Szép Jenő–Hegedüs Miklós

Egyensúlyi rendszerek I.

A Közgazdaságtudományi Egyetem Matematikai Tanszéke feladatul tűzte ki olyan általános egyensúlyi elmélet kidolgozását, amelyik alkalmas lehet gazdasági rendszerek egyensúlyi problémáival kapcsolatos elméleti vizsgálatokra, továbbá gyakorlati – módszertani oldalról nézve számítástechnikailag használható és kezelhető még valódi alkalmazási méretekben is. Mint ismeretes a játékelméletben szereplő egyensúlypontok meghatározása sokszemélyes játékok esetében rendkívüli nehézséget jelent mindenekelőtt azért, mert a gyakorlatilag szóbajöhető méretekben nem áll rendelkezésre hatásos fixpontkeresési módszer. Ugyanakkor a játékelmélet jelenlegi formájában – csekély kivételtől eltekintve – nem alkalmas valóságos gazdasági „játékszituációk" modellezésére. Szükség van tehát olyan általánosabb alapok megteremtésére, amelyek lehetőséget adnak a valósághoz közelálló modellek vizsgálatára. Az alábbiakban főbb eredményeinkről számolunk be.

A következőkben rendszeren egy organikus rendszert értünk, amelynek jellemzői közül – kvalitatív megfogalmazásban – a következőket emeljük ki:

Sztatikus jellemzők:

1. Véges sok jól megkülönböztethető részből (szervből) áll.
2. Mindegyik szerv állapota függ a többitől.
3. Mindegyik szerv jól meghatározott állapotokban létezhet csak.
4. Léteznek a szerveknek és így a rendszernek kritériumai, amelyek alapján dönteni tud állapotváltoztatásáról.

Dinamikus jellemzők:

1. Mindegyik szerv – és így a rendszer – állapotalakulása időben megy végbe.
2. A szervek lehetséges állapotainak halmaza időben változik.
3. A szervek száma változhat az időben.

Kétféle rendszert célszerű megkülönböztetni

a. Autonóm rendszert, ahol a szervek állapotai kizárólag a többi szerv állapotától függnek.

b. Nem autonóm rendszert, ahol a szervek állapotai a rendszeren kívüli tényezőktől is függnek.

A következőkben organikus rendszeren mindenekelőtt gazdasági rendszert értünk, bár ennek az előzőkben leírt általános jellemzőin túli tulajdonságait – legalábbis egyelőre – figyelmen kívül hagyjuk.

Megfogalmazzuk a rendszer matematikai modelljét, majd vizsgálat alá veszszük e modellt. Maga a vizsgálat meglehetősen bonyolult és összetett matematikai eszközöket kíván. Éppen ezért a kiindulásnál még figyelmen kívül hagyjuk az időtényezőt, ami számos nehézség forrása. A vizsgálatok alapjául a [7] dolgozat szolgál.

A modell leírása során több helyen külön térünk ki a közgazdasági interpretációra.

1. Alapfogalmak

1.1 *Az n személyes játék fogalmának általánosítása*

Legyen adott meghatározott szerveknek egy

$$S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$$

rendszere.

Rendeljük rendre a

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$$

halmazokat a felsorolt szervekhez. A $\Sigma_i (\subseteq X_i)$ halmazt, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ az i-ik szerv *állapothalmaz*-ának nevezzük, továbbá feltételezzük, hogy az X_i megszámlálható bázisú metrikus tér. Legyen

$$\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \ldots \times \Sigma_n.$$

A $\Sigma\ (\subseteq X_1 \times \ldots \times X_n)$ halmazt az *S rendszer állapothalmazának* nevezzük.

Legyen adott továbbá egy

$$L \subseteq \Sigma$$

halmaz. Az L halmazt, az *S rendszer megengedhető állapothalmazának* nevezzük, az elemeit pedig a rendszer *megengedhető állapotai*nak.

Rendeljük hozzá továbbá a felsorolt szervekhez rendre az

$$F_1, F_2, \ldots, F_n$$

ún. *preferencia függvényeket*, ahol az F_i függvény a Σ halmazt képezi le egy Y halmazba $(i = 1, 2, \ldots, n)$, amelyről feltesszük, hogy definiálva van benne egy jólrendezés. (Legtöbbször, de nem szükségképpen Y-nak a valós számok halmaza vehető, ha külön mást nem mondunk, akkor Y mindig a valós számok halmazát jelöli.) Legyen adott egy F függvény, amely az X^n-et egy Y-ba képezi le.

$$F(F_1, F_2, \ldots, F_n)\ (\Sigma \to Y)$$

függvényt az *S rendszer preferencia függvényének nevezzük*.

Hasonlóan rendeljük hozzá a szervekhez rendre a

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$$

pont-halmaz leképezéseket, ahol minden $\mathbf{x} \in \Sigma$-ra $\Phi_i(x)$ *a* Σ_i *nem üres részhalmaza* $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

A Φ_i függvényt az S_i szerv *környezetfüggvényének nevezzük*.

A környezetfüggvényektől megköveteljük még az alábbi feltételek teljesítését is:

A) $x_i \in \Phi_i(\mathbf{x})$; $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in L$; $i = 1, 2, \ldots, n$

B) *Ha* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in L$ és
$\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \Sigma$, akkor
az $x_i' \in \Phi_i\ (\mathbf{x})$-ből az $\mathbf{x}' \in L$ következik $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Legyen továbbá

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_1(\mathbf{x}) \times \ldots \times \Phi_n(\mathbf{x}), \ (\mathbf{x} \in \Sigma).$$

A $\Phi(\mathbf{x})$ függvényt az S *rendszer környezetfüggvényének* nevezzük.

Világos, hogy minden $\mathbf{x} \in L$-re

$$\mathbf{x} \in \Phi(\mathbf{x}),$$

továbbá a fentiekhez hasonlóan, ha $\mathbf{x} \in L$ és $\mathbf{x}' \in \Sigma$ csak az i-ik komponensben különböznek, akkor az $\mathbf{x}' \in \Phi(\mathbf{x})$-ből az $\mathbf{x}' \in L$ következik.

Rendeljük hozzá továbbá még rendre a felsorolt szervekhez a

$$C_1, C_2, \ldots, C_n$$

ún. *költségfüggvényeket*, ahol a C_i függvény nemnegatív és a $\Sigma \times \Sigma$ halmazt képezi le Y-ba, és feltesszük, hogy minden $\mathbf{x} \in \Sigma$-ra $C_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Legyen C az X^n halmazt az Y-ba leképező függvény. A

$$C(C_1, \ldots, C_n), (\Sigma \times \Sigma \rightarrow Y)$$

függvényt az S rendszer *költségfüggvényének* nevezzük.

Végül a felsorolt szervek mindegyikéhez hozzárendeljük még a

$$K_1, K_2, \ldots, K_n$$

korrekciós függvényeket, ahol K_i a $\Sigma \times \Sigma$ halmazt képezi le Y-ba és $K_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Végül legyen K egy az X^n-et az Y-ba leképező függvény. A

$$K(K_1, \ldots, K_n), (\Sigma \rightarrow Y)$$

függvényt az S *rendszer korrekciós függvényének* nevezzük.

Ezek után az S rendszert adottnak tekintjük, ha az

1.	$\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$	állapothalmazok
2.	$F_1, \ldots, F_n$	preferencia függvények
3.	$\Phi_1, \ldots, \Phi_n$	környezetfüggvények
4.	$C_1, \ldots, C_n$	költségfüggvények
5.	$K_1, \ldots, K_n$	korrekciós függvények
6.	L	megengedett állapotok halmaza
7.	F	preferencia függvény
8.	C	költségfüggvény
9.	K	korrekciós függvény

adott.

Az S rendszert a továbbiakban az

$$S = \{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n; F_1, \ldots, F_n; \Phi_1, \ldots, \Phi_n; C_1, \ldots, C_n; K_1, \ldots, K_n; L, F, C, K\}$$

szimbólummal jelöljük.

Az S rendszer tekinthető egy n személyes játék általánosításának is, ugyanis ha

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \Sigma_i && (i = 1, 2, \ldots, n) \\ C_i &= 0 && (i = 1, 2, \ldots, n) \\ K_i &= 0 && (i = 1, 2, \ldots, n) \\ L &= \Sigma \\ F &= 0 \\ C &= 0 \\ K &= 0 \end{aligned}$$

akkor S egy n személyes játékra redukálható. Megjegyezzük, hogy több szerző foglalkozott már a játék olyan általánosításával, ahol $L \subset \Sigma$. ([2], [3]). Nem utalunk most a játékok egyéb általánosítási kísérleteire. Ha az szükségessé válik, akkor mindig az aktuális helyen fogunk hivatkozni.

Egy közgazdasági interpretáció. Valamely S gazdasági rendszer állhat pl. termelő S_i vállalatainak összességéből. Feltesszük, hogy bármelyik vállalat bármely időpontban jellemezhető egy állapotvektorral, amelynek komponensei pl. létszám, állóalap, forgóalap, termelési érték, nyereség stb. Mindegyik vállalatnak — nem túl hosszú időhorizontot tekintve — létezik egy elvileg lehetséges állapothalmaza: Σ_i. Ezekből az elvileg lehetséges állapotokból egy adott időpontban csak olyanok valósulhatnak meg, amelyeket a többi vállalatnak a kérdéses időpontban meglevő állapotai megengednek. Így jutunk a megengedhető L állapotok halmazához. Az F_i preferencia függvények segítségével a vállalatok saját állapotaikat értékelik, természetesen a többivel való kapcsolataiban, ezért F_i nemcsak $x_i \in \Sigma_i$-től ,hanem $\mathbf{x} \in \Sigma$-tól függ. A vállalatnak a többitől való függése általában nem determinisztikus, így bármikor van lehetőségük saját állapotuk módosítására, de természetesen nem korlátlanul. Ezt a korlátozott mozgási lehetőséget fejezi ki Φ_i, azaz S_i adott $\mathbf{x} \in L$-nél $\Phi(\mathbf{x})$-ben változhat, miközben reálisan a rendszer $\mathbf{x}$ aktuális állapotát veheti csak figyelembe. A C_i költségfüggvényeknek az a szerepük, hogy egy adott állapotból egy másikba jutás (fejlesztés) ráfordítással jár. A K_i korrekciós függvények lehetőséget adnak arra, hogy bármelyik vállalat az általános F_i preferencia függvényén és C_i költségfüggvényén túlmenően az S rendszer pillanatnyi állapotától és az elérni kívánt állapottól függően egyéb szempontokat is érvényesíthessen állapotváltoztatási döntéseinél.

1.2 *A lánc és a bejárhatósági tartomány fogalma*

Mielőtt a játékelméletből ismert egyensúlypont, valamint az egyensúlyhalmaz fogalmát értelmeznénk, bevezetünk néhány definíciót. Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$. Amennyiben $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ csak egyetlen komponensben különbözik egymástól (tegyük fel, hogy az i-ikben, $1 \leq i \leq n$), akkor az $\mathbf{x}$-et és az $\mathbf{y}$-t *összehasonlíthatónak* nevezzük és

$$\mathbf{x} \overset{i}{\sim} \mathbf{y}$$

szimbólummal jelöljük. Világos, hogy ez az összehasonlíthatóság nem ekvivalenciareláció.

Ha $\mathbf{x} \overset{i}{\sim} \mathbf{y}$ és $y_i \in \Phi_i(\mathbf{x})$, vagy ami ugyanaz $\mathbf{y} \in \Phi(\mathbf{x})$, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{y}$ az $\mathbf{x}$-ből *közvetlenül elérhető*, és ezt a tényt az

$$\mathbf{x} \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{y}$$

szimbólummal jelöljük. Minden $\mathbf{x}$-re $\mathbf{x} \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{x}$, de általában az $\mathbf{x} \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{y}$-ból az $\mathbf{y} \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{x}$ nem következik, továbbá a reláció általában nem tranzitív.

Továbbá, ha $\mathbf{x} \in L$ és $\mathbf{x} \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{y}$, akkor a környezetfüggvények definíciója szerint $\mathbf{y} \in L$ következtik.

Legyen adott a Σ elemeinek egy

$$\mathfrak{L}\colon \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \ldots$$

véges vagy végtelen sorozata.

Az $\{\mathbf{x}_n\}$ sorozatot *lánc*-nak nevezzük, ha a sorozat bármely tagja az előtte levőből közvetlenül elérhető, azaz van olyan $\{i_m\}$ sorozat $(1 \leqq i_m \leqq n)$, hogy

$$\mathbf{x}_m \overset{i_m}{\rightarrow} \mathbf{x}_{m+1} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Ha egy $\mathbf{y}$ tagja egy $\mathbf{x}$-ből kiinduló $\mathfrak{L}$ láncnak, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{y}$ az $\mathbf{x}$-ből *lánccal elérhető,* és ezt az

$$\mathbf{x} \overset{\mathfrak{L}}{\rightarrow} \mathbf{y}$$

szimbólummal jelöljük.

Világos, hogy a bevezetett reláció általában nem megfordítható, de tranzitív, továbbá ha $\mathbf{x} \in L$, akkor minden, az $\mathbf{x}$-ből lánccal elérhető elem ugyancsak az L-be tartozik.

Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$ és $\mathbf{x} \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{y}$. Ha

$$F_i(\mathbf{x}) - K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqq F_i(\mathbf{y}) - C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{y}$ *az* $\mathbf{x}$-*nek i-ben egy javítása,* ha pedig

$$F_i(\mathbf{x}) - K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < F_i(\mathbf{y}) - C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{y}$ *az* $\mathbf{x}$-*nek egy szigorú javítása i-ben*, és ezeket a továbbiakban az

$$\mathbf{x} \overset{i}{\leqq} \mathbf{y}$$

és az

$$\mathbf{x} \overset{i}{<} \mathbf{y}$$

módon jelöljük.

Világos, hogy a bevezetett relációk általában nem tranzitívek.

Legyen $\{\mathbf{x}_m\}$ a Σ elemeinek egy lánca. Ha a sorozat bármely tagja az előtte levőnek javítása, akkor az $\{\mathbf{x}_n\}$ láncot *monoton*-nak, ha szigorú javítása, akkor *szigorúan monotonnak* nevezzük.

Egy $\mathbf{x} \in \Sigma$ pontra jelölje $\tau_{\leqq}(\mathbf{x})$ az $\mathbf{x}$-ből monoton lánccal, $\tau_{<}(\mathbf{x})$ pedig az $\mathbf{x}$-ből szigorúan monoton lánccal elérhető elemek összességét.

A $\tau_{\leqq}(\mathbf{x})$-et *az* $\mathbf{x}$ *bejárhatósági*, a $\tau_{<}(\mathbf{x})$-et pedig az $\mathbf{x}$ *szigorú bejárhatósági tartományának* nevezzük.

A $\tau_{\leqq}(\mathbf{x})$ és $\tau_{<}(\mathbf{x})$ bejárhatósági tartományokat *valódiaknak* nevezzük, ha a Σ valódi részhalmazai.

A korábbiakból világos, hogy ha $\mathbf{x} \in L$, akkor

$$\tau_{\leqq}(\mathbf{x}),\ \tau_{<}(\mathbf{x}) \subset L.$$

Továbbá, ha $\mathbf{y} \in \tau_{\leqq}(\mathbf{x})$ és $\mathbf{y}' \in \tau_{<}(\mathbf{x})$, akkor

$$\tau_{\leqq}(\mathbf{y}) \subset \tau_{\leqq}(\mathbf{x}) \text{ és } \tau_{<}(\mathbf{y}') \subset \tau_{<}(\mathbf{x}),$$

valamint mindig fennáll a

$$\tau_{<}(\mathbf{x}) \subset \tau_{\leqq}(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x} \in \Sigma)$$

összefüggés.

1.3 *Egyensúlypont, stabilitási halmaz, egyensúlyhalmaz.*

Ezek után először a játékelméletben is alapvető fontosságú fogalmat, az egyensúlypont fogalmát értelmezzük.

Egy $\mathbf{x}^* \in L$ pontot az S *rendszer szigorú egyensúlypontjának* nevezzük, ha a bejárhatósági tartománya önmaga, azaz

$$\tau_{\leq}(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{x}^*\}.$$ [1]

Világos, hogy az egyensúlypont fogalmának fenti értelmezése egybeesik speciális esetben a játékelméletből ismert „hagyományos" értelmezéssel.

Továbbá egy $\mathbf{x}^* \in L$ akkor és csak akkor *egyensúlypont*, ha a szigorú bejárhatósági tartománya az üres halmaz.

Ezek után értelmezni fogjuk a stabilitási halmaz fogalmát.

Egy $H_{\leq} \subset L$ halmazt az S *rendszer stabilitási* halmazának nevezzük, ha minden $\mathbf{x} \in H_{\leq}$-ra

$$[\tau_{\leq}(\mathbf{x})] = H_{\leq}.$$ [2]

Egy $H_{<} \subset L$ halmazt az S rendszer *szigorú stabilitási* halmazának nevezzük, ha minden $\mathbf{x} \in H_{<}$-ra

$$[\tau_{<}(\mathbf{x})] = H_{<}.$$

Végül értelmezni fogjuk az egyensúlyhalmaz fogalmát:

Egy $H^*_{\leq} \subset \Sigma$ halmazt az S *rendszer egyensúlyhalmazának* nevezzük, ha minden $\mathbf{x} \in H^*_{\leq}$-ra

$$\tau_{\leq}(\mathbf{x}) = H^*_{\leq},$$

és ha egy $H^*_{<} \subset L$ halmaznál minden $\mathbf{x} \in H^*_{<}$-re

$$\tau_{<}(x) = H^*_{<},$$

akkor $H^*_{<}$ halmazt az S *szigorú egyensúlyhalmazának* nevezzük.

A $H_{\leq}$, $H_{<}$, $H^*_{\leq}$, $H^*_{<}$ halmazokat *valódiaknak* nevezzük, ha a

$$H_{\leq},\ H_{<}$$

valódi részhalmazai a Σ-nak és a

$$H^*_{\leq},\ H^*_{<}$$

valódi részhalmazai az L-nek.

1.4 *Az egyensúlypont és egyensúlyhalmazok „egyensúly" tulajdonsága*

Mindenek előtt világos, hogy egy egyensúlypont mint egyelemű halmaz egyben egyensúlyhalmaz is.

Ha valamely $\mathbf{x} \in H_{\leq}$, $H_{<}$-re az $\mathbf{x}$ bejárhatósági illetve szigorú bejárhatósági tartományai zártak, akkor a stabilitási halmaz egyensúlyhalmaz és a szigorú stabilitási halmaz szigorú egyensúlyhalmaz.

A stabilitási és egyensúlyhalmazok „minimális tulajdonságúak", abban az értelemben, hogy nincs olyan valódi részhalmazuk, amely ugyancsak stabilitási vagy egyensúlyhalmaz lenne.

[1] Egy $\mathbf{x}$-re $\{\mathbf{x}\}$ szimbólummal azt a halmazt jelöljük, amely csak az $\mathbf{x}$-et tartalmazza.

[2] Egy A halmazra $[A]$-val jelöljük azt a halmazt, ami az A-ból úgy áll elő, hogy hozzávesszük a határpontjait.

Továbbá a stabilitási és egyensúlyhalmazoknak külön-külön mindegyiknek meg van az a tulajdonsága, hogy a különbözőek egyben diszjunktak is.

Végül összehasonlítjuk az egyensúlypont és egyensúlyhalmaz fogalmát.

Legyen

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

az S rendszer egy egyensúlypontja.

A definícióból következik, hogy minden i-re $(1 \leqq i \leqq n)$ és minden

$$\mathbf{x}^{(i)} = x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*)$$

pontra, ahol $x_i \in \Phi_i(\mathbf{x}^*)$:

$$F_i(\mathbf{x}^*) - K_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{(i)}) \geqq F_i(\mathbf{x}^{(i)}) - C_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{(i)}).$$

Azaz, amennyiben az S rendszer $n - 1$ számú tagja az „egyensúlyi állapotban van", akkor mintegy „kényszeríti" a kimaradó szervet (vállalatot) az egyensúlyi állapot, azaz az x_i^* elérésére, mert minden más szóbajöhető lépése esetén sem járhat jobban.

Megmutatjuk, hogy az egyensúlyhalmazoknak is lényegében megvan ez a tulajdonsága.

Legyen ugyanis $H^*_{\leqq}$ az S rendszer egy egyensúlyhalmaza:

$$H^*_{\leqq} = \{H_1^*, H_2^*, \ldots, H_n^*\}.$$

Legyen $x_i^* \in H_i^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, azaz tegyük fel, hogy az S rendszer az egyensúlyhalmazba jutott. Legyen ismét

$$\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*), \quad (1 \leqq i \leqq n).$$

Ebben az esetben, az i-ik szervnek az összes lépési lehetőségét a $\Phi_i(\mathbf{x}^*)$ tartalmazza. Mivel

$$\tau_{\leq}(\mathbf{x}^*) = H^*,$$

azaz minden olyan lépés, ami az x_i^*-ből indul ki és olyan állapotba vezet, amely az i-ik szerv szempontjából „nem rosszabb" mint az x_i^* volt, szükségképpen a $\Phi_i(\mathbf{x}^*)$ egy olyan x_i eleme, amely a H_i^*-ben van.

Tehát amennyiben az S rendszer bejutott egy egyensúlyhalmazba, akkor ez azt jelenti, hogy az „egyéni lépések" csak akkor „kifizetődőek", ha azok az egyensúlyhalmazban történnek, más szóval ez is egy „egyensúlyi állapotnak" tekinthető.

1.5 *A stabilitási és egyensúlyhalmazok összefüggései*

A stabilitási halmazok definíciójából közvetlenül adódik, hogy ezek a halmazok zártak. Az egyensúly és szigorú egyensúlyhalmazok esetében ez már általában nem lesz így.

Ugyancsak a definíciók közvetlen következménye, hogy ha minden $\mathbf{x}$-re az $\mathbf{x}$ bejárhatósági illetve szigorú bejárhatósági tartományai zártak, akkor minden stabilitási illetve szigorú stabilitási halmaz egyensúly illetve szigorú egyensúlyhalmaz is egyben.

Vagy szűkebben, ha egy stabilitási illetve szigorú stabilitási halmaznak van olyan pontja, melynek bejárhatósági illetve szigorú bejárhatósági tartománya zárt, akkor az a stabilitási halmaz egyensúlyhalmaz illetve a szigorú stabilitási halmaz szigorú egyensúlyhalmaz.

Az alábbiakban elégséges feltételt fogunk adni a bejárhatósági illetve szigorú bejárhatósági tartományok zártságára.

Előrebocsájtunk néhány definíciót és két segédtételt.

Az egyensúlyhalmaznak gyakorlati és egyben számítástechnikai szempontból alapvető tulajdonsága, hogy bármely pontjából bármely pontjába (és így az egyensúlyhalmazon belül maradva) véges sok lépés után eljuthatunk.

A Φ_i függvényt a *Σ halmazon egyenletesen összefüggőnek* nevezzük, ha létezik olyan pozitív δ szám, hogy valahányszor $\mathbf{x} \overset{i}{\sim} \mathbf{y}$ és $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$, mindannyiszor $x_i \in \Phi_i(\mathbf{y})$. (Ebből természetesen az $y_i \in \Phi_i(\mathbf{x})$ is következik.)

A $K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ függvénnyel jellemzett korrekciót egy $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ pontban $\varepsilon(>0)$ *pontosságúnak nevezzük*, ha minden $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{y}$ esetén $K(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \varepsilon$.

Ezek után bebizonyítjuk a következő segédtételt:

$$(\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$$

1. Lemma:

Legyenek a Σ_i halmazok korlátosak és zártak, az F_i, C_i függvények folytonosak, a Φ_i környezetfüggvények egyenletesen összefüggőek. Ha a K_i korlátozó függvények $(\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$ a Σ_i-n folytonosak az $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ helyzetet kivéve és egy $\mathbf{x}^*$ pontban $\varepsilon^* = \varepsilon(\mathbf{x}^*)$ pontosságúak, akkor van olyan $\delta^* = \delta^*(\mathbf{x}^*)$ (>0) szám, hogy valahányszor $\varrho(\mathbf{y}, \mathbf{x}^*) < \delta^*$, mindannyiszor az $\mathbf{x}^*$ az $\mathbf{y}$-ból szigorúan monoton lánccal elérhető.

Bizonyítás:

Mivel a K_i függvények az $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ helyek kivételével folytonosak, ezért minden pozitív ε-hoz és $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ ponthoz létezik olyan pozitív $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, hogy ha

$$\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') < \delta_1 \text{ és}$$

$$\varrho(\mathbf{y}, \mathbf{y}') < \delta_1,$$

úgy

$$|K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - K_i(\mathbf{x}', \mathbf{y}')| < \varepsilon, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Legyen $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon^*}{2}$, és legyen $\mathbf{x} \in \Sigma$ tetszőleges, melyre $\varrho(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) < \delta_1$.

Ekkor tetszőleges $\mathbf{y} \in \Sigma$ pontra $(\mathbf{y} \neq \mathbf{x})$

$$K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) - [K_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) - K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})] > \varepsilon^* - \frac{\varepsilon^*}{2} = \frac{\varepsilon^*}{2}.$$

Kaptuk tehát, hogy az $\mathbf{x}^*$-nak létezik olyan $\delta_1 = \delta_1(\mathbf{x}^*)$ sugarú környezete, hogy valahányszor $\varrho(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) < \delta_1$, mindannyiszor tetszőleges $\mathbf{y} \in \Sigma$-ra

$$K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \frac{\varepsilon^*}{2}, \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{y}).$$

Mivel az F_i függvények folytonosak a Σ_i zárt halmazon, így ott egyenletesen is folytonosak. Ezért van olyan $\delta_2 > 0$ szám, hogy

$$| F_i(\mathbf{x}) - F_i(\mathbf{y}) | < \frac{\varepsilon^*}{6}, \ (\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta_2; \ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Hasonlóan a C_i-k folytonossága miatt van olyan δ_3, hogy ha $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta_3$, akkor

$$| C_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = |C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | < \frac{\varepsilon^*}{6}, \ (i = 1, 2, \ldots n).$$

Mivel a Φ_i-k egyenletesen összefüggőek, ezért létezik olyan $\delta_4 < 0$ szám, hogy valahányszor $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$ és $\mathbf{x} \overset{i}{\sim} \mathbf{y}$, valamint $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta_4$, mindannyiszor

$$x_i \in \Phi_i(\mathbf{y}) \text{ és } y_i \in \Phi_i(\mathbf{x}), \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Legyen $\delta^* = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$.
Megmutatjuk, hogy ha $\varrho(\mathbf{y}, \mathbf{x}^*) < \delta^*$, akkor az x^* az $\mathbf{y}$-ből szigorúan monoton lánccal elérhető.

Legyen:

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n).$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_0 &= (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}, y_n)\\
\mathbf{y}_1 &= (x_1^*, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)\\
\mathbf{y}_2 &= (x_1^*, x_2^*, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)\\
&\vdots\\
\mathbf{y}_{n-1} &= (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_{n-1}^*, y_n)\\
\mathbf{y}_n &= (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_{n-1}^*, x_n^*).
\end{aligned}$$

Meg fogjuk mutatni, hogy

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 \overset{1}{<} \mathbf{y}_1 \overset{2}{<} \mathbf{y}_2 \overset{3}{<} \ldots \overset{n-1}{<} \mathbf{y}_{n-1} \overset{n}{<} \mathbf{y}_n = \mathbf{x}^*.$$

Legyen i egy tetszőleges index $(1 \leq i \leq n)$. Megmutatjuk, hogy

$$\mathbf{y}_{i-1} \overset{i}{<} \mathbf{y}_i.$$

$$\text{Mivel } \mathbf{y}_{i-1} \overset{i-1}{\sim} \mathbf{y}_i \text{ és } \varrho(\mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}_i) < \varrho(\mathbf{y}, \mathbf{x}^*) < \delta^*,$$

ezért

$$x_i^* \in \Phi_i(\mathbf{y}_{i-1}),$$

azaz

$$\mathbf{y}_{i-1} \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{y}_i.$$

Hátra van még a monotonitás bizonyítása. A monotonitást definiáló képlet az alábbi volt:

$$F_i(\mathbf{x}) - K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < F_i(\mathbf{y}) - C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Ezt átrendezve

$$[F_i(\mathbf{x}) - F_i(\mathbf{y})] - K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 0.$$

Mivel $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) < \delta^*$, ezért elvégezhető az alábbi becslés:

$$[F_i(\mathbf{y}_{i-1}) - F_i(\mathbf{y}_i)] - K_i(\mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}_i) + C_i(\mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}_i) < \frac{\varepsilon^*}{6} - \frac{\varepsilon^*}{2} + \frac{\varepsilon^*}{6} = -\frac{\varepsilon^*}{6} < 0,$$

ezzel az 1 Lemmát bizonyítottuk.

2. Lemma

Legyenek a Σ_i halmazok korlátosak és zártak, az F_i, C_i függvények folytonosak a K_i függvények az $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ helyeken folytonosak, a Φ_i függvények egyenletesen összefüggőek. Ha $\mathbf{x}^*$ a Σ egy H részhalmazának olyan torlódási pontja, ahol a K_i függvények $\varepsilon(\mathbf{x}^*) > 0$ pontosságúak, akkor az $\mathbf{x}$ torlódási pont tagja egy, a H valamely eleméből kiinduló szigorúan monoton láncnak.

Bizonyítás:

Mivel $\mathbf{x}^*$ torlódási pontja a H-nak, ezért van a H elemeinek egy, az $\mathbf{x}^*$-hoz konvergáló sorozata:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}^*, \quad (\mathbf{x}_n \in H;\ n = 1, 2, \ldots).$$

A feltevésnél fogva a K_i függvényekkel jellemzett korlátozás az $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ helyen $\varepsilon(\mathbf{x}^*) > 0$, ezért teljesülnek az 1 Lemma feltételei. Így létezik olyan δ^*, hogy valahányszor $\varrho(\mathbf{y}, \mathbf{x}^*) < \delta^*$, mindannyiszor az $\mathbf{x}^*$ az $\mathbf{y}$-ból szigorúan monoton lánccal elérhető. Másrészt elég nagy n-re $\varrho(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}^*) < \delta^*$, így $\mathbf{x}_n$-től az $\mathbf{x}^*$ szigorúan monoton lánccal elérhető, amivel a 2. Lemmát bebizonyítottuk.

A fenti két segédtételnek már egyszerű következménye az alábbi tétel:

1. TÉTEL

Legyenek a Σ_i halmazok korlátosak és zártak, az F_i, C_i függvények folytonosak, a K_i függvények az $x \neq y$ helyeken folytonosak és a Φ_i környezetfüggvények egyenletesen összefüggők. Ha a $H_{\leq}$ és $H_{<}$ halmazokon a K_i függvények $\varepsilon(x) > 0$ ($\mathbf{x} \in H_{\leq}$ ill. $H_{<}$) pontosságúak és $H_{<} \cap L \neq \emptyset$ ill. $H_{<} \cap L \neq \emptyset$, akkor $H_{\leq} = H^*_{\leq}$ ill. $H_{<} = H^*_{<}$.

1.6 *Az egyensúlypont létezésének kérdése*

Mielőtt rátérnénk a stabilitási és egyensúlyhalmazok létezésének feltételeire, előbb egy egyensúlypont létezési kritériumot adunk meg. Ennek bizonyítását hasonló gondolatmenettel végezzük, mint ahogy az [6]-ben ill. [2]-ben történik.

2. Tétel: Az $S = \{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n; F_1, \ldots, F_n; \Phi_1, \ldots, \Phi_n; C_1, \ldots, C_n; K_1, \ldots, K_n; L\}$ rendszernek van egyensúlypontja, ha

a) Σ_i korlátos részhalmaza X_i-nek, $i = 1, \ldots, n$.

b) az F_i függvények x_i-ben konkáv függvények, $x_i \in \Sigma_i$, $i = 1, \ldots, n$.

c) az F_i függvények az $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ változó folytonos függvényei, $\mathbf{x} \in \Sigma$, $i = 1, \ldots, n$,

d) az L halmaz konvex, zárt halmaza Σ-nak,

e) $C_i(\mathbf{x};\ \mathbf{y}) - K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ folytonos, nemnegatív függvény és y_i-ben konkáv, $i = 1, \ldots, n$.

Bizonyítás: Legyenek $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$, $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_n]$ egymástól függetlenül változó vektorai L-nek.

Az

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} [F_i(y_1, \ldots, x_i, \ldots, y_n) + C_i(\mathbf{y};\ y_1, \ldots, x_i, \ldots, y_n) - K_i(\mathbf{y};\ y_1, \ldots, x_i, \ldots, y_n)]$$

függvény folytonos az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ változókban és $\mathbf{x}$-ben konkáv.

Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy ha létezik egy $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*) \in L$ úgy, hogy minden $\mathbf{x} \in \Phi(\mathbf{y}^*)$-ra fennáll

$$G(\mathbf{y}^*, \mathbf{y}^*) \geq G(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \tag{1}$$

akkor $\mathbf{y}^*$ egyensúlypontja S-nek. Ekkor ugyanis az előbbi egyenlőtlenség fennáll minden $\bar{\mathbf{y}}^{(i)} = [y_1^*, \ldots, x_i, \ldots y_n^*] \in L$ $(i = 1, \ldots, n)$ vektorra. Felírva az (1) egyenlőtlenséget az $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{y}}^{(i)}$ esetre, adódik

$$F_i(y_1^*, \ldots, y_n^*) \geq F_i(y_1^*, \ldots, x_i, \ldots, y_n^*) + C_i(\mathbf{y}^*;\ y_1^*, \ldots, x_i, \ldots, y_n^*) - K_i(\mathbf{y}^*;\ y_1^*, \ldots, x_i, \ldots, y_n^*)$$

ami az állítást igazolja: $\mathbf{x} \in \Phi(\mathbf{y}^*)$.

A bizonyítás menete ezekután a következő. Meg fogjuk mutatni, hogy ha a fenti (1) egyenlőtlenséget kielégítő $\mathbf{y}^*$ vektor nem létezik, akkor ellentmondásra jutunk a $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ függvény konkavitására tett megállapításunkkal.

Tegyük fel tehát, hogy az említett tulajdonságú $\mathbf{y}^* \in L$ vektor nem létezik, azaz bármely $\mathbf{y} \in L$-hez található olyan $\mathbf{x} \in \Phi(\mathbf{y})$ hogy $G(\mathbf{y}, \mathbf{y}) < G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Tekintsük a következő H_x halmazt

$$H_x = \{\mathbf{y} \in L \mid G(\mathbf{y}, \mathbf{y}) < G(\mathbf{y}, \mathbf{x})\}. \tag{2}$$

Világos, hogy a H_x halmazok befedik L-et, azaz

$$L = \bigcup_{\mathbf{x} \in L} H_x.$$

Minthogy a $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ függvény az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ változókban folytonos, ezért a (2)-ben levő szigorú egyenlőtlenség miatt a H_x halmazok L-nek nyílt halmazai. Alkalmazván a Borel-féle befedési tételt, létezik L-ben véges sok olyan $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(q)}$ vektor, hogy $L = \bigcup_{j=1}^{q} H_{x^{(j)}}$ fennáll.

Tekintsük most az

$$g_j(\mathbf{y}) = \max G(\mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{y}, \mathbf{y});\ 0\},\ j = 1, \ldots, q$$

nem negatív függvényt. Minthogy minden $\mathbf{y}$-hoz létezik olyan $\mathbf{x} \in \Phi(\mathbf{y})$, hogy $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > G(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ ezért minden $\mathbf{y}$-hoz van olyan j $(1 \leq j \leq q)$, hogy $G(\mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{y}) >$ $> G(\mathbf{y}, \mathbf{y})$. Ebből következik, hogy a $g(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{q} g_j(\mathbf{y})$ függvény minden $\mathbf{y} \in L$-re pozitív. Így az

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{g_j(\mathbf{y})}{g(\mathbf{y})} \mathbf{x}^{(j)}$$

összeg minden $\mathbf{y}$-ra az $\mathbf{x}^{(j)}$ vektorok egy konvex lineáris kombinációja és ezért L-nek eleme.

A $g_j(\mathbf{y})$ és $g(\mathbf{y})$ függvények nyilván folytonos függvények, azért az

$$\mathbf{y} \to \sum_{j=1}^{q} \frac{g_j(\mathbf{y})}{g(\mathbf{y})} \mathbf{x}^{(j)}$$

leképezés $(\mathbf{y} \in L)$ az L konvex korlátos zárt halmaz önmagába való folytonos leképezése.

A Brouwer-féle fixponttétel szerint van olyan $\overline{\mathbf{y}} \in L$, hogy

$$\overline{\mathbf{y}} = \sum_{j=1}^{q} \frac{g_j(\overline{\mathbf{y}})}{g(\overline{\mathbf{y}})} \mathbf{x}^{(j)}.$$

Minthogy $G(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{y}})$ konkáv $\mathbf{x}$-ben, ezért

$$G(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}) \geq \sum_{j=1}^{q} \frac{g_j(\overline{\mathbf{y}})}{g(\overline{\mathbf{y}})} G(\mathbf{x}^{(j)}, \overline{}). \tag{3}$$

Ez az egyenlőtlenség azonban nem állhat fenn, ugyanis

1. $\overline{\mathbf{y}}$-hoz van legalább egy $\mathbf{x}^{(j)}$, amelyre

$$G(\mathbf{x}^{(j)}, \overline{\mathbf{y}}) > G(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}})$$

2. ha valamely $\overline{\mathbf{y}}$-hoz $G(\mathbf{x}^{(j)}, \overline{\mathbf{y}}) < G(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}})$ akkor $g_j(\overline{\mathbf{y}}) = 0$.

Ebből a két tulajdonságból pedig az

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{g_j(\overline{\mathbf{y}})}{g(\overline{\mathbf{y}})} G(\mathbf{x}^{(j)}, \overline{\mathbf{y}}) > \sum_{j=1}^{q} \frac{g_j(\overline{\mathbf{y}})}{g(\overline{\mathbf{y}})} G(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}}) = G(\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{y}})$$

egyenlőtlenség adódik, ami ellentmond (3)-nak. Ezzel a tételt igazoltuk.

1.7 *Stabilitási halmazok egzisztenciájának a kérdése*

Természetes ezek után felvetni azt a kérdést, hogy milyen feltételek mellett létezik az S rendszernek stabilitási illetve szigorú stabilitási halmaza.

Mielőtt az egzisztencia kérdésével foglalkoznánk, megjegyezzük, hogy a stabilitási halmaz és a szigorú stabilitási halmaz létezésének a kérdése nem egyformán lényeges. Tekintettel arra, hogy mindig gondolnunk kell elgondolásaink numerikus realizációjára is, a szigorú stabilitási halmazok sokkal fontosabb szerephez jutnak. Ez, bizonyos gyakorlati meggondolásokon túlmenően főleg annak a következménye, hogy a numerikus realizációk során, a probléma jellegéből következően csak számítógépes megoldásokra számíthatunk (főleg szimulációs módszerekre). Figyelembe véve a probléma jellegét, természetszerűen a valós típusú aritmetika (lebegőpontos aritmetika) jöhet szóba, márpedig lebegőpontos aritmetikával számolva az egyenlőség (a szigorú ,matematikai értelemben vett egyenlőség) eldöntése lehetetlen.

Ezért elsősorban a szigorú stabilitási halmazok létezésének a kérdését vizsgáljuk.

Mielőtt kimondanánk néhány segédtételt, bevezetünk egy definíciót:

Legyen $\mathbf{x} \overset{i}{\leq} \mathbf{y}$, és

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$
$$\mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Ha az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ párhoz és az i indexhez létezik olyan valós változós

$$t \to x(t) \ (t \in [\alpha, \beta], \ x(t) \in \Sigma_i)$$

függvény, hogy $x(\alpha) = x_i$, $x(\beta) = y_i$ és valahányszor $\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$, mindannyiszor

$$\mathbf{x}(t_1) \overset{i}{\leq} \mathbf{x}(t_2),$$

ahol

$$\mathbf{x}(t_1) = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x(t_1), x_{i+1}, \ldots, x_n)$$
$$\mathbf{x}(t_2) = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x(t_2), x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

akkor azt mondjuk, hogy *az* $\mathbf{y}$ *az* $\mathbf{x}$*-ből folytonos javítással elérhető.*

Hasonlóan, ha $\mathbf{x} \overset{i}{<} \mathbf{y}$ és

$$\mathbf{x}(t_1) \overset{i}{<} \mathbf{x}(t_2),$$

akkor azt mondjuk, hogy *az* $\mathbf{y}$ *az* $\mathbf{x}$*-ből folytonos szigorú javítással elérhető.*

Ezek után bebizonyítjuk a következő segédtételt:

3. Lemma:

Legyenek a Σ_i halmazok korlátosak és zártak, az F_i, C_i, K_i függvények folytonosak, a Φ_i függvények egyenletesen összefüggőek.

Ha minden $\mathbf{x} \in \Sigma$-ra annak bármely javítása egyben $\mathbf{x}$-nek folytonos szigorú javítása is, akkor a $[\tau_<(\mathbf{x})]$ halmaz zárt abban az értelemben, hogy minden $\mathbf{y} \in$ $\in [\tau_<(\mathbf{x})]$-re $\tau_<(\mathbf{y}) \subseteq [\tau_<(\mathbf{x})]$.

Bizonyítás:

Legyen $\mathbf{x}^* \in [\tau_<(\mathbf{x})]$. Ha $\mathbf{x}^* \in \tau_<(\mathbf{x})$, akkor az állítás nyilvánvaló. Legyen tehát $\mathbf{x}^*$ a $\tau_<(\mathbf{x})$ egy olyan határpontja, amelyik nem tartozik a $\tau_<(\mathbf{x})$-hez.

Azt kell megmutatnunk, hogy

$$\tau_<(\mathbf{x}^*) \subseteq [\tau_<(\mathbf{x})].$$

Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy van olyan

$$\mathbf{y}^* \in \tau_<(\mathbf{x}^*), \text{ hogy } \mathbf{y}^* \notin [\tau_<(\mathbf{x})].$$

Az $\mathbf{y}^*$ tehát az $\mathbf{x}^*$-ból szigorúan monoton lánccal elérhető. Legyen mindjárt az $\mathbf{y}^*$ a lánc első olyan eleme, amelyik nem tartozik $[\tau_<(\mathbf{x})]$-be. Legyen továbbá

$$\mathbf{x}^* \overset{i_1}{<} \mathbf{y}_1 \overset{i_2}{<} \mathbf{y}_2 \overset{i_3}{<} \dots \overset{i_k}{<} \mathbf{y}_k \overset{i_*}{<} \mathbf{y}^*.$$

Mivel $\mathbf{y}^* \notin [\tau_<(\mathbf{x})]$, ezért $\mathbf{y}_i \notin \tau_<(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, k$, másrészt mivel $\mathbf{y}^*$ a lánc első olyan eleme, amelyik nem tartozik $[\tau_<(\mathbf{x})]$-be, így az $\mathbf{y}_i$ pontok ugyancsak határpontjai a $[\tau_<(\mathbf{x})]$-nek, $(i = 1, 2, \dots, k)$.

Legyen az egyszerűség kedvéért $\mathbf{y} = \mathbf{y}_k$. Kaptuk tehát, hogy a $\tau_<(x)$-nek van olyan $\mathbf{y}$ határpontja, ahonnan kilépve egy $\mathbf{y}^*$ javításra már kikerülünk a $[\tau_<(x)]$-ből.

Azt fogjuk megmutatni, hogy egyben olyan határpont is létezik, amiből tetszőlegesen közeli olyan javítás is elérhető, amely nem tartozik $[\tau_<(\mathbf{x})]$-hez:

Induljunk ki az $\mathbf{y}$ és $\mathbf{y}^*$ pontokból. A korábbiak szerint $\mathbf{y} \overset{i_*}{<} \mathbf{y}^*$. Ezért a feltételek szerint létezik olyan

$$t \to y_{i^*}(t) \ (t \in [\alpha, \beta];\ y_{i^*}(t) \in \Sigma_i)$$

folytonos függvény, hogy $\mathbf{y}(\alpha) = \mathbf{y}$, $\mathbf{y}(\beta) = \mathbf{y}^*$ és valahányszor $\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$, mindannyiszor

$$\mathbf{y}(t_1) \overset{i}{<} \mathbf{y}(t_2).$$

A definíció szerint

$$\mathbf{y}(\alpha) = \mathbf{y} \in [\tau_<(\mathbf{x})]$$
$$\mathbf{y}(\beta) = \mathbf{y}^* \notin [\tau_<(x)].$$

Legyen

$$t^* = \sup\{t : t \in [\alpha, \beta]\ \&\ \mathbf{y}(t) \in [\tau_<(\mathbf{x})\}.$$

Mivel a $[\tau_<(x)]$ zárt halmaz, ezért $\mathbf{y}(t^*) \in [\tau_<(\mathbf{x})]$. Másrészt szükségképpen $\mathbf{y}(t^*)$ határpontja $\tau_<(\mathbf{x})$-nek, továbbá bármely pozitív δ^*-hoz van olyan pozitív δ, hogy valahányszor $t > t^*$ és $t - t^* < \delta$, mindannyiszor

$$\varrho(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t^*)) < \delta^* \text{ és}$$
$$\mathbf{y}(t) \notin [\tau_<(\mathbf{x})].$$

A feltevés szerint a Φ_i függvények egyenletesen összefüggőek, azaz létezik olyan pozitív δ_1, hogy valahányszor $\mathbf{x} \overset{i}{\to} \mathbf{y}$ és $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta_1$, mindannyiszor

$$y_i \in \Phi_i(\mathbf{x}),\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

A korábbiak szerint van a $\tau_<(\mathbf{x})$-nek olyan $\mathbf{z}$ határpontja, melyhez van olyan $\mathbf{z}^*$, hogy $\mathbf{z} \overset{i}{<} \mathbf{z}^*$ és $\mathbf{z}^* \notin [\tau_<(\mathbf{x})]$, továbbá $\varrho(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) < \dfrac{\delta_1}{2}$. Mivel $\mathbf{z}$ határpontja a $\tau_<(\mathbf{x})$-nek, ezért van a $\tau_<(\mathbf{x})$ elemeinek egy $\mathbf{z}$-hez tartó $\{\mathbf{z}^{(m)}\}$ sorozata.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \dots, z_n)$$
$$\mathbf{z}^* = (z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, z_i^*, z_{i+1}, \dots, z_n)$$
$$\mathbf{z}^{(m)} = (z_1^{(m)}, z_2^{(m)}, \dots, z_{i-1}^{(m)}, z_i^{(m)}, z_{i+1}^{(m)}, \dots, z_n^{(m)})$$
$$\mathbf{z}^{*(m)} = (z_1^{(m)}, z_2^{(m)}, \dots, z_{i-1}^{(m)}, z_i^*, z_{i+1}^{(m)}, \dots, z_n^{(m)}).$$

Világos, hogy $\lim_{m\to\infty} \mathbf{z}^{*(m)} = \mathbf{z}^*$. Végezzük el a következő becslést, elég nagy m-re

$$\varrho(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)}) = \varrho(z_i^{(m)}, z_i^*) \leqq \varrho(z_i^{(m)}, z_i) + \varrho(z_i, z_i^*) < \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2} = \delta_1.$$

Tehát minden elég nagy m-re

$$\varrho(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)}) < \delta_1.$$

Másrészt, mivel minden m-re

$$\mathbf{z}^{(m)} \overset{i}{\sim} \mathbf{z}^{*(m)} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

így a fentiek szerint, kihasználva a Φ_i-k egyenletes összefüggését, kapjuk hogy minden elegendően nagy m-re

$$\mathbf{z}^{(m)} \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{z}^{*(m)}.$$

Ezek után meg fogjuk mutatni, hogy egyben minden elég nagy m-re

$$\mathbf{z}^{(m)} \overset{i}{<} \mathbf{z}^{*(m)}.$$

A korábbiak szerint

$$\mathbf{z} \overset{i}{<} \mathbf{z}^*.$$

Legyen

$$F_i(\mathbf{z}^*) - C_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) - [F_i(\mathbf{z}^*) - K_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)] = \delta_2 > 0.$$

A feltevés szerint az F_i, C_i, K_i függvények folytonosak, így minden elegendően nagy m-re

$$| F_i(\mathbf{z}^{*(m)}) - F_i(\mathbf{z}^*) | < \frac{\delta_2}{5} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$| C_i(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)}) - C_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) | < \frac{\delta_2}{5} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$| F_i(\mathbf{z}^{(m)}) - F_i(\mathbf{z}) | < \frac{\delta_2}{5} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$| K_i(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)}) - K_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) | < \frac{\delta_2}{5} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ezek után minden elég nagy m-re elvégezhető az alábbi becslés:

$$\begin{aligned}
F_i(\mathbf{z}^{*(m)}) &- C_i(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)}) - [F_i(\mathbf{z}^{(m)}) - K_i(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)})] = \\
&= F_i(\mathbf{z}^{*(m)}) - C_i(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)}) - [F_i(\mathbf{z}^*) - C_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)] + \\
&+ \{[F_i(\mathbf{z}^*) - C_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)] - [F_i(\mathbf{z}) - K_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)]\} + \\
&+ [F_i(\mathbf{z}) - K_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)] - [F_i(\mathbf{z}^{(m)}) - K_i(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)})] = \\
&= [F_i(\mathbf{z}^{*(m)}) - F_i(\mathbf{z}^*)] - [C_i(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)}) - C_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)] + \\
&+ \{[F_i(\mathbf{z}^*) - C_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)] - [F_i(\mathbf{z}) - K_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)]\} + \\
&+ [F_i(\mathbf{z}) - F_i(\mathbf{z}^{(m)})] - [K_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) - K_i(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)})] > \\
&> -\frac{4\delta_2}{5} + \delta_2 = \frac{\delta_2}{5} > 0.
\end{aligned}$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy minden elég nagy m-re

$$\mathbf{z}^{(m)} \overset{i}{<} \mathbf{z}^{*(m)}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy minden elég nagy m-re

$$\mathbf{z}^{*(m)} \in \tau_{<}(\mathbf{z}^{(m)}) \subseteq \tau_{<}(\mathbf{x}) \subseteq [\tau_{<}(\mathbf{x})].$$

Mivel $[\tau_{<}(\mathbf{x})]$ zárt halmaz, így

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{z}^{*(m)} = \mathbf{z}^* \in [\tau_{<}(\mathbf{x})],$$

ami ellentmondás. Ellentmondásra jutván a Lemmát bizonyítottuk.

Megjegyzés:

A bizonyításból kitűnik, hogy a $C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ és $K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ függvényekről elegendő a folytonosságot csak az $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ pontokban megkövetelni.

A 3. Lemma segítségével a szigorú stabilitási halmazokra egy egzisztenciatételt bizonyítunk be.

3. TÉTEL

Legyenek a Σ_i halmazok korlátosak és zártak, az $F_i(\mathbf{x})$, $C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ függvények folytonosak ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$), a Φ_i függvények egyenletesen összefüggőek. Ha minden $\mathbf{x} \in \Sigma$-ra annak bármely javítása egyben $\mathbf{x}$-nek folytonos szigorú javítása, akkor létezik az S rendszernek szigorú stabilitási halmaza.

Bizonyítás:

Legyen $\mathbf{x}$ egy tetszőleges eleme a Σ halmaznak. A 3. Lemma szerint a $[\tau_{<}(\mathbf{x})]$ halmaz „zárt a továbblépésre”.

Megmutatjuk, hogy a $[\tau_{<}(\mathbf{x})]$ részhalmazai között szükségképpen van szigorú stabilitási halmaz. Ha maga a $[\tau_{<}(\mathbf{x})]$ nem stabilitási halmaz, akkor van olyan $\mathbf{x}_1 \in [\tau_{<}(\mathbf{x})]$, hogy

$$[\tau_{<}(\mathbf{x}_1)] \subset [\tau_{<}(\mathbf{x})].$$

Ha a $[\tau_{<}(\mathbf{x}_1)]$ nem szigorú stabilitási halmaz, akkor van olyan $\mathbf{x}_2 \in [\tau_{<}(\mathbf{x}_1)]$, hogy

$$[\tau_{<}(\mathbf{x}_2)] \subset [\tau_{<}(\mathbf{x}_1)].$$

Ha véges lépésben nem jutunk el ilyen módon egy szigorú stabilitási halmazhoz, akkor korlátos, zárt halmazoknak egy szigorúan fogyó

$$[\tau_{<}(\mathbf{x})] \supset [\tau_{<}(\mathbf{x}_1)] \supset [\tau_{<}(\mathbf{x}_2)] \supset \ldots$$

sorozatához jutunk.

Amennyiben ezek közös része (Cantor tétele) nem szigorú stabilitási halmaz, akkor innen kezdve újra megismételjük az eljárásunkat, az így kapott

$$[\tau_{<}(\mathbf{x})] \supset [\tau_{<}(\mathbf{x}_1)] \supset \ldots \supset [\tau_{<}(\mathbf{x}_1)] \supset [\tau_{<}(\mathbf{x}_2')] \supset \ldots$$

láncra alkalmazva a Baire—Hausdorf-féle tételt,[3] kapjuk hogy egy α indextől kezdve

$$[\tau_<(x_\alpha)] = [\tau_<(x_{\alpha+1})] = \ldots,$$

ami ellentmondás.

Ellentmondásra jutván a tételünket bizonyítottuk.

1.8 *Egyensúlyhalmazok létezésének a kérdése*

Ezek után már megfogalmazhatunk a szigorú egyensúlyhalmaz létezésére is egy elégséges feltételt:

4. TÉTEL

Legyenek a Σ_i halmazok korlátosak és zártak, az F_i, C_i függvények folytonosak, a K_i függvények az $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ helyek kivételével folytonosak, és legyenek a Φ_i környezetfüggvények egyenletesen összefüggőek. Legyenek továbbá a K_i függvények a Σ halmazon $\varepsilon(\mathbf{x}) > 0$ $(\mathbf{x} \in \Sigma)$ pontosságúak. Ha minden $\mathbf{x} \in \Sigma$ elem esetén annak minden javítása egyben $\mathbf{x}$-nek folytonos szigorú javítása, akkor létezik az S rendszernek szigorú egyensúlyhalmaza.

A tétel az 1. TÉTEL és a 3. TÉTEL közvetlen következménye.

(Beérkezett: 1973. június 28.)

IRODALOM

1. ARROW, K. J.—DEBREU, G.: Existence of an equilibrium for a competitive economy. Econometrica, 22 (1954)
2. BURGER, E.: Einführung in die Theorie der Spiele. Berlin, 1959.
3. GALE, D.: The law of supply and demand. Math. Scand. 3, 155—169 (1955).
4. MCKENZIE, L.: On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems. Econometrica 22 (1954).
5. NIKAIDO, H.: On the classical multilateral exchange problem. Metroeconomica 8 (1956), 9 (1957).
6. NIKAIDO, H.—ISODA, K.: Note on noncooperative convex games. Pacific J. Math. 5, 807—815, (1955)
7. SZÉP, J.: On foundations of game theory, DM 70—3. Közgazdasági Egyetem.
8. ALEKSZANDROV, P. Sz.: Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe. Budapest, 1952. Akadémiai Kiadó.

EQUILIBRIUM SYSTEM I.

In this work we start a series of articles which deals with the structure of systems, detailed as follows and from which the basic problems and results of the classical game theory issue as a special case. In the following by system we mean an organic system and out of its characteristics we stress — in a qualitative shaping — the following ones:

[3] A Baire—Hausdorf-féle tételt l. pl. [8].

Static characteristics:

(1) It consits of finite number, well distinguishable parts (organs). (2) The state of each organ depends on the other ones. (3) Each organ can exist only in well defined states. (4) There are criteria for the organ and consequently for the system on the basis of which it can decide on its change of state.

Dynamic characteristics:

(1) The state of each organ — and so that of the system — changes in time. (2) The set of the feasible states of the organs changes in time. (3) The number of the organs may change in time.

It is expedient to discern two kinds of a system: (a) an autonomous system where the states of the organs depend on the state of the other organs alone and (b) a non-autonomous one where the states of the organs depend on factors beyond the system as well.

By an organic system we mean first of all an economic one though we take no notice — at least for the time being — of its features beyond its general characteristics, described above.

We prove existence theorems for state-sets of equilibrium in the most simple case when only one organ changes its state at a time.

РАВНОВЕСНЫЕ СИСТЕМЫ

В этой работе мы начинаем серию статей, которая занимается структурой систем, описанных в дальнейшем и из которой основные проблемы и результаты классической теории игры получаются, как специальный случай. В следующем под системой мы подразумеваем органическую систему, из характеристик которой — в квалитативной формулировке — мы подчеркиваем следующие:

Статические характеристики:

(1) Система состоит из конечных, хорошо отличимых частей (органов). (2) Состояние каждого органа зависит от других. (3) Каждый орган может существовать только в хорошо определенных состояниях. (4) Существуют критерии для органа и следовательно для системы, на основе которых она может решать об изменении своего состояния.

Динамические характеристики:

(1) Изменение состояния каждого органа — и так самой системы — происходит во времени. (2) Множество возможных состояний органов изменяется во времени. (3) Число органов может изменяться во времени. Целесообразно различать две разные системы: (а) автономную систему, где состояния органов зависят лишь от состояния других органов и (в) неавтономную систему, где состояния органов зависит и от факторов вне системы.

Под органической системой в первую очередь мы подразумеваем экономическую систему, хотя мы оставляем без внимания — по крайней мере временно — ее свойства, кроме ее вышеуказанных общих характеристик. Здесь мы доказываем теоремы существования для множеств равновесных состояний в том простейшем случае, когда одновременно всегда только один орган изменяет свое состояние.