MARTINGÁLMÉRTÉKEK ÉS A VÁRHATÓ DISZKONTÁLT JELENÉRTÉK SZABÁLY[1]

MEDVEGYEV PÉTER
Budapesti Corvinus Egyetem

A dolgozatban a legegyszerűbb kérdést feszegetjük: Hogyan kell az árakat meghatározni véletlen jövőbeli kifizetések esetén. A tárgyalás némiképpen absztrakt, de a funkcionálanalízis néhány közismert tételén kívül semmilyen más mélyebb matematikai területre nem kell hivatkozni. A dolgozat kérdése, hogy miként indokolható a várható jelenérték szabálya, vagyis hogy minden jövőbeli kifizetés jelen időpontban érvényes ára a jövőbeli kifizetés diszkontált várható értéke. A dologban az egyetlen csavar az, hogy a várható értékhez tartozó valószínűségi mértékről nem tudunk semmit. Csak annyit tudunk, hogy létezik a matematikai pénzügyek legtöbbet hivatkozott fogalma, a misztikus $\mathbf{Q}$ mérték. A dolgozat megírásának legfontosabb indoka az volt, hogy megpróbáltam kiiktatni a megengedett portfólió fogalmát a származtatott termékek árazásának elméletéből. Miként közismert, a származtatott termékek árazásának elmélete a fedezés fogalmára épül. De milyen módon lehet fedezni? Diszkrét és véges időhorizonton a fedező portfóliónak egyedül önfinanszírozónak kell lenni. Az önfinanszírozás ilyenkor megadott definíciója igen egyszerű és meggyőző [7]. Jóval nagyobb problémát jelent azonban a folytonos időhorizont esete. Ha eltekintünk is attól, hogy lehetetlen a fedező portfólióban a súlyokat folytonosan változtatni két további probléma marad: Egyrészt az önfinaszírozás definíciójában szereplő késleltetés, nevezetesen a t és a $t+1$ időpontok szerepeltetése folytonos időhorizonton matematikailag nem értelmezhető, másrészt, és ez a fontosabb, a duplázási stratégia által definiált mindig létező arbitrázs lehetőség kiiktatása miatt be kell vezetni a megengedett portfóliókat, amely fogalomra a véges időpontot tartalmazó modellek esetén, miként említettem, nincsen szükség. Az első probléma megkerülését avval szokás indokolni, vagy inkább szőnyeg alá söpörni, hogy az Itô-kalkulus integrálfogalma valamiképpen tartalmazza az önfinanszírozásban szereplő időpontkésleltetést. Hogy ez mennyire helyes, vagy helytelen, nem érdemes feszegetni, ugyanis jóval nagyobb gondot jelent a megengedett portfóliók bevezetése. Az irodalomban két megközelítés létezik: Az elsőben feltesszük, hogy a megengedett portfólió alulról korlátos [1,2,3,6,16]. Ennek kétségtelen előnye, hogy viszonylag egyszerűen interpretálható, illetve emlékeztet a tényleges pénzügyi gyakorlatra: Adott valamilyen kezdőösszeg, amiből gazdálkodni kell, és amikor ez a kezdőlimit elfogy, akkor a portfóliót le kell zárni. Ugyanakkor evvel azt érjük el, hogy az eladás, illetve a vétel nem lesz azonosan megengedett, vagyis a fedező portfóliók halmaza nem lesz lineáris tér, hanem kúp lesz, így a származtatott termékek árazásában kulcs

[1]Beérkezett: 2013. május 26. E-mail: `medvegyev@uni-corvinus.hu`.

szerepet játszó gondolat, miszerint a vevők és az eladók egyszerre vannak jelen, elvész, és a vételi és az eladási oldalon más és más gondolatmenetet kell az ár indoklásakor alkalmazni. A másik megoldás szerint pedig a megengedett porfóliók azok a portfóliók, amelyekre a porfólió értéke a kockázatsemleges árrendszer esetén martingál lesz [7,14]. A kérdés jogos: Miért is? Nem éppen a martingálmértéket akarjuk bevezetni? Mi van akkor, ha több martingálmérték van? Akkor melyik szerint kell a fedező portfóliónak martingálnak lenni? Erre mintha nem lenne válasz. Kétségtelen, hogy a megengedett portfólió ezen definíciója helyreállítja a fedező portfóliók azon tulajdonságát, hogy a vevők és az eladók szempontjából a helyzetet azonosan kezeli, de a korrekció durván matematikai, technikai jellegű és véleményem szerint nagyon kilóg a nevezetes lóláb.

1 Bevezetés

A pénzügyi elmélet legfontosabb, sőt talán egyedüli eszköze a várható jelenérték szabály [4,5,9,13,17,18]. E rendkívül praktikus és látszólag igen egyszerű szabály szerint egy jövőben esedékes kifizetéskor két tényezőt kell figyelembe venni: Az időtávot, illetve a kifizetés bizonytalanságát. Az időhorizonttól való függést a diszkonttényezővel szokás figyelembe venni. A jövőben biztosan kifizetett összeg értéke a jelenben kevesebb, vagy legalábbis nem több, mint a jövőben kapott érték. Hogy mennyivel kevesebb, az a piaci szereplők idővel kapcsolatos preferenciáinak a függvénye. A jelen és a jövő közötti transzformációt megadó szorzószám közönséges árként viselkedik, és elvileg semmiben nem különbözik két egyszerre megvásárolható termék cserearányától. A kifizetés bizonytalansága hasonlóan működik. A módosító érték a bizonytalansággal kapcsolatos preferenciák által meghatározott kereslet és kínálat eredője. Talán az egyetlen eltérés az, hogy a bizonytalanság fogalma nehezebben ragadható meg.

A dolgozatban vizsgált kérdés a következő: Ha $\pi(\xi)$ jelöli a ξ jövőbeli véletlen kifizetés jelen időpontban érvényes árát, akkor milyen tulajdonságokkal, illetve reprezentációval rendelkezik a π függvény? Az árazó függvény alapvető tulajdonsága a linearitás. Bár ez nem teljességgel nyilvánvaló, mégis a pénzügyi modellekben mindig evvel a hallgatólagos feltétellel élünk. További kézenfekvő tulajdonságnak tűnik a π nem negativitása, vagyis ha $\xi \geq 0$, akkor $\pi(\xi) \geq 0$. Azonban ez a két feltétel egyszerre minden további megkötés nélkül általában nem teljesülhet.

1. Példa. *A valószínűségi változók L^0 terén általában nincs a triviálistól különböző nem negatív lineáris funkcionál.*

Jelölje L^0 a $[0,1]$ szakaszon mérhető függvények Lebesgue-mérték szerinti ekvivalenciaosztályait. Az L^0 téren a topológiát a sztochasztikus konvergenciával szokás definiálni, ugyanakkor vegyük észre, hogy a lineáris funkcionáloktól a folytonosságot nem követeljük meg. Megjegyezzük, hogy a $K \overset{\circ}{=} \{\xi \geq 0\}$ függvények olyan kúpot alkotnak, amely zárt a sztochasztikus konvergenciában, de a kúpnak a sztochasztikus konvergencia által generált topológiában nincsen belső pontja, így a végtelen dimenziós szeparációs tétel, a Hahn–Banach-tétel, nem alkalmazható. Tegyük fel, hogy egy alkalmas Λ lineáris funkcionálra $\Lambda(\xi) \geq 0$, ha $\xi \geq 0$, és egy alkalmas $\xi_0 \geq 0$ függvényre $\alpha \overset{\circ}{=} \Lambda(\xi_0) > 0$. Nyilvánvalóan a Λ monoton, vagyis ha $\xi \leq \eta$, akkor $\Lambda(\xi) \leq \Lambda(\eta)$, ugyanis $\Lambda(\eta) - \Lambda(\xi) = \Lambda(\eta - \xi) \geq 0$. Ekkor a $\xi_0\chi[0, 1/2]$ és a $\xi_0\chi(1/2, 1]$ függvények összege ξ_0, amiből a kettő közül az egyikre a Λ értéke $\geq \alpha/2$. Jelölje ξ_1 az így kapott függvény négyszeresét. Világos, hogy $\xi_1 \geq 0$, és $\Lambda(\xi_1) \geq 2\alpha$. Felezzük meg az intervallumot és ismételjük meg az eljárást a ξ_1-re, stb. Az így kapott (ξ_n) sorozatra az $\eta \overset{\circ}{=} \sup_n \xi_n \in L^0$ függvény véges, ugyanis legfeljebb egyetlen olyan pont van, ahol a (ξ_n) sorozat tagjai egy indextől már nem nullák. Mivel $\xi_n \leq \eta$, ezért a Λ monotonitása miatt $2^n\alpha \leq \Lambda(\xi_n) \leq \Lambda(\eta)$, amiből $\Lambda(\eta) = \infty$, ami lehetetlen, ugyanis a lineáris funkcionálok értéke definíció szerint véges. □

2. Példa. *A valószínűségi változók L^0 terén nincsen folytonos lineáris funkcionál.*

Az előző példa egyszerű módosításával azonnal látható, hogy tetszőleges olyan ξ_0 esetén, amelyre $\Lambda(\xi_0) \overset{\circ}{=} \alpha > 0$, $\xi_n \xrightarrow{p} 0$, és $\Lambda(\xi_n) \to \infty$, amiből a Λ nem lehet folytonos a sztochasztikus konvergenciában, vagyis az L^0 téren nem adható meg $\Lambda \neq 0$ a sztochasztikus konvergenciában folytonos lineáris funkcionál. □

Az L^0 tér a sztochasztikus konvergenciával egy teljes metrizálható lineáris tér. A metrikát az $\|\xi\|_0 \overset{\circ}{=} \mathbf{E}(|\xi| \wedge 1)$ képlettel definiálhatjuk. Nyilvánvalóan $\|\xi + \eta\|_0 \leq \|\xi\|_0 + \|\eta\|_0$. A két példát a következő egyszerű észrevétellel kapcsolhatjuk össze:

3. Állítás. *Legyen $L \subseteq L^0$ egy lineáris tér, és tegyük fel, hogy ha $\xi \in L$, akkor $|\xi| \in L$. Tegyük fel, hogy az L-en adott egy $\|\xi\|$ függvény, amelyre*

1. $\|\xi\| \geq 0$ *és* $\|\xi\| = 0$ *pontosan akkor, ha* $\xi = 0$.
2. $\|\xi\| = \|-\xi\|$.
3. $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$.

Ha a $d(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|$ távolságra nézve az L teljes metrikus tér, akkor az L téren értelmezett minden nem negatív lineáris funkcionál folytonos.

Bizonyítás. Legyen Λ az L téren értelmezett nem negatív lineáris funkcionál, és legyen (ξ_n) egy nullához konvergáló sorozat. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy $\|\xi_n\| \to 0$. A linearitás és a nem negativitás miatt $|\Lambda(\xi_n)| \leq \Lambda(|\xi_n|)$). Elegendő tehát belátni, hogy $\Lambda(|\xi_n|)) \to 0$. Feltehető tehát, hogy a ξ_n nem negatív. Elegendő belátni, hogy minden (ξ_n) sorozatnak van egy (ξ_{n_k}) részsorozata, amelyre $\Lambda(\xi_{n_k}) \to 0$. Ha $\|\xi_{n_k}\| \leq 2^{-k}$, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{n_k}$ sor szeletei Cauchy-sorozatot alkotnak, ugyanis ha $M > N$, akkor

$$\left\| \sum_{k=1}^{M} \xi_{n_k} - \sum_{k=1}^{N} \xi_{n_k} \right\| = \left\| \sum_{k=N+1}^{M} \xi_{n_k} \right\| \leq \sum_{k=N+1}^{M} \|\xi_{n_k}\| = \sum_{k=N+1}^{M} 2^{-k} \to 0 \,.$$

Az L feltételezett teljessége miatt a sor konvergens. Legyen a sor összege ξ_∞. Mivel a Λ nem negatív és $\xi_{n_k} \geq 0$, ezért

$$\sum_{k=1}^{N} \Lambda(\xi_{n_k}) \leq \Lambda(\xi_\infty) < \infty \, .$$

Mivel ez minden N-re igaz, ezért a $\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda(\xi_{n_k})$ sor is konvergens, következésképpen $\Lambda(\xi_{n_k}) \to 0$. □

Az idáig tett megfontolásokból evidens, hogy ahhoz, hogy egy értelmes pénzügyi elméletet tudjunk felépíteni, meg kell követelni, hogy a π értelmezési tartománya elég szűk legyen. Legegyszerűbben akkor járunk el, ha feltesszük, hogy a π árazó függvény L értelmezési tartománya egy alkalmas $1 \leq p < \infty$ kitevővel egy $L^p(\mathbf{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tér[2]. Egy megjegyzés erejéig érdemes utalni azonban arra, hogy bár a feltétel igen egyszerű, mégsem problémamentes, mert a L^p tér nem invariáns a matematikai pénzügyekben alapvető szerepet játszó mértékcserére. Ugyanakkor a két kézenfekvő alternatíva, az L^0 és az L^∞ terek, bár invariánsak az ekvivalens mértékcserére, egyikük sem megfelelő, ugyanis miként láttuk az L^0 térben nincsenek folytonos lineáris funkcionálok, az L^∞ térben pedig bizonyos értelemben túl sok is van belőlük, mivel miként ismert az L^∞ terekben vannak olyan folytonos lineáris funkcionálok is, amelyek nem mértékkel reprezentálhatóak. További probléma forrása, hogy az $L = L^p$ feltétel hallgatólagosan megköveteli egy $\mathbf{P}$ valószínűségi mérték létét. Ennek szokásos interpretációja, hogy adott egy statisztikai valószínűségi mező, és feltételezzük, hogy az árfolyamok alakulása a klasszikus valószínűségszámítási modelleknek megfelelően alakul, ami azonban csak részben tekinthető helyes feltételnek, ugyanis a pénzügyek elvileg, vagy inkább remélhetőleg nem egy szerencsejáték[3].

Az L^p terekben minden folytonos lineáris funkcionál integrálként reprezentálható, így az $L = L^p$ feltétel legfőbb oka/következménye az alábbi egyszerű észrevétel:

4. Lemma. *Létezik, mégpedig egyetlen olyan, a $\mathbf{P}$-mértékre abszolút folytonos μ mérték, amelyre $\pi(\xi) = \int_\Omega \xi \, d\mu$.*

Mivel a π nem negatív, ezért a μ valódi mérték. Amikor a π értelmezési tartományáról, az L-ről megköveteltük, hogy lineáris teret alkosson, akkor hallgatólagosan megköveteltük, hogy az L elemei már eleve diszkontálva vannak, ugyanis ellenkező esetben nem lehetne őket pénzügyileg értelmes módon összeadni. Egy további triviális megkötés/feltétel, hogy elvárjuk, hogy az 1 konstans kifizetés eleme legyen a lehetséges kifizetések L alterének és

$$1 = \pi(1) = \int_\Omega 1 \, d\mu \, ,$$

[2]Általában $p = 2$, de időnként a $p = 1$ esettel is találkozhatunk.

[3]Evvel kizárjuk a bizonytalanságot a pénzügyi modellezésből és kockázat létezését tesszük hallgatólagosan fel. [17]

vagyis a μ valószínűségi mérték. A matematikai pénzügyek szokásos jelölését használva a μ reprezentáló mértéket $\mathbf{Q}$-val fogjuk jelölni. Érdemes nyomatékosan hangsúlyozni, hogy az $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ és az $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{Q})$ terek nem azonosak. A π értelmezési tartománya továbbra is az $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tér. Hangsúlyozni kell, hogy nem állítjuk, hogy a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ ekvivalensek, vagyis hogy a $\mathbf{P}$ és a $\mathbf{Q}$ alatti nullmértékű halmazok egybeesnek. Ennek megköveteléséhez szükségünk lenne arra, hogy a π szigorúan monoton növekedő legyen, vagyis hogy minden $\mathbf{P}$ szerint nem nulla, nem negatív változó ára pozitív legyen. Ezt azonban nem követeljük meg. Mivel a π árfüggvényt reprezentáló mértékek a $\mathbf{P}$-re nézve abszolút folytonosak, ezt hallgatólagosan, minden további említés nélkül, mindig meg fogjuk követelni.

A megadott matematikai és közgazdasági megkötések együttesét a következő állításban foglalhatjuk össze:

5. Tétel (Várható jelenérték szabály). *A megadott feltételek esetén érvényes a várható jelenérték szabálya, vagyis tetszőleges H jövőbeli kifizetés jelenbeli $\pi(H)$ árára érvényes a*

$$\pi(H) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\overline{H})$$

reprezentáció, ahol $\overline{H}$ a H diszkontált értéke és $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$ a $\mathbf{Q}$ valószínűségi mérték szerint vett várható érték operátora.

Érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy a tétel meglehetősen semmitmondó, ugyanis nem tartalmaz semmilyen útmutatást arra, hogy hogyan kell a $\mathbf{Q}$ mértéket egy modellben felírni, vagy a modell paraméterei alapján meghatározni.

2 Martingálok és a várható jelenérték szabály

A várható jelenérték szabálynak van egy távolról sem triviális következménye. Jelölje $\mathbf{Q}$ azt a mértéket, amelyet a várható jelenérték szabályban használni kell. A várható jelenérték szabály pontosan azt állítja, hogy ilyen $\mathbf{Q}$ mérték létezik. Legyen S valamilyen kereskedett termék[4] árfolyamát megadó sztochasztikus folyamat. Kézenfekvő kérdés, hogy az S milyen típusú folyamatot alkot a $\mathbf{Q}$ mérték alatt?

Természetesen különböző t időpontokban az S folyamat értéke különböző termék. Kézenfekvő megkövetelni, hogy nem csak fix időpontokban számolhatjuk ki az S értékét. Ha a τ időpont véletlen, akkor jelölje $S(\tau)$ azt a változót, amely éppen az S értékét adja meg a τ (véletlen) időpontban. Ha τ egy véges értékeket felvevő megállási idő, akkor az $S(\tau)$ természetesen szintén egy önálló pénzügyi termék. Az S termék kereskedett, ami definíció szerint azt jelenti, hogy a $t = 0$ időpontban bármely fix, vagy az aktuális kimeneteltől függő τ időpontban esedékes értéke eladható, vagy megvehető. Jelölje R a diszkontálásra használt folyamatot és jelölje $\overline{S} \overset{\circ}{=} S/R$ a diszkontált folyamatot. Tekintsünk két időpontot: legyenek ezek t_1 és t_2. Az $S(t_1)$ és

[4]Hogy mit tekintünk kereskedett terméknek, az a konkrét felépítéstől függ. Később a fogalom pontosabban definiálva lesz, ezen a ponton a fogalom még szándékosan definiálatlan.

az $S(t_2)$ két különböző határidős termék, amelyek π ára a várható jelenérték szabály miatt a $t=0$ időpontban

$$\pi\left(S\left(t_1\right)\right)=\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}\left(t_1\right)\right), \quad \pi\left(S\left(t_2\right)\right)=\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}\left(t_2\right)\right) ,$$

ahol a $\mathbf{Q}$ felső index a várható érték során használt mértékre utal. Mi a kapcsolat a két ár között? Megmutatjuk, hogy $\pi(S(t_1))=\pi(S(t_2))$ [9]. Ehhez elegendő megmutatni, hogy a közös érték éppen a kereskedett termék S_0-lal jelölt $t=0$ időpontban érvényes aktuális ára. Ennek oka nagyon egyszerű. A pénzügyi termékek, szemben a hagyományos termékekkel, költségmentesen tárolhatóak, ugyanis az időből származó értékvesztést már a diszkontáláskor figyelembe vettük. A t_k időpontban esedékes határidős kifizetéshez az ingyenes tárolás feltétele miatt két eltérő módon is hozzájuthatunk. Vagy a $t=0$ időpontban S_0-ért megvesszük a terméket és kivárjuk a t_k időpontot, vagy a $t=0$ időpontban $\pi(S(t_k))$-ért megvesszük a t_k időpontban való „hozzáférés" jogát. Mivel mind a két esetben a t_k időpontban azonos értékünk lesz, ezért a kifizetett vételáraknak a $t=0$ időpontban is meg kell egyezniük. Például ha $S_0<\pi(S(t_k))$, akkor a határidős terméket eladva, majd a kapott összegből a terméket magát megvéve, majd költségmentesen tartva a t_k időpontig biztos profithoz juthatunk, annak ellenére, hogy a portfólió értéke a t_k időpontban nulla. Mivel ezt bármilyen nagyságrendben megtehetjük, végtelen profitra tehetünk szert, amit definíció szerint kizárunk[5]. Némiképpen másképpen fogalmazva, ha feltesszük, hogy a bármely jövőben esedékes nulla kifizetés jelenbeli ára is nulla, valamint megköveteljük, hogy a π árazó függvény lineáris legyen, akkor a különböző időpontokra vonatkozó határidős termékek jelenben esedékes ára meg kell hogy egyezzen. Következésképpen,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}\left(t_1\right)\right)=\pi\left(S\left(t_1\right)\right)=S_0=\pi\left(S\left(t_2\right)\right)=\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\overline{S}\left(t_2\right)\right) .$$

Mivel a t_1,t_2 időpontok lehetnek megállási idők is, ezért a megállási opciókról szóló tétel alapján igaz a következő állítás:

6. Tétel (Kereskedett termékek martingálmértéke). *Ha az S termék kereskedett, és a $\mathbf{Q}$ mérték esetén érvényes a várható jelenérték szabály, akkor a diszkontált árfolyamokból álló $\overline{S}$ folyamat martingál a $\mathbf{Q}$ mérték alatt.*

Vegyük észre, hogy a bizonyításhoz a várható jelenérték szabályon kívül csak azt használtuk, hogy egy kereskedett termék bármely jövőbeli időpontra vonatkozó határidős kifizetésének jelenlegi ára független attól, hogy melyik jövőbeli időpontról van szó. Ennek oka az, hogy a modell feltételezése szerint minden pénzügyi termék költségmentesen tárolható, illetve, ugyancsak definíció szerint, a biztos végtelen profitot kizárjuk. Érdemes felfigyelni azonban arra is, hogy hallgatólagosan feltettük, hogy a piac igen fejlett: Tetszőleges

[5]Vegyük észre, hogy a gondolatmenet a matematikai pénzügyekben központi szerepet játszó nincsen arbitrázs feltétel egy igen enyhe verziója. Vegyük azt is észre, hogy a gondolatmenetben kulcs szerepe volt annak, hogy mind a két irányban alkalmazhattuk. Ugyanakkor, mivel explicite nem hivatkoztunk sem a lehetséges portfóliók halmazára, sem az arbitrázs lehetetlenségére, a korábban említett technikai nehézségeket kizártuk, mivel az artitrálás lehetőségét csak a legegyszerűbb esetben követeltük meg.

megállási idő esetén a megállási időben lehívható határidős terméknek van piaca, következésképpen van ára.

7. Definíció. *A* $\mathbf{Q}$ *mértéket az* S *kereskedett termék martingálmértékének mondjuk, ha az* $\overline{S}$ *diszkontált folyamat martingál a* $\mathbf{Q}$ *alatt.*

A martingálmértékekkel kapcsolatos legfontosabb kérdés továbbra is a következő: Ha adott az $\overline{S}$ folyamat, miként, és milyen ξ diszkontált kifizetésekre határozhatjuk meg a π függvényt? Természetesen ha egyetlen olyan $\mathbf{Q}$ mérték van, amely esetén az $\overline{S}$ martingál és a ξ kifizetésre érvényes a diszkontált jelenérték szabály, akkor a π függvény értelemszerűen a $\pi(\xi) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\overline{\xi})$ alakot ölti. Ha azonban több martingálmérték is van, akkor nyilvánvalóan csak az

$$\inf_{\mathbf{Q}\in\mathcal{M}(\overline{S})} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\overline{\xi}) \leq \pi(\xi) \leq \sup_{\mathbf{Q}\in\mathcal{M}(\overline{S})} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\overline{\xi})$$

egyenlőtlenség írható fel, ahol az $\mathcal{M}(\overline{S})$ az $\overline{S}$ diszkontált árfolyam martingálmértékeinek halmaza, ahol értelemszerűen martingálmértéken az olyan mértékeket értjük, amely alatt az $\overline{S}$ martingál. Vagyis a diszkontált jelenérték szabállyal kapcsolatos további fontos kérdés a következő: Mikor létezik egyetlen martingálmérték? Az ezt biztosító feltételekre mint teljességi feltétel szokás hivatkozni. Hangsúlyozni kell, hogy a teljesség problémája abból ered, hogy a π értelmezési tartományát megadó $L = L^p$ térnek az $\overline{S}(\tau)$ alakú megállított változók által generált lineáris tér esetlegesen csak egy valódi altere, így bár a π függvényt reprezentáló $\mathbf{Q}$ ezen az altéren adott, de több olyan mérték is létezhet, amely leszűkítése erre az altérre a $\mathbf{Q}$, így az altérre való leszűkítésből a π nem rekonstruálható.

8. Példa. *A Black–Scholes modell martingálmértéke.*

A matematikai pénzügyek kedvenc modellje az úgynevezett Black–Scholes modell. Erről elegendő annyit megjegyezni, hogy a modellben két eszköz van, a diszkontálásra használt kötvény, amely árfolyamának alakulását a $B(t) = B_0 \exp(rt)$ folyamat írja le, illetve az $S(t) = S_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma w(t))$ árfolyammal rendelkező részvény. A modellben az r, μ, σ, B_0 és az S_0 előre adott konstansok és a részvény árfolyamát megadó folyamat képletében a w egy Wiener-folyamatot jelöl. A diszkontált folyamat értelemszerűen

$$\overline{S}(t) = \frac{S(t)}{B(t)} = \frac{S_0}{B_0} \exp\Big(\Big(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\Big)t + \sigma w(t)\Big) .$$

Mivel a képletben szerepel egy Wiener-folyamat, ezért létezik az $S(t)$ alakulását megadó valamilyen $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező. Az $\overline{S}(t)$ eloszlása lognormális, és a lognormális valószínűségi változók várható értékére vonatkozó képlet alapján

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\overline{S}(t)) = \frac{S_0}{B_0}\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\exp(N((\mu - r - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma\sqrt{t}))) = \frac{S_0}{B_0}\exp((\mu - r)t) .$$

Ha $\mu \neq r$, akkor a diszkontált részvényárfolyam várható értéke nem konstans, így az $\overline{S}$ nem martingál, következésképpen a w Wiener-folyamat mögötti valószínűségi mezőhöz tartozó **P** valószínűségi mérték a π ár funkcionál szempontjából nem releváns.

A Black–Scholes modellel kapcsolatos legfontosabb matematikai kérdés a következő: Létezik-e, mégpedig egyetlen olyan **Q** mérték, amely esetén az $\overline{S}$ martingál? A létezéssel kapcsolatos kérdésre a választ az úgynevezett Girszanov-formula [7,12] tartalmazza, de a legfontosabb gondolatok a Girszanov-formula nélkül is megérthetőek: Egyrészt megmutatható, hogy nincs olyan **Q** mérték, amely alatt a diszkontált árfolyam a teljes $[0,\infty)$ időtartományon martingál lesz. Éppen ezért a Black–Scholes modellben fel kell tenni, hogy az időhorizont egy véges $[0,T]$ időintervallum. Vezessük be a

$$\theta \overset{\circ}{=} \frac{\mu - r}{\sigma}$$

jelölést és legyen

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \overset{\circ}{=} \exp\Big(-\theta w\,(T) - \frac{1}{2}\theta^2 T\Big)\ .$$

Ismételten a lognormális eloszlás várható értékének képlete alapján

$$\mathbf{E}\Big(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\Big) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\theta^2 T + \frac{1}{2}\theta^2 T\Big) = 1\ ,$$

vagyis a **Q** szintén valószínűségi mérték. Mivel a w független növekményű, ezért

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &\overset{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ &= \exp\Big(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 T\Big)\,\mathbf{E}\left(\exp(-\theta(w(T) - w(t))) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ &= \exp\Big(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 T\Big)\,\mathbf{E}\left(\exp(-\theta(w(T) - w(t)))\right) = \\ &= \exp\Big(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 T\Big)\exp\Big(\frac{1}{2}\theta^2 (T-t)\Big) = \\ &= \exp\Big(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\Big)\ ,\end{aligned}$$

vagyis a

$$\Lambda(t) \overset{\circ}{=} \exp(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t)$$

folyamat martingál. Ez másképpen a feltételes várható érték definíciója alapján azt jelenti, hogy az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrán a $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$ Radon–Nikodym derivált éppen a $\Lambda(t)$, ugyanis ha $F \in \mathcal{F}_t$, akkor

$$\mathbf{Q}(F) = \int_F \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\,d\mathbf{P} = \int_F \mathbf{E}\Big(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{F}_t\Big)\,d\mathbf{P} = \int_F \Lambda(t)\,d\mathbf{P}\ .$$

Ha $t \le T$, akkor minden $F \in \mathcal{F}_t$ esetén

$$\begin{aligned}\int_F \overline{S}(T)\,d\mathbf{Q} = \int_F \overline{S}(T)\Lambda(T)\,d\mathbf{P} &= \int_F \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\overline{S}(T)\Lambda(T) \mid \mathcal{F}_t\right)d\mathbf{P} = \\ &= \int_F \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\overline{S}(T)\Lambda(T) \mid \mathcal{F}_t\right)\Lambda^{-1}(t)\,d\mathbf{Q}\ .\end{aligned}$$

Ez a reláció éppen a Bayes-formula speciális esete. Ebből következően

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\overline{S}(T)\mid\mathcal{F}_t) &= \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\overline{S}(T)\Lambda(T)\mid\mathcal{F}_t)\Lambda^{-1}(t) = \\ &= \overline{S}(t)\,\frac{\Lambda(t)}{\Lambda(t)}\,\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\Big(\frac{\overline{S}(T)}{\overline{S}(t)}\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)}\mid\mathcal{F}_t\Big) = \\ &= \overline{S}(t)\,\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\Big(\frac{\overline{S}(T)}{\overline{S}(t)}\frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)}\mid\mathcal{F}_t\Big) = \overline{S}(t)\ ,\end{aligned}$$

ugyanis az $\overline{S}$ és a Λ exponenciális alapjából evidens, hogy a feltételes várható érték mögötti kifejezések a $w(T)-w(t)$ függvényei, és mivel a w független növekményű, ezért a feltételes várható kiszámolásakor a feltétel elhagyható, és ha $s \overset{\circ}{=} T-t$, akkor

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\exp\Big(\Big(\mu-r-\frac{\sigma^2+\theta^2}{2}\Big)s+(\sigma-\theta)w(s)\Big)\right) = \\ &= \exp\Big(\Big(\mu-r-\frac{\sigma^2+\theta^2}{2}\Big)s+\frac{1}{2}(\sigma-\theta)^2 s\Big) = \\ &= \exp\Big(\Big(\mu-r-\frac{\sigma^2+\theta^2}{2}\Big)s+\frac{1}{2}(\sigma-\theta)^2 s\Big) = 1\ .\end{aligned}$$

Ebből következően az $\overline{S}$ martingál a $\mathbf{Q}$ alatt. □

Miként megjegyeztük, a $\mathbf{Q}$ martingálmérték megtalálása csak fél siker, mert nem tudjuk, hogy a martingálmérték egyértelmű-e vagy sem. Általában a matematikai pénzügyek irodalmában a martingálmérték létezése matematikailag egyszerűbb és kézenfekvőbb feltételnek tűnik. Sokkal kevesebbet tudunk a teljességről, vagyis arról, hogy mikor lesz a martingálmérték egyértelmű. Tegyük fel, hogy sikerült találnunk egy martingálmértéket. Milyen termékeket tudunk segítségével beárazni? Tegyük fel, hogy az $\overline{S}_0$ érték ismert. Ekkor a martingálmérték tulajdonság miatt az $\overline{S}(\tau)$ változók értéke is ismert és miként megjegyeztük $\pi(\overline{S}(\tau))=\pi(\overline{S}(0))=\overline{S}(0)$. Mivel a π lineáris funkcionál, ezért az összes $\xi \overset{\circ}{=} c_0+\sum_k c_k(\overline{S}(\tau_k)-\overline{S}(\tau_{k-1}))$ alakú kifejezés ára is ismert, nevezetesen a kifejezés ára éppen $\pi(\xi)=c_0$, ugyanis a második összeg ára a π linearitása miatt nulla. Éppen a martingál tulajdonság miatt, ha $\tau_k>\tau_{k-1}$ és a c_k nem konstans, hanem egy θ_k $\mathcal{F}_{\tau_{k-1}}$ mérhető, korlátos valószínűségi változó, akkor a martingál tulajdonság miatt, tetszőleges martingálmérték esetén

$$\begin{aligned}\pi(\theta_k(\overline{S}(\tau_k)-\overline{S}(\tau_{k-1}))) &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\theta_k(\overline{S}(\tau_k)-\overline{S}(\tau_{k-1}))) = \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\theta_k(\overline{S}(\tau_k)-\overline{S}(\tau_{k-1}))\mid\mathcal{F}_{\tau_{k-1}})) = \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\theta_k\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}((\overline{S}(\tau_k)-\overline{S}(\tau_{k-1}))\mid\mathcal{F}_{\tau_{k-1}})) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\theta_k\cdot 0)=0\ .\end{aligned}$$

A sztochasztikus analízis irodalmában az ilyen alakú kifejezéseket egyszerű integrandusoknak szokás mondani. Ebből következően az egyszerű integrandusként előálló valószínűségi változók mindegyikére a π árfüggvény értéke nulla. Mivel a π folytonos az $L^p(\mathbf{\Omega},\mathcal{A},\mathbf{P})$ tér normájában, ezért az egyszerű integrandusok összegeként előálló valószínűségi változók $L^p(\mathbf{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ normában vett határértékeinek ára is nulla. Az egyszerű integrandusok összegeként előálló valószínűségi változók sztochasztikus konvergenciában vett határértékeit szokás sztochasztikus integrálnak mondani. Mivel a Csebisev-egyenlőtlenség miatt az L^p-konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért azt mondhatjuk, hogy az $\int_0^T \theta(s)\, d\overline{S}$ alakú sztochasztikus integrálként előálló valószínűségi változók egy részhalmazának π ára nulla. A sztochasztikus analízisben [6,12] részletesen tárgyalásra kerül, hogy milyen alakú folyamatok esetén biztosítható a sztochasztikus integrál létezése, ugyanakkor jóval kevesebbet tudunk arról, hogy milyen további megkötésekkel biztosítható, hogy ne csak a sztochasztikus konvergenciában, hanem erősebb értelemben is, vagyis például az $L^p(\mathbf{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ térben is konvergáljon az integrál. Az ezt biztosító alkalmas feltételek esetén érvényes a következő tétel:

9. Tétel (Derivatív árazás alaptétele). *Ha valamely a T időszakban esedékes H_T kifizetés $\overline{H}_T$ diszkontált értéke előáll*

$$\overline{H}_T = \lambda + \int_0^T \theta(s)\, d\overline{S} \tag{1}$$

alakban, ahol az integrál a π folytonosságát biztosító $L^p(\mathbf{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ térben konvergens, akkor

$$\pi(H_T) = \pi(\lambda \cdot 1) + \pi\Big(\int_0^T \theta(s)\, d\overline{S}\Big) = \lambda\pi(1) + 0 = \lambda\,.$$

A tételben szereplő (1) összefüggés szokásos közgazdasági megfogalmazása az, hogy a H_T kifizetést sikerült önfinanszírozó módon lefedezni. A tétel szerint az önfinanszírozó módon fedezett pénzügyi tranzakciók jelen pillanatban érvényes ára éppen az induló befektetés költségével azonos. A matematikai pénzügyek nem elhanyagolható technikai problémái részben abból erednek, hogy miközben a sztochasztikus integrálás természetes matematikai élettere az L^0 tér, addig a π árazó függvények természetes élettere az L^p tér. Az ebből eredő konfliktus számos nehéz órát okozott és valószínűleg fog is még okozni a területen tevékenykedő kutatóknak, és úgy tűnik, matematikailag nem igen, vagy csak nagyon nehezen járható [1,2,3].

További kérdés lehet, hogy miként lehet a λ értéket kifejezni a $\overline{H}_T$ és a $\mathbf{Q}$ segítségével, ahol $\mathbf{Q}$ az $\overline{S}$ egy tetszőleges martingálmértéke. Ehhez elegendő lenne azt biztosítani, hogy a sztochasztikus integrál egy tetszőleges $\mathbf{Q}$ martingálmérték szerinti várható értéke nulla legyen, vagyis hogy az integrál martingál legyen a $\mathbf{Q}$ alatt. Ez a sztochasztikus integrálás másik nehéz technikai jellegű kérdésével függ össze, amely szerint egy martingál szerint vett sztochasztikus integrál általában csak lokális martingál és nem valódi martingál. Ha azonban a martingálmérték egyértelmű, és a sztochasztikus integrál az $L^p(\mathbf{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ térben is konvergens, akkor ez a probléma nem lép fel, ugyanis ilyenkor

$$\pi\Big(\int_0^T \theta(s)\, d\overline{S}\Big) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\Big(\int_0^T \theta(s)\, d\overline{S}\Big) = 0\,,$$

következésképpen a nevezetes $\pi(H_T) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\overline{H}_T)$ árazó képlet, vagyis a diszkontált jelenérték szabály, ilyenkor teljesül. Ha azonban a martingálmérték nem egyértelmű, akkor mivel nincsen semmilyen garancia arra, hogy a sztochasztikus integrál a $\mathbf{Q}$ alatt nem valódi lokális martingál, az integrál várható értéke a $\mathbf{Q}$ alatt nem feltétlenül lesz nulla.

De ezzel nincsen vége a technikai jellegű problémáknak. Miként dönthető el egy a T időszakban esedékes $\overline{H}_T$ kifizetésről hogy előállítható-e megadott (1) alakban? Elegendő-e ehhez az, hogy a H_T mérhető legyen a S folyamat által generált filtrációra nézve? Az ezt garantáló tételeket szokás integrálreprezentációs tételnek mondani. Általában viszonylag enyhe feltételek mellett biztosítható, hogy valamely $\overline{H}_T$ rendelkezzen a kívánt (1) előállítással. Ugyanakkor a sztochasztikus integrálok konvergenciája csak sztochasztikus konvergenciában teljesül, és mikor biztosítható az integrálok L^p normában való konvergenciája? Erre általában nehéz bámit mondani.

10. Példa. *Európai call opciók árazása a Black–Scholes modellben.*

A matematikai pénzügyek felvirágozása nagyrészt a következő problémából származik: Legyen adva egy S részvény. Mi lesz a T időpontban esedékes $H_T \overset{\circ}{=} (S(T)-K)^+$ kifizetés $t = 0$ időpontban érvényes ára. Tegyük fel, hogy az S alakulását a Black–Scholes modell írja le, és tegyük fel, hogy létezik a π árazó függvény. Természetesen meg kell mondani, hogy mi lesz a π árazó függvény L értelmezési tartománya. A Black–Scholes modellben hallgatólagosan azt tételezzük fel, hogy az $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ mező éppen az S definíciójában szereplő w Wiener-folyamat által generált filtráció a T időpontig bezárólag, vagyis $\mathcal{A} = \sigma\{w(t) \mid t \leq T\}$, és például $L = L^2$, vagyis az L a szórással rendelkező változókból áll. A négyzetesen integrálhatóság feltételének nincs jelentősége, de a mérhetőség megkötése alapvető. Megmutatjuk, hogy ezen az elegendően szűk $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{A})$ mérhető téren a martingálmérték egyértelmű. Ebből következőleg, mivel a H_T mérhető, és többek között van szórása, ezért $\pi(H_T) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\overline{H}_T)$. A martingálmérték egyértelműségét a már említett integrálreprezentációs tétellel lehet megmutatni. E szerint a tétel szerint, ha ξ négyzetesen integrálható, és mérhető a $\sigma\{w(t) \mid t \leq T\}$ σ-algebrára nézve, akkor előállítható sztochasztikus integrálként.

$$\overline{H}_T = \lambda + \int_0^T X\,dw\ ,$$

mégpedig oly módon, hogy a sztochasztikus integrál martingál[6]. Ugyanakkor ez sajnos nekünk nem elegendő, ugyanis nem a w, hanem az $\overline{S}$ szerint vett integrálként való előállításra van szükségünk. Ahhoz, hogy ezt meg tudjuk tenni, meg kell majd mutatni, hogy alkalmas $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{A}, \mathbf{Q})$ martingálmérték alatt egy a másik $\widetilde{w}$ módon jelölt $\mathbf{Q}$ mérték alatti Wiener-folyamattal $d\overline{S} = \sigma\overline{S}d\widetilde{w}$. Érdemes hangsúlyozni, hogy a $\widetilde{w}$-ra való áttéréskor ugyancsak biztosítani

[6]Több különböző integrálreprezentációs tétel is igazolható. A gondolatmenet lényege, hogy az előállításban szereplő sztochasztikus integrál valódi martingál, nem csak lokális martingál.

kell, hogy a $\widetilde{w}$ által generált σ-algebra azonos legyen a w által generált σ-algebrával. A sztochasztikus integrálokra vonatkozó asszociativitási szabály alapján minden, a $\mathbf{Q}$ mérték szerint négyzetesen integrálható ξ változóra, felhasználva, hogy $\overline{S} > 0$

$$\xi = \lambda + \int_0^T X \, d\widetilde{w} = \lambda + \int_0^T \frac{X}{\sigma \overline{S}} \sigma \overline{S} \, d\widetilde{w} = \lambda + \int_0^T \frac{X}{\sigma \overline{S}} \, d\overline{S} \overset{\circ}{=} \lambda + \int_0^T \theta \, d\overline{S} \, ,$$

vagyis a ξ reprezentálható önfinanszírozó portfólióval. Mivel a ξ négyzetesen integrálható, az integrálreprezentációs tétel biztosítja, hogy a sztochasztikus integrál martingál legyen. Ha most a ξ korlátos, akkor az $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\xi \mid \mathcal{F}_t)$ martingál korlátos, így az $\int_0^t \theta \, d\overline{S} = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\int_0^T \theta d\overline{S} \mid \mathcal{F}_t)$ folyamat szintén korlátos. Ha most $\mathbf{R}$ egy másik martingálmérték, és χ_A egy tetszőleges $A \in \mathcal{A}$ halmaz karakterisztikus függvénye, akkor az integrál előállításban szereplő integrál olyan lokális martingál az $\mathbf{R}$ alatt, amely korlátos, ezért az $\mathbf{R}$ szerint is martingál. Az, hogy a sztochasztikus integrál az $\mathbf{R}$ alatt lokális martingál, abból következik, hogy egyrészt a mértékcsere során a sztochasztikus integrálok nem változnak, másrészt az $\overline{S}$, a feltétel szerint, az $\mathbf{R}$ alatt is martingál, és a martingálok szerint vett sztochasztikus integrálok lokális martingálok. Ebből

$$\mathbf{Q}(A) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\Big(\lambda + \int_0^T \theta \, d\overline{S}\Big) = \lambda = \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\Big(\lambda + \int_0^T \theta \, d\overline{S}\Big) = \mathbf{R}(A)$$

minden $A \in \mathcal{A}$ esetén. Így tehát a martingálmérték az $\mathcal{A}$ σ-algebrán egyértelmű. Egyúttal azt is igazoltuk, hogy nincs a $\mathbf{Q}$ mértéken kívül olyan másik mérték, amely alatt az $\overline{S}$ esetleg lokális martingál lesz, vagyis a Black–Scholes modellben az alapul vett Wiener-folyamat által generált σ-algebrán nem csak a martingálmérték, hanem a lokális martingálmérték is egyértelmű. □

11. Példa. *Amerikai opciók árazása.*

Emlékeztetünk, hogy amerikai opción olyan terméket értünk, amely kifizetésének időpontját a termék birtokosa határozza meg. Például az amerikai put opciók esetén az opció birtokosa által megválasztható τ időpontban a termék értéke $(K - S(\tau))^+$, így az opció birtokosa ezt az összeget kapja meg. Mivel a lehívás időpontja utólag nem határozható meg, a τ megállási idő. Amerikai opciók esetén tehát nem egy valószínűségi változó a kifizetés, így közvetlenül a π függvény nem alkalmazható. Amerikai opciók árának meghatározásakor abból szokás kiindulni, hogy az eladó a $H(\tau)$ alakú változók közötti választás lehetőségét adja el, ahol H egy folyamat. Mivel a vevő a $H(\tau)$ változók közül bármelyiket választhatja, így kézenfekvő, ha árként az eladó a $\pi(H(\tau))$ lehetséges árak szuprémumát jelöli meg. Ha van $\mathbf{Q}$ egyértelmű martingál mérték, akkor az ár $\sup_\tau \pi(H(\tau)) = \sup_\tau \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\overline{H}(\tau))$. Ha van olyan τ^* optimális lehívási időpont, amelyre

$$\sup_\tau \pi(H(\tau)) = \sup_\tau \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\overline{H}(\tau)) = \max_\tau \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\overline{H}(\tau)) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\overline{H}(\tau^*)) \, ,$$

akkor a $\pi(H(\tau^*))$ a vevő által is elfogadható, ugyanis nem fog szisztematikusan veszíteni. □

Irodalom

1. Badics, T. 'Az arbitrázs preferenciákkal történő karakterizációjáról', *Közgazdasági Szemle*, 2011/ szeptember, 727–742.
2. Badics, R. 'Arbitrázs, kockázattal szembeni attitűd, és az eszközárazás alaptétele', *Hitelintézeti Szemle*, 4:325–335, 2011.
3. Badics T. Medvegyev P. 'A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele, lokálisan korlátos szemimartingál árfolyamok esetén', *Szigma* 40:89–136, 2009.
4. Björg, T. *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
5. Cochrane, J. H. *Asset Pricing*, Princeton University Press, Princeton, 2001
6. Delbaen F. and Schachermayer W. *The Mathematics of Arbitrage*, Springer, Berlin, 2005.
7. Elliott R. J. and Kopp P. E. *Mathematics of Financial Markets*, Second Edition, Springer, Berlin 2005.
8. Hansen, L. P., Richard, S. F. 'The Role of Conditioning Information in Deducing Testable Restrictions Implied by Dynamic Asset Pricing Models', *Econometrica* 55:587–614, 1987.
9. Hull, J. C. *Options, Futures, and Other Derivatives*, Third Edition, Prentice Hall International, Inc., London, 1997.
10. Jeanblank, M, Yor, M. and Chesney, M, *Mathematical Methods of Financial Markets*, Springer, 2009.
11. Karatzas, I. Shreve, S. E. *Methods of Mathematical Finance*, Springer, Berlin, 1998.
12. Medvegyev, P. *Stochastic Integration Theory*, Oxford University Press, Oxford, 2007.
13. Medvegyev, P. – Száz, J. *A meglepetések jellege a pénzügyi piacokon*, Bankárképző Központ, Budapest, 2010.
14. Musiela, M. – Rutkowski, M. *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, Berlin, 1998.
15. Shreve S. E. *Stochastic Calculus for finance I, II*, Springer, Berlin, 2004
16. Shiryaev, A. N., *Essentials of Stochastic Finance, Facts, Models, Theory*, World Scientific, Singapure, 1999.
17. Száz, J, 'Valószínűség, esély, relatív súlyok – Opciók és reálopciók', *Hitelintézeti Szemle* 4:336–348, 2011.
18. Száz, J, *Pénzügyi termékek áralakulása*, Jet Set Tipográfiai Műhely Kft., Budapest, 2009.

MARTINGALE MEASURES AND THE LAW OF THE DISCOUNTED PRESENT VALUE

In the article the author discusses some problems of the existence of the martingale measure. In continuous time models one should restrict the set of self financing portfolios and introduce the concept of the admissible portfolios. But to define the admissible portfolios one should either define them under the martingale measure or to turn the set of admissible portfolios to a cone which makes the interpretation of the pricing formula difficult.