SIMONOVITS ANDRÁS

A Leontief-inverz alá- illetve fölébecslésének egyik okáról

1. Quant [3] dolgozata talán az egyetlen, amely „a valószinűségi hibák Leontief-rendszerben" betöltött szerepét vizsgálta.

Ismert, hogy az ágazati kapcsolatok mérlegében szereplő *közvetlen ráfordítások* A mátrixa $n \times n$-es nem negatív, irreducibilis és 1-nél kisebb spektrál-sugarú mátrix. (Egy mátrix spektrál-sugara maximális abszolút értékű saját-értékének abszolút értéke.) A *teljes ráfordítások* Q mátrixát a következő összefüggés határozza meg:

$$Q = (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \tag{1}$$

A irreducibilitása miatt Q minden eleme pozitív. A gyakorlatban A mátrix α_{ij} elemei időben ingadoznak és értéküket pontatlanul ismerjük. Ezért ésszerű feltenni, hogy α_{ij} elemek *valószinűségi változók*. A gyakorlatban α_{ij}-t *várható értékével*, $\mathbf{M}\alpha_{ij}$-vel becsüljük, s Q-t nem várható értékével, hanem (1) determinisztikus változatával, $(I - \mathbf{M}A)^{-1}$-gyel becsüljük. Bródy azt kérdezte, melyik mátrix a nagyobb.[1] Bródy figyelmeztette a hallgatóságot, hogy a válasz függhet az együtthatók együttes eloszlásától!

Bródyt követve [1, 238–239. és 243–245.o.] két eloszlás típusra koncentrálunk, amelyek eleve érdekesek, fontosak lehetnek, bár egymásnak ellentmondanak.

I. típus: A véletlen együtthatók *teljesen függetlenek*.

II. típus: A *sor- és az oszlopösszegek állandóak*. Legegyszerűbb eset az un. *hiba-négyszög:* legyenek i, j, g, h természetes számok, ahol $i < g$ és $j < h$. Tegyük föl, hogy $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^0 + \varepsilon$, $\alpha_{ih} = \alpha_{ih}^0 - \varepsilon$, $\alpha_{gh} = \alpha_{gh}^0 + \varepsilon$ és $\alpha_{gj}^0 = \alpha_{gj}^0 - \varepsilon$, ahol $\alpha_{kl}^0 = E\,\alpha_{kl}$ és a többi együttható rögzitett. Föjtesszük, hogy ε valószinűségi változó eloszlása *szimmetrikus*. $A(\varepsilon) = A(\varepsilon, i, j, g, h)$ jelöli a hibanégyszöggel terhelt mátrixot.

A következő két tételt bizonyítjuk be:

I. Tétel: Legyenek A mátrix elemei nem-negatív, teljesen független valószínűségi változók. Tegyük föl, hogy A mátrix minden realizációja (véletlentől függő konkrét értéke) irreducibilis és spektrál-sugara kisebb mint 1. Ekkor létezik $(I - \mathbf{M}A)^{-1}$, amely pozitív (elemű); $\mathbf{M}(I - A)^{-1}$ elemei pozitív valós számok vagy $+\infty$-ek; és teljesül

$$\mathbf{M}(I - A)^{-1} \geqq (I - \mathbf{M}A)^{-1}. \tag{2}$$

[1] A teljes ráfordítások *elméleti* becslése $\mathbf{M}(I - A)^{-1}$ vagy *gyakorlati* becslése: $(I - \mathbf{M}A)^{-1}$? A várható érték operátora ($\mathbf{M}$) mindig a mögötte álló egész kifejezésre vonatkozik Pl. itt az inverz várható értékét jelzi, s nem a várható érték inverzét.

Ha van olyan determinisztikus B mátrix, amely A mátrix minden értékénél nagyobb, akkor A spektrál-sugarára vonatkozó feltétel teljesül $(\sigma(A) < 1)$ $\mathbf{M}Q$ elemei végesek és a következő felső becslés vonatkozik Q-ra:

$$Q < (I - B)^{-1}.$$

Megjegyzések: $n = 1$ esetben a tétel állítása a jólismert Jensen-egyenlőtlenség következménye. A Jensen-egyenlőtlenség szerint, ha α valós értékű valószínűségi változó véges várható értékkel és olyan értékkészlettel, amelyet tartalmaz $f(t)$ konvex függvény értelmezési tartományának intervalluma; akkor $\mathbf{M}f(x) \geq f(\mathbf{M}(x)$. Ha $f(t)$ szigorúan konvex, akkor a két oldal egyenlősége ekvivalens azzal, hogy α egyetlen értéket vesz föl. $(1 - t)^{-1}$ pedig szigorúan konvex függvény a $(0,1)$ nyílt intervallumban.

$\mathbf{M}f(\alpha)$ lehet végtelen is: Legyen α egyenletes eloszlású a $(0,1)$-en; ekkor $\mathbf{M}(1 - \alpha)^{-1} = \infty$.

II. Tétel: Tetszőleges (i, j, g, h) hiba-négyszög esetén

$$sgn\, \mathbf{M}(I - A)^{-1} - (I - \mathbf{M}\, A)^{-1}_{kl} = sgn\, (q^0_{ki} - q^0_{hh})(q^0_{jl} - q^0_{gl})\, (q^0_{ij} - q^0_{ih} + q^0_{gh} - q^0_{gj}) \tag{3}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n$$

ahol $sgn x$ x valós szám előjel-függvénye és $Q^0 = (I - \mathbf{M}\, A)^{-1}$.

Néhány szót a bevezetett eloszlástípusok mellett és ellen:

Egymástól távoleső ágazat-párokhoz tartozó együtthatók objektív ingadozása tényleg független lehet (pl. a bányászat energia-felhasználása és a textilipar munkaerő igénye). Ha minden mutatót egymástól független szakértők egymástól függetlenül becsülnek, szintén helyes az I. feltevés.

Másrészt, ha pl. a ráfordítási együtthatókat érték/érték mértékegységben mérjük, akkor a j. oszlopösszeg azt mutatja meg, hogy a j. ágazat 1 Ft értékű termékében hány Ft népgazdasági közvetlen ráfordítás testesül meg. Gyakorlatban ezt az összeget sokkal jobban ismerjük, mint egyes tagjait. Hasonló a helyzet a sorösszegekkel, bár itt közvetlen értelmezés nem adható.

Összegezve: Az I. Tétel teljesen független ráfordítási együtthatók esetén tetszőleges eloszlás és tetszőleges szektor-szám esetén bizonyítja Bródy sejtését az alábecslésről. Ugyanakkor elég speciális modellen, de még nem számpéldán ábrázoltuk a felülbecslés esetét is. Itt a ráfordítási együtthatók között azonos és ellentétes irányú lineáris kapcsolat volt. A valóságban mindkét feltevés csak gyengítve, egymás ellen küzdve érvényesül.

2. Az I. Tétel bizonyítása során felhasználjuk a következő jól ismert egyenlőtlenséget: Legyen α nem negatív valószínűségi változó, véges k-adik momentummal. Ekkor teljesül

$$\mathbf{M}\,\alpha^k \geq (\mathbf{M}\,\alpha)^k \tag{4}$$

és egyenlőség csak $k = 1$ ill. determinisztikus α esetén teljesül. A bizonyítás a Jensen-egyenlőtlenségen és t^k szigorú konvexitásán alapszik, $k > 1$.

Ha (4)-et általánosítjuk nem negatív mátrixokra, akkor (1) értelmében a (2) egyenlőtlenséget is igazoljuk. Ezt szolgálja az alábbi

LEMMA: Legyen A nem-negatív elemű mátrix, ahol az elemek teljesen független valószínűségi változók. Ekkor teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\mathbf{M}\,A^k \geq (\mathbf{M}\,A)^k. \tag{5}$$

Ha minden (i, j)-re és minden realizációra teljesül $\alpha_{ij} < b_{ij}$, akkor igaz

$$A^k < B^k. \tag{6}$$

A Lemma bizonyítása: Legyen i és j tetszőleges 1 és n közötti természetes szám, s jelölje A^k (i, j) elemét $\alpha_{ij}^{(k)}$. A mátrix-szorzás ismételt alkalmazásával adódik a következő algebrai összefüggés:

$$\alpha_{ij}^{(k)} = \Sigma\{\prod_{s=1}^{k} \alpha_{h_r h_{r+1}},\ h_1 = i,\ h_{k+1} = j \text{ és } 1 \leq h_r \leq n,\ r = 1, 2, \ldots, k.\} \tag{7}$$

(Például $k = 2$ esetén $\alpha_{ij}^{(2)} = \sum_{h=1}^{n} \alpha_{ih}\alpha_{hj}$.)

Rögzítsünk egy ilyen index-sort, azaz egy k-tényezős szorzatot. Szükségünk lesz a szorzat várható értékére. Mivel egyes elemek többször is szerepelhetnek egy szorzatban, nem igaz, hogy a szorzat várható értéke a tényezők várható értékének a szorzata (ami csak teljesen független tényezők esetén igaz). Nekünk viszont elég lesz az is, hogy esetünkben a szorzat várható értéke *nem kisebb* a várható értékek szorzatánál.

Legyen $m(p, r)$ az α_{pr} elem előfordulási száma kiszemelt k-tényezős szorzatunkban. Nyilván szorzatunk felírható $\prod_{p=1}^{n} \prod_{r=1}^{n} \alpha_{pr}^{m(p,r)}$ alakban. Most n^2 tényezős szorzatunk van, ahol a tényezők a megfelelő elemek $m(p, r)$-edik hatványai, s ezek továbbra is teljesen függetlenek. Ezért rájuk teljesül

$$\mathbf{M} \prod_{p=1}^{n} \prod_{r=1}^{n} \alpha_{pr}^{m(p,r)} = \prod_{p=1}^{n} \prod_{r=1}^{n} \mathbf{M}\, \alpha_{pr}^{m(p,r)}. \tag{8}$$

Mivel az elemek nem negatívak, várható értékük sem negatív. Ezért (4) felhasználásával a következő összefüggéshez jutunk:

$$\prod_{p=1}^{n} \prod_{r=1}^{n} \mathbf{M}\, \alpha_{pr}^{m(p,r)} \geq \prod_{p=1}^{n} \prod_{r=1}^{n} \mathbf{M}\, \alpha_{pr}^{m(p,r)}. \tag{9}$$

(9)-ben pontosan akkor teljesül egyenlőség, ha *vagy* van olyan (p, r), hogy $m(p, r) > 0$ és $\mathbf{M}\, \alpha_{pr} = 0$ (ami $\alpha_{pr} \geq 0$ miatt $\alpha_{pr} = 0$-val egyenértékű); *vagy* minden olyan (p, r)-re, ahol $m(p, r) > 1$, ott α_{pr} determinisztikus.

Visszatérve eredeti jelöléseinkhez, (8) és (9) szerint igaz

$$\mathbf{M} \prod_{s=1}^{k} \alpha_{h_s h_{s+1}} \geq \prod_{s=1}^{k} \mathbf{M}\, \alpha_{h_s h_{s+1}}. \tag{10}$$

Összegezve a (10) egyenlőtlenség bal- ill. jobboldalán álló tagokat az összes $\{h_s\}$ sorozatra, (7) értelmében (5)-öt kapjuk.

Könnyen belátható (7) és (8) felhasználásával, hogy

$$\mathbf{M}\alpha_{ii}^{(2)} = (\mathbf{M}A)_{ii}^2 + \mathbf{D}^2\alpha_{ii} \text{ és } \mathbf{M}\alpha_{ij}^{(2)} = (\mathbf{M}A)_{ij}^2, \text{ ha } i \neq j. \tag{11}$$

$$\mathbf{M}\alpha_{ii}^{(3)} \geq (\mathbf{M}A)_{ii}^3 \text{ és } \mathbf{M}\alpha_{ij}^{(3)} = (\mathbf{M}A)_{ij}^3 + \mathbf{M}\alpha_{ij}(\mathbf{D}^2\alpha_{ii} + \mathbf{D}^2\alpha_{jj}) \text{ ahol } i \neq j. \tag{12}$$

Pozitív mátrixokra könnyen belátható, hogy ha egyik diagonális elem sem determinisztikus, akkor (5) szigorú egyenlőtlenség minden elemre és minden $k > 2$-re. Ha csak egy diagonális elem nem determinisztikus, akkor (5) szigorú egyenlőtlenség $k > 3$-ra. Ha egy fődiagonálison kívüli elem sztochasztikussága biztosított, akkor (5) szigorú egyenlőtlenség $k > 4$-re.

Közgazdaságtanban nem-negatív mátrixokra teljesül a következő pozitivitási feltétel: van olyan m természetes szám, hogy $A^m > 0$. Ekkor igazolható, hogy ha minden változó sztochasztikus, akkor (5) éles $k > m + 1$-re, stb.

A most következő részben alsó becslést adunk módszerünk hibájára, azaz (2) jobb- és baloldalának különbségére. (1) szerint (2) ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{M} A^k \geq \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{M}A)^k. \tag{13}$$

Először igazoljuk, hogy (13) jobboldala véges, vagy ami ezzel ekvivalens, $\mathbf{M}A$ spektrál-sugara kisebb mint 1. Legyen $\bar{A}$ olyan realizációja A-nak, hogy $\mathbf{M}A \leq \bar{A}$. (Ilyen realizáció létezik, mert α_{ij}-k függetlensége miatt elemenként külön kiválaszthatók a várható értéknél nem kisebb realizációk.) Egyenlőtlenségünkből következik a megfelelő spektrál-sugarak közötti egyenlőtlenség: $\sigma(\mathbf{M}A) \leq \sigma(\bar{A}) < 1$, hiszen ez utóbbi egyenlőtlenség A minden realizációjára igaz.

Ezért (13) átrendezhető a következő alakban:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{M}A^k - (\mathbf{M}A)^k] \geq 0. \tag{14}$$

A baloldalon álló kifejezés a mechanikus módszer hibája. Lemmánk értelmében (14) minden tagja nem-negatív [lásd (5)], így a $C = (c_{ij})$ hibamátrixot alulbecsüljük, ha véges sok tagot veszünk csak figyelembe. Mi megelégszünk az első négy taggal: $0 \leq k \leq 3$. Ekkor (11) és (12) szerint igaz, hogy

$$c_{ii} \geq \mathbf{D}^2 \alpha_{ii} \text{ és } c_{ij} \geq \mathbf{M}\alpha_{ij}(\mathbf{D}^2 \alpha_{ii} + \mathbf{D}^2 \alpha_{jj}),\ i \neq j. \tag{15}$$

4. Befejezésül kimondjuk az I. Tétel következő általánosítását:

III. Tétel: Legyen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k$ analitikus függvény konvergencia-sugara $\varrho(>0)$ és legyen minden u_k nem-negatív. Az A mátrix elemei legyenek teljesen független, nem-negatív értékű valószínűségi változók, valamint teljesüljön $\sigma(A) < \varrho$ minden realizációra. Ekkor az $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k A^k$ mátrixértékű valószínűségi változó értelmezhető és teljesül rá a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbf{M}f(A) \geq f(\mathbf{M}A).$$

Továbbá, ha létezik olyan B determinisztikus mátrix, hogy A minden realizációjára teljesül $A \leq B$, másrészt $\sigma(B) < \varrho$, akkor $\sigma(A) \leq \sigma(B)$ és $f(A) \leq f(B)$ fennáll minden realizációra.

5. *Rátérünk a II. Tétel bizonyítására*

A dolgozat második felében a függetlenség feltevése helyett a másik végletet, a hiba-négyszög esetét vizsgáljuk. A hiba valószínűségi változó szimmetrikus eloszlású, ezért minden $A(\varepsilon)$ realizációhoz tartozik egy $A(-\varepsilon)$ realizáció. Rögzítsük először a hiba abszolút értékét ($(e = |\varepsilon|)$ és vizsgáljuk az elméleti és a gyakorlati érték különbségét, mint a következő *szimmetrikus differenciát:*

$$(17) \qquad C(e) = \frac{1}{2}[I - A(e)]^{-1} + \frac{1}{2}[I - A(-e)]^{-1} - [I - A(o)]^{-1}.$$

Szükségünk lesz a lineáris programozás szimplex módszerénél használt inverziós formulára. Legyen B egy reguláris mátrix, u oszlop- és v' sorvektor, uv' pedig az u és v' által alkotott *diád*-mátrix. Ekkor

$$(18) \qquad (B + uv')^{-1} = B^{-1} - \frac{B^{-1}uv'\,B^{-1}}{1 + u'\,Bv}.$$

Esetünkben $u' = [0, \ldots, \underset{\text{i.}}{1}, \ldots, \underset{\text{g.}}{-1}, \ldots, o]$ e $v' = [o, \ldots, \underset{\text{j.}}{1}, \ldots, \underset{\text{h.}}{-1}, \ldots, o]$

és $B = I - A(o)$, valamint $A(e) = A(o) + uv'$.

(17) és (18) összevetéséből egyszerű számolással adódik

$$(19) \qquad C(e) = \frac{e^2\,u'\,Q^0vQ^0uv'\,Q^0}{1 - eu'\,Q^0\,v^2}.$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket, elhagyva az előjel szempontból érdektelen nevezőt és koordinátás alakra áttérve

$$(20) \quad \bar{c}_{kl}(i,j,g,h) = (q^0_{ki} - q^0_{kh})\,(q^0_{jl} - q^0_{gl})\,(q^0_{ij} - q^0_{ih} + q^0_{gh} - q^0_{gj}) \quad k, l = 1, 2, \ldots, n.$$

Ebből a II. Tétel, azaz (3) már közvetlenül következik.

6. Befejező elemzésünkben konkrétabbá kívánjuk tenni (20) összefüggést. Szorítkozzunk a két-szektoros modellre. Ekkor $n = 2$, $i = j = 1$ és $g = h = 2$. A továbbiakban föltesszük, hogy együtthatóink érték/érték dimenziójúak. Ekkor az oszlopösszegek kisebbek mint 1. A sorösszegekről hasonló feltevést nem tehetünk, csak azt tudjuk, hogy $\sigma(\mathbf{M}A) < 1$ miatt legalább egy sorösszeg kisebb mint 1. Tegyük föl, hogy az első sorösszeg mindig kisebb mint 1.

A kétszektoros Leontief-inverz explicit alakban könnyen fölírható:

$$(21) \qquad Q = \frac{1}{\det\,(I - A)} \begin{pmatrix} 1 - \alpha_{22} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 1 - \alpha_{11} \end{pmatrix}$$

(21)-ből látható, hogy $\bar{c}_{kl}(i,j,g,h)$ 3. tényezője mindig pozitív, s az ugyancsak pozitív det $(I - A)$-val együtt a továbbiakban elhagyjuk. Bevezetve az előjel szempontból $\bar{c}$-vel azonos $\tilde{c}$-ot,

$$(22) \qquad \tilde{c}_{kl} = (-1)^{k-l}(1 - \alpha^0_{1\bar{k}} - \alpha^0_{2\bar{k}})\,(1 - \alpha^0 - \alpha^0{}_{\bar{l}2})$$

összefüggést nyerjük, ahol $\bar{k}$ és $\bar{l}$ a ,,másik'' sort ill. oszlop indexét jelöli. A második tényezők mindig pozitívak, de a harmadik tényezők akkor és csak akkor pozitívak, ha a megfelelő sorösszeg kisebb mint 1.

Következésképp,

1. Ha mindkét sorösszeg kisebb mint 1, akkor az átlós elemek alábecsültek, az átlón kívüli elemek fölébecsültek.

2. Ha a második sorösszeg nagyobb mint 1, akkor az első sor elemei alábecsültek, a második sor elemei fölébecsültek.

Megjegyzés: Hasonlóan következik, hogy tetszőleges szektor esetén a k. diagonális elem negyobb mint a k. sor ill. oszlop bármelyik másik eleme, ha minden sorösszeg is kisebb mint 1. Tapasztalatból ismert utolsó állításunk, abban az esetben is, amikor feltételünk nem teljesül. Ezért következik (3)-ból vagy (20)-ból kétszektoros állításunk következő általánosítása:

$$\mathbf{M}q_{ij} \gtrless q^0_{ij},\quad \mathbf{M}q_{ih} \lessgtr q^0_{ih},\quad \mathbf{M}q_{gh} \gtrless q^0_{gh} \text{ és } \mathbf{M}q_{gj} \lessgtr q_{gj} \tag{23}$$
$$\text{ha}\quad q^0_{ij} - q^0_{ih} + q^0_{gh} - q^0_{gj} \gtrless o.$$

Kiegészítés: Eddig rögzítettük a hiba abszolút értékét. Mivel, eredményeink nem függtek e-től, — természetesen azon megkötés mellett, hogy A minden realizációjára igaz $A > 0$ és $\sigma(A) < 1$ — (17) várható értékére is igazak a megfelelő állítások:

$$C = \mathbf{M}C(e) = \mathbf{M}(I - A)^{-1} - (I - \mathbf{M}A)^{-1}; \tag{24}$$

Megjegyzés: Eddigi eredményeink mutatják, hogy $n > 2$ esetén nincsenek, nem is lehetnek általános tételek. Egy elemi megfigyelést azonban tehetünk: *determinisztikus sor- és oszlopösszegek ill. szimmetrikus együttható eloszlások esetén mindig vannak alá- és fölébecsült elemek.* Elég arra utalni, hogy 2×2-es aggregálás esetén — determinisztikus aggregáló mátrixokkal — mind a szimmetria, mind a determinisztikus sor- és oszlopösszeg tulajdonság változatlan. Ha minden elem pl. alábecsült volna, úgy az aggregálás után is úgy maradna. Ez viszont ellentmond előző megállapításunknak.

IRODALOM

1. Bródy, A.: „*Az ágazati kapcsolatok modellje*", Akadémia, Bp. 1964.
2. Chinhan Fei, J.: „A fundamental theorem for the aggregation problem of input-output analysis", *Econometrica*, 1956. pp. 400–412.
3. Quandt, R. E.: „Probabilistic Errors in the Leontief System", *Naval Research Logistics Quaterly*, *5*, pp. 155–170. (1958)

ОБ ОДНОЙ ИЗ ПРИЧИН НИЖНЕЙ И ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКИ ОБРАТНОЙ МАТРИЦИ ЛЕОНТЬЕВА

В действительности матрица *настоящих* затрат анализа межотраслевых балансов содержит числа с неверными стоимостями, отчасти из-за временных колебаний, а отчасти из ошибок статистических оценок. При отчислении *валовых* затрат теоретически следует использовать математическое ожидание обратной матрици Леонтьева, практически известно и используется обратная матрица Леонтьева математического ожидания матрицы настоящих затрат. Андраш Броди спросил, какая матрица — больше? Следуя анализу ошибок Броди доказываем, что (1) теоретическое значение — больше, если элементы матрицы, описанные веро ятностными переменными являются *вполне независимыми (нижняя оценка)* (2) в неглавной диагонали больше является практическое значение (верхняя оценка), а теоретичекое значение является больше в главной диагонали *(нижняя* оценка), если наша модель — двухсекторная и *сумма* рядов и колонн *даны* и фигурирующиеся расиределения симметрические. Математическое доказание основывается на форме степенного ряда обратного Леонтьева и на следующем *Лемма:*

Математическое ожидание степени положительной матрицы большая степени матрицы ожидаемой стоимости.

ON A REASON OF UNDER- AND OVERESTIMATION OF THE LEONTIEF-INVERSE

In reality the matrix of *current* inputs of input-output analysis contains numbers o *uncertain* value, partly due to time differences, to errors in statistical estimations. Theoretically, in calculating *total* inputs one has to use the expected value of the Leontief-inverse, practically the Leontief inverse of the expected value of the matrix of current inputs is known and used. András Bródy has asked, which matrix is greater? Following Bródy's error analysis, we shall prove, that

(i) the theoretical value is the greater if the entries of the matrix described by random variables are *complete independent*

(ii) the practical value is greater in the secondary diagonal *(overestimation)*, and the theoretical value is bigger in the main diagonal *(underestimation)*, if our model has two sectors and the *raw- and column sums are given* and the distributions are symmetric.

The mathematical proof is based upon the power-series form of the Leontief inverse and on the following *lemma:* the expected value of a power of a positive matrix is greater than the power of the matrix of the expected values.