekkel fejezzük ki:

(2.1) $$q_t^i = \varepsilon_1^i e^{3\varepsilon_2^i t} \widehat{K}_t^{i\alpha_i} \widehat{L}_t^{i\beta_i}, \qquad i = 1, 2, 3;\ t = 1, \ldots, 5,$$

ahol $q_t^i$ a $t$ periódus utolsó évében az $i$ ágazat termelése, továbbá:

$$\widehat{K}_t^i = k_t^i K_t^i, \qquad \widehat{L}_t^i = l_t^i L_t^i, \tag{2.2}$$

s itt $K_t^i$ a termelő állóeszközök értéke, $k_t^i$ a kihasználási együttható, $L_t^i$ a munkaerő létszáma, $l_t^i$ pedig az évi átlagos munkaidő munkásonként, mindegyik mennyiséget az $i$ ágazat $t$ periódusbeli helyzetére vonatkoztatva.

Az ágazatok közötti termelési kapcsolatokat a szokásos input-output modellel írjuk le:

$$q_t = Aq_t + Bd_t + c_t, \tag{2.3}$$

ahol $q_t, d_t, c_t \in R^6$ a termelés, beruházás és fogyasztás vektorai, $A$ és $B$ a technológiai együttható-, ill. a beruházási mátrix. Az endogén (tehát az ipari ágazatok) állóeszköz-állományának évenkénti $x_t^i$ növekedési ütemeit optimalizálandó változóknak tekintjük, ezekre:

$$K_t^i = x_t^i K_{t-1}^i, \quad x_t^i \geq 1 \quad \text{és így} \tag{2.4}$$

$$d_t^i = (x_{t+1}^i - 1)K_t^i \geq 0, \qquad t = 1, \ldots, 5; \; i = 1, 2, 3. \tag{2.5}$$

Az 1—3 ágazatok által együttesen felhasználható munkaerőt adottnak vesszük — értékét múltbeli idősorból extrapoláljuk —, de a közöttük való felosztásáról periódusonként dönthetünk:

$$L_t^i = \lambda_t^i L_t, \quad \sum_{i=1}^{3} \lambda_t^i \leq 1, \quad \lambda_t^i > 0, \quad t = 1, \ldots, 5; \; i = 1, 2, 3. \tag{2.6}$$

Egy olyan gazdaság esetét vizsgálva, amely jelentős strukturális változást hozó növekedés előtt áll, de beruházási lehetőségei elég korlátozottak, ésszerű kritérium a beruházások diszkontált értékösszegét minimalizálni az endogén ágazatokban létrehozott nettó termelés bizonyos minimális szintjeinek megkövetelése mellett:

$$\min \sum_{j=1}^{5} \gamma_j 1' B_1 \left( \sum_{t=1}^{j} d_t \right) = \sum_{j=1}^{5} \sum_{i=1}^{3} \gamma_j f_i K_0^i \left( \prod_{t=1}^{j} x_t^i - 1 \right) \tag{2.7}$$

feltéve, hogy

$$(E_{(3)} - A_1) q_t \geq \begin{bmatrix} \hat{q}_t^1 \\ \hat{q}_t^2 \\ \hat{q}_t^3 \end{bmatrix}, \quad t = 1, \ldots, 5 \tag{2.8}$$

ahol $B_1$ a $B$ első 3 oszlopából, $A_1$ az $A$ első 3 sorából (ezek felelnek meg az endogén ágazatoknak) alkotott részmátrix, $f_i = \sum_{k=1}^{6} b_{ki}$, a $\gamma_j$-k pedig a diszkontálást biztosítják:

$$\gamma_5 = 1, \quad \sum_{k=1}^{6} \gamma_j = (1 + s)^{5-k},$$

ahol $s$ a 3 éves periódusra vonatkoztatott diszkonttényező ($s = 0{,}2$-t használtunk).

A (2.1)—(2.6) feltételeket (2.8)-ba helyettesítve (2.7)-tel együtt egy geometriai programozási primál feladatot kapunk. Ennek a feladatnak 30 változója van, ezek:

$$x_t^i,\ \lambda_t^i\ i = 1, 2, 3 \text{ és } t = 1, \ldots, 5\text{-re.}$$

A primál feltételek és additív kifejezések száma 35, ill. 90, s ezért a megoldandó duálfeladatnak 90 változója és $30 + 1 = 31$ feltétele van.

A feladat megoldásával arra lehet feleletet kapni, hogy a nem ipari ágazatok rögzített fejlődési pályája és az ipari ágazatokra előírt minimális nettó termelési szintek esetén mi lesz az időszakra vonatkozó lediszkontált beruházásösszeg minimumát megvalósító beruházási és munkaerő elosztási pálya. A modellel, a geometriai programozási feladatot megoldó algoritmus és számítógépi program kidolgozása után a magyar népgazdaságra vonatkozó adatokat használva fel, az 1970—85-ös időszakra végeztem kísérleti számításokat. Ezek igazolták a feladat számítástechnikai kivitelezhetőségét; jelenleg folyamatban van a modell továbbfejlesztése (pl. a külkereskedelem figyelembevételével való kibővítése), az ezzel kapcsolatos numerikus eredményekre és a levonható következtetésekre szeretnék majd később visszatérni.

## 3. Egy iparteleрítési modell

Tegyük fel, hogy egy ipari komplexum létesítésére a tervező szerv különböző szempontok alapján kijelöl egy földrajzi térséget (régiót) és a telepítendő termelő egységek, üzemek egy szóba jövő csoportját. Mivel a beruházási keret korlátozott, ezek közül kell kiválasztani a soron levő periódusban ténylegesen megépítendőket. A választásra többféle kritérium képzelhető el, mi most a kérdést kicsit leegyszerűsítve a megvalósítandó beruházások árösszegének adot technikai és jövedelmezőségi korlátozások melletti minimalizálását választjuk.

Az üzemek termelését homogénnek tételezzük fel, s az $i$ üzemre ($i = 1, \ldots, I$) a következő jelöléseket alkalmazzuk:

$p_i$ az üzem termékének egységára
$b_i$ az egységnyi beruházás költsége
$l_i$ egységnyi munkaerő éves bérköltsége
$a_{ji}$, $c_{ki}$ a régión belüli, ill. a régió és külső termelők közötti termelési kapcsolatok input-output együtthatói ($j = 1, \ldots, I$; $k = 1, \ldots, K$)
$\varrho_i$ a beruházás egy évre eső amortizációhányada
$\pi_i$ a minimális megkövetelt jövedelmezőségi szint (jövedelem/lekötött eszközérték)
$T_i$ megvalósítandó termelési szint (naturális mértékegységben)
$L_i$ az alkalmazott munkaerő létszáma
$I_i$ a megvalósítandó beruházási szint (naturális mértékegységben)
$\gamma_{ji}$ agglomerációs együtthatók.

Feltételezzük, hogy ismerjük a szóba jövő üzemek működését leíró technológiai függvényeket, ezek az $i$ üzem esetében:

$$(3.1)\qquad \frac{I_i}{I_{i_0}} = \left(\frac{T_i}{T_{i_0}}\right)^{\alpha_i}, \quad \frac{L_i}{L_{i_0}} = \left(\frac{T_i}{T_{i_0}}\right)^{\beta_i},$$

ahol $T_{i0}$ a termelés technológiailag vagy egyéb okokból megkívánt minimális szintje (tehát megépítés esetén az $i$ üzemet legalább ilyen szinten kell működtetni), $I_{i0}$, $L_{i0}$ az ehhez tartozó beruházási és munkaerő szint, $0 < \alpha_i$, $\beta_i < 1$ degressziós kitevők.

Legyen $\delta_i = 0$ vagy 1 aszerint, hogy az $i$ üzemet megépítjük, vagy nem. A (3.1) függvények használata feltételezi, hogy adott üzem (technológia) esetén a termelés szintje a lekötött eszköz és a munkaerő szintjét egyértelműen meghatározza (tehát nincs helyettesítés), s a méretnövekedés a gazdaságosságot javítja, magasabb termelési szint mellett a termelés egységnyi növeléséhez kevesebb pótlólagos beruházási és munkaerő ráfordítás szükséges. Az $\alpha_i$, $\beta_i$ kitevők termelési statisztikák és becslések alapján határozhatók meg, szokásos értékük:

$$\alpha = 0{,}5\text{--}0{,}6,\ \beta = 0{,}15\text{--}0{,}25 \ (\text{általában } \alpha > \beta).$$

A régión belül több üzem felépítése esetén kedvező agglomerációs hatások érvényesülnek: ha az üzemek egymással kooperálnak, a termelésükhöz szükséges félkésztermékek és alapanyagok egy részét régión belüli termelőktől szerzik be, akkor olcsóbban kaphatják, mint külső piacról történő vásárlás esetén, a $p_j$ helyett $p_j T_j^{-\gamma_{ji}}$ egységárért (tehát annál olcsóbban, minél magasabb a $j$ üzemben a termelés szintje). Éppen ezért kikötjük, hogy ha egy üzemet megépítünk, akkor termelésének ki kell elégítenie a régión belüli igényeket:

$$\delta_i \left( \sum_{j=1}^{I} \delta_j a_{ij} T_j \right) \le T_i, \tag{3.2}$$

A termelésben felhasznált termékek egy csoportját az $i$ üzemnek természetesen mindenképpen kívülről kell beszereznie, az $i$ termék árából az ezek (egységre eső) költségének levonása után maradó rész:

$$p_i^b = p_i - \sum_{k=1}^{K} p_k c_{ki}. \tag{3.3}$$

A többi terméket csak akkor szerzi be kívülről, ha az azt termelő régióbeli üzem nem épül meg.

Így feladatunk a következő:

$$\min \sum_{i=1}^{I} \delta_i b_i I_i$$

$$\delta_i p_i^b T_i - \sum_{j=1}^{I} \delta_i p_j a_{ji} T_i (\delta_j T_j^{-\gamma_{ji}} + 1 - \delta_j) - \delta_i l_i L_i - \delta_i \varrho_i b_i I_i \ge \delta_i \pi_i b_i I_i$$

(jövedelmezőségi korlátok)

$$\delta_i \left( \sum_{j=1}^{I} \delta_j a_{ij} T_j \right) \le T_i \quad \text{(a (3.2)-beli feltétel)} \tag{3.4}$$

$$\delta_i T_{i0} \le T_i \quad \text{(minimális termelési szint)}$$

$$T_i \ge 0,\ \delta_i = 0 \text{ vagy } 1,$$

mindegyik feltételben $i = 1, \ldots, I$

$$\sum_{i=1}^{I} \delta_i \geq 1$$

Behelyettesítve a (3.1) összefüggéseket, átrendezés és az egyes feltételekben $T_i$-vel való osztás után egy geometriai programozási feladatot kapunk, amelyben azonban szerepelnek a $\delta_i$ 0,1-es változók is. A $\delta_i$-k minden lehetséges értékegyütteséhez (melyek száma $2^I$) tartozik egy folytonos geometriai programozási feladat. Szerencsére a feladat speciális szerkezete miatt megadható egy olyan algoritmus, amely biztosítja, hogy általában csak kis számú ilyen folytonos feladatot kelljen megoldani. Ez az algoritmus kombinatorikai jellegű megfontolásokon alapul, a témához szorosan nem kapcsolódik, ezért most nem közöljük. Az optimális megoldás többnyire olyan, hogy benne nem szerepel 2—3 üzemnél több, de ha az agglomerációs előnyök különösen nagyok, pl. egy vertikálisan egymásra épülő egységekből álló vegyipari kombinátnál, és a megkövetelt jövedelmezőségi szint magas, akkor ez a szám lehet nagyobb is. A feladat módosítható úgy, hogy előírjuk bizonyos üzemek megépítését (ezekre $\delta_i = 1$), tehát arra keresünk választ, hogy adott üzemek megvalósítása esetén azokat milyen méretben építsük fel, s esetleg milyen csatlakozó üzemeket létesítsünk, hogy az előírt jövedelmezőség biztosítva legyen, a beruházásra fordított összeg pedig minimális legyen. Ebben az esetben már nagyobb jelentősége van egy, a $\delta_i$ kombinációkat ügyesen „leszámláló" algoritmusnak, mert a megoldandó folytonos geometriai programozási feladatok mérete már nagyobb.

A modellel már végeztem kísérleti számításokat, s jelenleg folyamatban van egy reális adatokon alapuló számítássorozat végrehajtása.

*(Beérkezett: 1973. november 21.)*

## IRODALOM


1. DUFFIN, R. J.—PETERSON, E. L.—ZENER, C.: Geometric programming. Wiley, 1966.
2. KLAFSZKY, E.: Geometriai programozás. MTA Számítástechnikai Központ, Közlemények. 1972. 8. szám. 41—65. o.
3. KLAFSZKY, E.: Geometriai programozás és néhány alkalmazása. Kandidátusi értekezés, 1973.
4. ZENER, C.: Engineering design by geometric programming. Wiley, 1971.
5. NIJKAMP, P.: Planning of industrial complexes by means of geometric programming. Rotterdam, 1972. Universitaire Pers.
6. NIJKAMP, P.—PAELINCK, J. H. P.: An interregional model of environmental choice, an application of geometric programming. Rotterdam, 1972. Netherlands Economic Institute.
7. DINKEL, J. J.—KOCHENBERGER, G. A.—SEPPÄLÄ, Y.: On the solution of regional planning models via geometric programming. Environment and Planning. vol. 5. (1973), 397—408 o.



## GEOMETRIC PROGRAMMING AND TWO ECONOMIC APPLICATIONS

Geometric programming is a relatively new branch of mathematical programming. It gives an efficient solution to a special non-linear optimum problem through solving the corresponding dual one. Several practical problems can be formulated in this special form, the method has already been applied efficiently in technical optimum calculations in various cases. Attempts at the application in economic models have begun not earlier than 1—2 years ago but the perspectives are reassuring, the usual technological functions

and also the Cobb-Douglas production function lead to geometric programming problem in case of certain conditions.

In the first model we study the dynamics of a national economy, it computes the production of industrial branches with Cobb-Douglas production functions, the production of other branches is handled as exogenous and the usual input-output model is applied for the description of production connections. The aim is to determine the investment and labour distribution variables ensuring minimum of discounted aggregate investment with given lower limits of net production for a 15-year period. The aim of the second model is to select establishments in an industrial complex for construction. Optimality criterion: minimize investment costs subject to profitability and technological constraints. The operation of a single establishment is described by usual technological functions. The model leads to a geometric programming problem of mixed integer type chat, however, due to its special structure, can be reduced to the solution of a series of tontinuous problems.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ЕГО ДВА ХОЗЯЙСТВЕННЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Геометрическое программирование является релятивно новой областью математического программирования, которое — решением дуальной задачи — эффективно решает специальную нелинеарную оптимализирующую задачу.

В такой специальной форме можно составлять много практических проблем, метод пользовался успешно в разных технических оптимализирующих расчетах. Эксперименты его применения в хозяйственных моделях продолжаются всего 1—2 года, но перспективы обнадеживающие. При некоторых условиях обычные технологические функции и Кобб—Даглес производственная функция приводят к задаче геометрического программирования.

Первая фигурирующая в работе модель является динамичной народнохозяйственной моделью, которая рассчитывает производство промышленных отраслей с помощью Кобб—Даглес производственных функций. С производством других отраслей она обращается эгзогенично, и употребляет обычную модель затрат и выпусков для описывания производственных связей. Цель — определение инвестиционных переменных и перемены расстановки рабочей силы, которые обеспечивают минимум дисконтированной инвестиционной суммы пятнадцатилетнего периода при нижних пределах, данных для нетто производства. Вторая модель ставит себе целью выбор заводов, которые будут построены в промышленном комплексе, и оптимум-критерием является минимализация капитальных затрат при данных доходных и технологических условиях. Действие отдельных заводов описывается обычными технологическими функциями. Модель приводит к задаче смешанного непрерывного целочисленного геометрического программирования, которую из-за специальной структуры можно свести к решению некоторых непрерывных задач с комбинаторическим методом.