FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

LEE ANNA

Mátrixok általánosított inverzeiről*

I. Bevezetés

Ismeretes, hogy ha A kvadratikus nem szinguláris mátrix, akkor létezik olyan G mátrix, amelyre $AG = GA = I$. E mátrixot az A inverzének nevezzük és jelölésére az A^{-1} szimbólumot használjuk. Az inverz mátrixnak gyakorlati feladatok megoldásánál is fontos szerepe van. Így például az

$$Ax = b \tag{1.1}$$

lineáris, egyenletrendszer megoldása az A^{-1} inverz mátrix segítségével

$$x = A^{-1}b \tag{1.2}$$

alakban állítható elő.

A gyakorlati problémák azonban gyakran vezetnek olyan konzisztens — azaz egymásnak nem ellentmondó egyenletekből álló — egyenletrendszerhez, amelynek A együttható mátrixa általában nem is kvadratikus, inverze tehát a fenti értelemben nem létezik. Ilyen esetben az (1.1) egyenletrendszer megoldása nem egyértelmű. A megoldások, vagy egy partikuláris megoldás előállítása sokat vizsgált problémája a lineáris egyenletrendszerek elméletének. Régi keletű az a törekvés, hogy egy partikuláris megoldás

$$x_0 = Gb \tag{1.3}$$

alakban legyen előállítható alkalmas G mátrix segítségével. Ha megnézzük, milyen feltételek adódnak az ilyen G mátrixra, azt találjuk, hogy mindenekelőtt ki kell elégítenie az

$$AGA = A \tag{1.4}$$

egyenletet. Tehát az ilyen G mátrix megőrzi a közönséges inverz mátrix némely tulajdonságát, ennélfogva úgy tekinthető, mint ennek egyfajta általánosítása. Az (1.4) egyenletet kielégítő mátrix azonban általában nem egyértelmű, tehát a G mátrixra még további feltételeket is előírhatunk. Tartsuk most továbbra is szem előtt, hogy az (1.1) lineáris egyenletrendszer egy partikuláris megoldását kívánjuk (1.4) alakban előállítani egy G általánosított inverz segítségével. A konkrét gyakorlati feladat esetleg a keresett partikuláris megoldással szemben támaszthat követelményeket; például: a megoldás vektor a lehető legkevesebb zérustól különböző komponenst tartalmazzon; vagy a keresett megoldás a lehetséges megoldások között normában a lehető legkisebb legyen;

* Ez a cikk csak az általánosított inverzek elméletével foglalkozik. Kiszámításukkal és alkalmazásukkal a közeljövőben egy másik cikkben akarunk foglalkozni. *(Szerk.)*

vagy esetleg az (1.1) egyenletrendszer nem konzisztens s akkor olyan GB alakú vektort tekintünk megoldásnak (legkisebb négyzet megoldásnak), amely normában legkevésbé tér el az adott jobb oldali b vektortól; esetleg bizonyos meggondolásból a G általánosított inverz rangjára teszünk megkötést stb. E további korlátozások révén más-más tulajdonságú általánosított mátrix inverzekre jutunk.

Mint a gyakorlati példákból is látható, az inverz mátrix általánosításának problémája hosszú múltra tekint vissza. A vizsgálatokban mérföldkövet jelent az 1955-ös év. Ekkor jelent meg Penrose [16] dolgozata, mely olyan termékenyítő hatással volt a kutatásokra, hogy az általánosított inverzek jelenleg már közel négyszáz munkát felölelő irodalma — néhány cikk kivételével — e dolgozat megjelenése óta jött létre.

Penrose nevezetes [16] cikkében a következő tételt bizonyította be: *Az*

$$AGA = A \tag{1}$$

$$GAG = G \tag{2}$$

$$(AG)^* = AG \tag{3}$$

$$(GA)^* = GA \tag{4}$$

egyenleteknek bármely komplex elemű A mátrix esetén egyértelmű megoldása van. (Itt * a transzponált konjugált mátrix képzését indikálja.) Ezen egyértelmű megoldást — mely kvadratikus nemszinguláris A mátrix esetén megegyezik az A^{-1} inverz mátrixszal — Penrose *általánosított inverz*nek (generalized inverse) nevezte. Rado 1956-ban [18] megmutatta, hogy ez megegyezik a Moore által már 1920-ban [13] bevezetett *általános reciprok*kal (general reciprocal), amelynek további vizsgálatát 1935-ben megjelent [14] könyvében folytatta. Ugyanezt az egyértelmű általánosított inverzet definiálta 1951-ben Bjerhammar is [1], azonban csak maximális rangú mátrixokra. Az (1)—(4) egyenletekkel definiált — bármely A mátrixra egyértelműen létező — általánosított inverzre elterjedt a *pseudoinverz*, vagy *Moore—Penrose inverz*, vagy *Bjerhammar—Moore—Penrose inverz* elnevezés és az A^+ jelölés.

Felmerül a kérdés: ha ezt az egyértelmű általánosított inverzet már 1920-ban bevezette Moore, a nagy visszhangot és hatást miért csak a 35 évvel későbbi újrafelfedezés, Penrose dolgozata váltotta ki? A magyarázat talán Penrose tételének világos megfogalmazásában, a pseudoinverzet definiáló (1)—(4) egyenletek plasztikus egyszerűségében található. Penrose tétele szerint négy jól megválasztott feltételi egyenlettel — vagy más szavakkal a közönséges inverz alkalmasan megválasztott négy tulajdonságának megkövetelésével — bármely komplex mátrixhoz egyértelmű általánosított inverz rendelhető. Ez az észrevétel pedig egy sor kérdést támaszthat, mint például: A pseudoinverz a közönséges inverz milyen további tulajdonságát őrzi meg? Ha az (1)—(4) egyenletek közül egyet vagy néhányat elhagyunk, milyen tulajdonságú általánosított mátrix inverzekhez — pontosabban általánosított mátrix inverzek milyen osztályaihoz — jutunk? Ha az (1)—(4) egyenletekkel kifejezett tulajdonságok helyett a közönséges inverz más tulajdonságait követeljük meg, milyen általánosított inverzekhez jutunk; s rendelhető-e ilyen módon tetszőleges mátrixhoz általánosított inverz és az egyértelmű-e? Egyes konkrét feladatok megoldására milyen tulajdonságú általánosított mátrix inverzek a legalkalmasabbak? A kérdéseket hosszan lehetne folytatni. De talán e néhány is érzékelteti, hogy Penrose tétele milyen széles skálájú vizsgálatokat indíthatott el.

A jelen összefoglaló ismertetésnek nem lehet célja az általánosított mátrix inverzekkel kapcsolatos kutatások és eredmények sokrétűségének bemutatása. E tárgykörben ma már három könyv áll az érdeklődők rendelkezésére [3], [17], [19] s ezek mindegyike részletes bibliográfiát is tartalmaz. Ismertetésünkben elsősorban az (1)—(4) feltételi egyenletek bizonyos kombinációival meghatározott — a gyakorlati alkalmazások szempontjából legfontosabb — általánosított inverzekre szorítkozunk, minden esetben megmutatva, hogy a szóbanforgó inverzek milyen gyakorlati feladatok megoldásánál jutnak szerephez. A pseudoinverzzel kapcsolatban csak a legegyszerűbb és legfontosabb összefüggéseket ismertetjük. A pseudoinverz fontos mátrixelméleti szerepét két speciális mátrix osztály bemutatásával próbáljuk érzékeltetni.

A könnyebb érthetőség végett az alább következő 2—5. pontokban ismertetésünkben csak valós mátrixokra szorítkozunk, így e pontokban a * csak a transzponált képzését indikálja. Megjegyezzük azonban, hogy az eredmények komplex mátrixokra úgy vihetők át, hogy transzponált helyett mindig transzponált és konjugált, ortogonális helyett unitér, szimmetrikus helyett hermitikus értendő. A 6. pont rövid áttekintésében pedig meg is tartottuk az eredeti, komplex mátrixokra való, megfogalmazást. Az ismertetendő mátrixok tulajdonságai így jobban érzékelhetők.

2. g-inverzek és reflexív inverzek osztálya

Ha A kvadratikus szinguláris mátrix, vagy téglalap alakú mátrix, akkor az

$$(2.1) \qquad \text{(i) } AG = I \qquad \text{(ii) } GA = I$$

egyenlőségek — ahol I az egységmátrixot jelöli — semmilyen G mátrixszal sem teljesíthetők egyidejűleg. Kvadratikus szinguláris A esetén a (2.1) összefüggések közül sem (i), sem (ii) nem elégíthető ki. Ha A téglalap alakú mátrix, akkor a (2.1) egyenlőségek valamelyike akkor és csak akkor elégíthető ki, ha A maximális rangú. Pontosabban, ha A $m \times n$ típusú ($m \neq n$) és rangja $\varrho(A) = \min(m, n)$, akkor a (2.1) összefüggések közül vagy (i) vagy (ii) mindig kielégíthető. Ha (i) elégíthető ki valamilyen G mátrixszal, akkor ezt *az A jobb oldali inverzének* vagy jobb inverzének, az A mátrixot pedig jobbról *invertálhatónak* nevezzük. Hasonlóan van definiálva a *balról invertálható A* mátrix és annak *bal oldali inverze* vagy bal inverze. Jobb oldali inverzre az A_R^{-1} bal oldali inverze az A_L^{-1} jelölés használatos. A mátrixelméletben az inverz mátrix legrégebben ismert és igen gyakran használt általánosításai a jobb, illetve bal oldali inverzek. Ezért először ezekkel foglalkozunk.

Legyen A $m \times n$ típusú mátrix, melynek rangja $\varrho(A) = m$. Ebben az esetben az AA^* m-edrendű és m-edrangú kvadratikus mátrix. Így az $(AA^*)^{-1}$ inverz létezik, tehát fennáll az

$$I_m = (AA^*)(AA^*)^{-1} = A[A^*(AA^*)^{-1}]$$

összefüggés, ahol I_m az m-edrendű egységmátrixot jelöli. Látható tehát, hogy maximális sorrangú A mátrixnak van A_R^{-1} jobb oldali inverze, hiszen az

$$A_R^{-1} = A^*(AA^*)^{-1}$$

mátrix valóban teljesíti a jobb inverz kritériumát.

Hasonlóan, ha $\varrho(A) = n$, akkor létezik A_L^{-1} bal inverz, amellyel az

$$A_L^{-1}A = I_n$$

egyenlőség teljesül, hiszen pl. az $(A^*A)^{-1}A^*$ mátrix alkalmas választása az A_L^{-1} bal inverznek. Nyilvánvaló, hogy A_L^{-1} és A_R^{-1} csupán azokban a speciális esetekben létezik, ha az $m\times n$ típusú mátrix rangja n vagy m. Ha $n \neq m$, az A_L^{-1} és A_R^{-1} közül csak egyik létezhet, de nem egyértelműen. Igaz ugyanis a következő tétel.

2.1. *Tétel.* Legyen A $m\times n$ típusú mátrix. Ha $\varrho(A) = m$, akkor az $AG = I$ egyenlet általános megoldása

$$G = VA^*(AVA^*)^{-1},$$

ahol V tetszőleges n-edrendű mátrix, amelyre $\varrho(AVA^*) = \varrho(A)$. Ha $\varrho(A) = n$, akkor a $GA = I$ egyenlet általános megoldása

$$G = (A^*VA)^{-1}A^*V,$$

ahol V tetszőleges m-edrendű mátrix, amelyre $\varrho(A^*VA) = \varrho(A)$.

Ha az A mátrix rangja $\varrho(A) = r < \min(m, n)$, akkor a (2.1) egyenlőségek egyike sem elégíthető ki semmilyen G mátrixszal sem. Azonban a (2.1) egyenlőségek következménye a gyengébb

$$AGA = A \tag{2.2}$$

összefüggés, amelyet kvadratikus nemszinguláris A esetén csak a $G = A^{-1}$ inverz elégít ki, így a (2.2) egyenlőséggel meghatározott G mátrix az inverz mátrix egy általánosításának tekinthető. Igaz a következő lemma.

2.1. *Lemma.* Tetszőleges A esetén a (2.2) egyenlőség kielégíthető valamely G mátrixszal.

Legyen ugyanis az A $m\times n$ típusú mátrix rangja $\varrho(A) = r$ és legyen az A egy rang faktorizációja (vagy másként bázis faktorizációja) $A = BC$, ahol tehát a B $m\times r$ típusú, a C $r\times n$ típusú mátrix, amelyeknek rangja $\varrho(B) = \varrho(C) = r$. B tehát teljes oszloprangú, így B_L^{-1} bal inverze létezik, C pedig teljes sorrangú, így C_R^{-1} jobb inverze létezik. Legyen $G = C_R^{-1}B_L^{-1}$, akkor

$$AGA = (BC)(C_R^{-1}B_L^{-1})(BC) = B(CC_R^{-1})(B_L^{-1}B)C = BC = A.$$

2.1. *Megjegyzés.* A 2.1. lemma állítása következik Penrose már idézett tételéből is hiszen (2.2) megegyezik az (1) Penrose egyenlettel, s így a tétel alapján ennek tetszőleges A mátrix esetén van megoldása.

2.1. *Definíció.* Legyen A $m\times n$ típusú mátrix. Az $n\times m$ típusú G mátrixot, amely kielégíti a (2.2) egyenlőséget az A *általánosított inverzének*, vagy *g-inverzének* nevezzük és jelölésére az A^- szimbólumot használjuk.

Az A^- tehát tetszőleges olyan mátrixot jelöl, amely az A mátrixszal kielégíti a (2.2) egyenlőséget. A (2.2) megoldása azonban általában nem egyértelmű, (2.2) megoldásainak összességét jelölje $\mathcal{G}_{(1)}$, ahol az alsó index az (1) Penrose egyenletre utal. Így A^- azt jelenti, hogy $A^- \in \mathcal{G}_{(1)}$. Vizsgáljuk meg most mi jellemzi a $\mathcal{G}_{(1)}$ osztályba tartozó g-inverzeket.

2.2. *Lemma.* Egy G mátrixra vonatkozóan az alábbi állítások egymással ekvivalensek

a) G az A mátrix g-inverze, azaz $G \in \mathcal{G}_{(1)}$;

b) az $F = AG$ mátrix idempotens és $\varrho(F) = trF = \varrho(A)$;

c) a $H = GA$ mátrix idempotens és $\varrho(H) = trH = \varrho(A)$.

Itt trP a $P = [p_{ij}]$ kvadratikus mátrix nyomát — vagy másként spurját — jelöli, azaz $trP = \sum_{i=1}^{n} p_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(P)$, ahol $\lambda_i(P)$ a P mátrix sajátértékeit jelöli. Mint a mátrixelméletből ismeretes egy $P^2 = P$ idempotens vagy projektor mátrix valamennyi zérustól különböző sajátértéke 1-gyel egyenlő, így rangjára valóban igaz a $\varrho(P) = trP$ egyenlőség.

2.3. *Lemma.* Ha A^- az A mátrix g-inverze, akkor

$$\varrho(A^-) \geq \varrho(A). \tag{2.3}$$

A $\mathcal{G}_{(1)}$ osztályba tartozó általánosított mátrix inverzek rangjára tehát a (2.3) egyenlőtlenség érvényes. De ennél többet is mondhatunk: Fisher [7] ugyanis a következő tételt bizonyította.

2.2. *Tétel.* Legyen az A $m \times n$ típusú mátrix rangja $\varrho(A) = r$. Akkor tetszőleges, az $r \leq q \leq \min(m, n)$ egyenlőtlenségnek eleget tevő q egészhez van az A mátrixnak olyan A^- inverze, amelyiknek rangja $\varrho(A^-) = q$.

Mint az a (2.3) egyenlőtlenségből látható, nem szükségképpen igaz, hogy A^- és A egymásnak kölcsönösen g-inverzei. Ahhoz, hogy A és A^- egymásnak kölcsönösen g-inverzei legyenek, az A^- mátrixnak ki kell elégítenie az

$$AGA = A, \ GAG = G \tag{2.4}$$

egyenlőségeket, tehát az (1) és (2) Penrose egyenletet. A Penrose tételből következik, hogy ilyen tulajdonságú g-inverz mindig létezik.

2.2. *Definíció.* Az $n \times m$ típusú G mátrixot az A $m \times n$ típusú mátrix *reflexív-inverzének* nevezzük, ha kielégíti a (2.4) egyenlőségeket.

A reflexív inverzekre az A_r^- jelölést, a reflexív inverzek osztályára pedig a $\mathcal{G}_{(12)}$ jelölést használjuk, az alsó indexszel utalva arra, hogy a $\mathcal{G}_{(12)}$ osztályba tartozó inverzek kielégítik az (1) és (2) Penrose egyenletet.

A g-inverzekre vonatkozó (2.3) egyenlőtlenségből az is következik, hogy ha $A^- \in \mathcal{G}_{(12)}$, akkor $\varrho(A^-) = \varrho(A)$. Igaz azonban ennek a megfordítása is, pontosabban a következő tétel.

2.3. *Tétel.* Az A mátrix A^- inverze akkor és csak akkor reflexív inverz, ha $\varrho(A^-) = \varrho(A)$.

2.2. *Megjegyzés:* A 2.2. és 2.3. tétel következménye, hogy ha A maximális rangú, azaz $\varrho(A) = \min(m, n)$, akkor A tetszőleges g-inverze szükségképpen reflexív.

Felmerül a kérdés, hogy egy A^- g-inverz ismeretében miként konstruálható egy reflexív inverz. Erre ad választ a következő lemma.

2.4. *Lemma.* Az A mátrix G inverze akkor és csak akkor reflexív inverz, ha

$$G = A^-AA^-$$

alakban írható valamely A^- g-inverz segítségével.

Mint azt már a bevezetőben is láttuk, a g-inverzek a konzisztens lineáris egyenletrendszerek megoldásánál jutnak szerephez. Erre vonatkozik a következő tétel.

2.4. *Tétel.* Legyen A $m\times n$ típusú mátrix és legyen A^- az A mátrix tetszőleges g-inverze, továbbá $H = A^-A$. Akkor

a) az $Ax = 0$ homogén egyenlet általános megoldása $x = (I - H)z$, ahol z tetszőleges vektor;

b) az $Ax = b$ konzisztens inhomogén egyenlet általános megoldása

$$x = A^-b + (I - H)z,$$

ahol z tetszőleges vektor;

c) annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $Ax = b$ egyenlet konzisztens legyen, az

$$AA^-b = b$$

egyenlőség teljesülése.

Az $Ax = b$ konzisztens egyenlet egy partikuláris megoldását tehát A^-b alakban állíthatjuk elő valamely A^- g-inverz segítségével. Ha a megoldásokra további megkötéseket teszünk, ezzel leszűkítjük a keresett partikuláris megoldásokat A^-b alakban előállító g-inverzek osztályát. Megkötést tehetünk például a megoldás vektor nemzérus komponenseinek számára.

2.3. *Definíció.* Az $Ax = b$ konzisztens egyenlet x_b megoldását *bázismegoldás*nak nevezzük, ha

(i) $Ax_b = b$, tehát x_b megoldás és

(ii) az x_b vektornak legfeljebb r nemzérus komponense van, ahol $r = \varrho(A)$.

A bázismegoldást előállító inverz fogalmát Rosen [21] vezette be. Jelölésére az A_b^- szimbólum használatos. Az A_b^- inverzek jellemzését adja a következő lemma.

2.5. *Lemma* (lásd [18] 30. o.). Legyen az A $m\times n$ típusú mátrix rangja $\varrho(A) = r$. Az A^- g-inverz az $Ax = b$ konzisztens egyenletrendszer egy bázismegoldását állítja elő, ha van olyan P permutációs mátrix, amelyet

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

particionált alakban írva a P_1 $r\times n$ és a P_2 $(n - r)\times n$ típusú mátrix úgy, hogy $P_1A^- = (AP_1')_L^{-1}$, $P_2A^-A = 0$.

Végezetül megmutatjuk, hogyan konstruálható egy A_b^- inverz. Mivel $\varrho(A) = r$, az A oszlopai átrendezhetők úgy, hogy az első r oszlop lineárisan független legyen. Ez az átrendezés egy alkalmas P permutációs mátrixszal való jobb oldali szorzás útján áll elő. Jelölje az átrendezett mátrixot B, akkor

$$AP = B = [B_1B_2],$$

ahol B_1 $m\times r$ és B_2 $m\times(n - r)$ típusú. Legyen most

$$B_b^- = G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (B_1)_L^{-1} \\ G_2 \end{bmatrix},$$

ahol G_2 tetszőleges $(n-r)\times m$ típusú mátrix, amelyre $G_2B=0$, akkor

$$A_b^- = P'B_b^-.$$

Hasonlóan konstruálható olyan g-inverz is, amely az $Ax=b$ konzisztens egyenlet olyan partikuláris megoldását állítja elő, amelynek legfeljebb $s>r$ nemzérus komponense van.

3. A g-inverzek geometriai jellemzése

Bevezetésül a lineáris algebra néhány fogalmát és a szükséges jelöléseket ismertetjük.

Az A $m\times n$ típusú mátrix $\mathcal{R}(A)$ oszlopterén az A oszlopvektorai által felfeszített lineáris teret értjük. Jelölje a valós szám n-esek lineáris terét $\mathcal{E}^n$. Akkor az $\mathcal{R}(A)$ lineáris tér az $\mathcal{E}^m$ tér azon vektoraiból áll, amelyek Ax alakban állíthatók elő valamely x vektorral. Ha az A mátrixot mint az $\mathcal{E}^n$ teret az $\mathcal{E}^m$ térre leképező lineáris transzformációt tekintjük, akkor $\mathcal{R}(A)$ e transzformáció képtere. Az A mátrix $\mathcal{N}(A)$ zérustere az $\mathcal{E}^n$ tér azon vektorainak összessége, amelyeket a transzformáció az $\mathcal{E}^m$ tér zérusvektorába visz.

Legyen adva egy $\mathcal{V}$ lineáris tér és annak két altere $\mathcal{S}$ és $\mathcal{T}$. Ha $\mathcal{S}$ és $\mathcal{T}$ diszjunktak — tehát $\mathcal{S}\cap\mathcal{T}$ közös részük csak a zérus vektorból áll —, akkor összegüket *direkt összeg*nek nevezzük. Az $\mathcal{S}\oplus\mathcal{T}$ direkt összeg szintén altér, amelynek vektorai egyértelműen állíthatók elő $\sigma+\tau$ alakban, ahol $\sigma\in\mathcal{S}$, $\tau\in\mathcal{T}$. Speciálisan, ha $\mathcal{S}\oplus\mathcal{T}=\mathcal{V}$, akkor $\mathcal{T}$ az $\mathcal{S}$ *komplementuma* vagy *komplementer altere* a $\mathcal{V}$ térben. Az $\mathcal{S}\oplus\mathcal{T}$ direkt összegről ekkor azt mondjuk, hogy az a $\mathcal{V}$ *tér egy direkt felbontása.*

Legyen a $\mathcal{V}$ térben skaláris szorzat (belső szorzat) értelmezve. Ha most $\mathcal{S}$ ismét a $\mathcal{V}$ altere, akkor a $\mathcal{V}$ azon vektorainak összessége, amelyek ortogonálisak az $\mathcal{S}$ valamennyi vektorára, szintén alteret alkotnak, amelyet $\mathcal{S}^\perp$ jelöl s amelyet *az $\mathcal{S}$ ortogonális komplementumá*nak nevezünk. Nyilván $\mathcal{S}\oplus\mathcal{S}^\perp$ a $\mathcal{V}$ egy direkt felbontása: $\mathcal{S}\oplus\mathcal{S}^\perp=\mathcal{V}$.

Legyen P n-edrendű r-edrangú idempotens mátrix (vagy projektor mátrix), tehát $P^2=P$. Legyen P oszloptere $\mathcal{R}(P)$ és zérustere $\mathcal{N}(P)$. A P idempotens tulajdonságából következik, hogy $\mathcal{R}(P)\oplus\mathcal{N}(P)=\mathcal{E}^n$, így tetszőleges $x\in\mathcal{E}^n$ vektor egyértelműen írható $x=\varrho+\nu$ alakban, ahol $\varrho\in\mathcal{R}(P)$, $\nu\in\mathcal{N}(P)$. A P odempotens mátrix az $\mathcal{E}^n$ tér olyan vetítő transzformációja, amely a tér bármely $x=\varrho+\nu\big(\varrho\in\mathcal{R}(P),\ \nu\in\mathcal{N}(P)\big)$ vektorához a ϱ vektort rendeli, azaz az $\mathcal{E}^n$ teret az $\mathcal{R}(P)$ altérre vetíti (innen a projektor mátrix elnevezés) s a vetítés iránya az $\mathcal{N}(P)$ altér. Ha fel akarjuk tüntetni, hogy egy adott P projektor mátrix milyen $\mathcal{S}$ altérre vetít és milyen $\mathcal{T}$ irányú vetítéssel — ahol persze $\mathcal{S}\oplus\mathcal{T}=\mathcal{E}^n$ és $\mathcal{S}=\mathcal{R}(P)$, $\mathcal{T}=\mathcal{N}(P)$, akkor erre a $P=P_{\mathcal{S}\mathcal{T}}$ jelölést használjuk. Speciálisan, ha $\mathcal{T}=\mathcal{S}^\perp$, azaz a vetítés iránya ortogonális, az $\mathcal{S}$ altérre, akkor a mátrix szimmetrikus, tehát a $P=P_{\mathcal{S}\mathcal{S}^\perp}$ mátrixra $P^*=P$ igaz.

Ha a P n-edrendű és r-edrangú projektor mátrix egy rang faktorizációja $P=ST$ — ahol tehát S $n\times r$ típusú és T $r\times n$ típusú mátrix és $\mathcal{R}(P)=\mathcal{R}(S)$, $\mathcal{N}(P)=\mathcal{N}(T)$ —, akkor $TS=I_r$. Végül pedig ha $P=P_{\mathcal{S}\mathcal{T}}$ n-edrendű r-edrangú idempotens mátrix — amely tehát az $\mathcal{S}$ altérre $\mathcal{T}$ irányban vetít —, akkor az $I-P$ mátrix is idempotens, mégpedig $(n-r)$-edrangú, amely a $\mathcal{T}$ altérre $\mathcal{S}$ irányban vetít, azaz $I-P=P_{\mathcal{T}\mathcal{S}}$.

3.1. *Megjegyzés.* Röviden utalni szeretnénk arra, hogy a projektor mátrixok jutnak fontos szerephez a lineáris feltételű konkáv programozási feladatnak a gradiens vetítési módszerrel történő megoldásánál is [22]. Ez az eljárás egy módosulata az eredeti gradiens módszernek, amely szerint egy adott x_0 pontból kiindulva egy $f(x)$ nemlineáris függvény maximuma helyéhez konvergáló $x_0, x_1, x_2, \ldots$ pontsorozat megkonstruálásánál az x_i pontból az $f(x)$ függvény x_i pontbeli gradiense irányában (amely irányban az $f(x)$ függvény a leggyorsabban változik) választjuk az x_{i+1} pontot. Hogy a lineáris feltételekből adódó konvex tartományból ne jussunk ki, ezt az eljárást ekkor úgy módosítjuk, hogy a gradiens helyett ennek egy $\mathcal{S}$ altérre történő ortogonális vetületét használjuk, ahol az $\mathcal{S}$ alteret a konvex tartományt határoló, az x_i pontot tartalmazó hipersíkok valamely lineárisan független rendszerének közös része (metszete) határozza meg. A továbblépés irányát az $f(x)$ konkáv függvény x_i pontbeli gradienséből, tehát egy $P_{\mathcal{S}\mathcal{S}^\perp}$ alakú projektor mátrixszal való szorzással kapjuk.

Vizsgáljuk most az általánosított inverzek geometriai jelentését. Legyen A $m\times n$ típusú r-edrangú mátrix, melynek oszloptere $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}^m$ és zérustere $\mathcal{N} \subset \mathcal{E}^n$. Ha az $n\times m$ típusú G mátrix az A mátrixnak egy g-inverze, akkor a 2.2. lemma szerint az $F = AG$, ill. a $H = GA$ m-edrendű, ill. n-edrendű s mindkettő r-edrangú idempotens mátrix. Ebből következik, hogy az F oszloptere megegyezik az A oszlopterével, zérustere pedig tartalmazza a G zérusterét; a H oszloptere benne van a G oszlopterében, zérustere pedig megegyezik az A zérusterével, azaz igazak a

$$\mathcal{R}(F) = \mathcal{R} \tag{3.1}$$
$$\mathcal{N}(H) = \mathcal{N}$$

és

$$\mathcal{N}(F) \supseteq \mathcal{N}(G) \tag{3.2}$$
$$\mathcal{R}(H) \subseteq \mathcal{R}(G)$$

relációk. Abban az esetben, ha G reflexív inverz, tehát ha $\varrho(G) = r$, akkor a (3.2) tartalmazási relációkban is az egyenlőség jele érvényes. A (3.1) és (3.2) alapján az F, ill. H projektor mátrix a következőképpen jellemezhető:

$$\begin{aligned} F &= AG = P_{\mathcal{R}\mathcal{N}(F)}, & \mathcal{N}(F) &\supseteq \mathcal{N}(G) \\ H &= GA = P_{\mathcal{R}(H)\mathcal{N}}, & \mathcal{R}(H) &\subseteq \mathcal{R}(G). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Az F projektor mátrix tehát az $\mathcal{E}^m$ teret az adott $\mathcal{R}$ altérre vetíti, a vetítési iránya azonban *függ a G általánosított inverz megválasztásától*, míg a H projektor mátrix esetében adott a vetítés $\mathcal{N}$ iránya s az altér, amelyre H az $\mathcal{E}^n$ teret vetíti, *függ a G általánosított inverz megválasztásától.*

Felmerül ezután a kérdés: ha adva van az A $m\times n$ típusú és r-edrangú mátrix, melynek oszloptere $\mathcal{R}$ és zérustere $\mathcal{N}$, akkor tetszőlegesen megválasztva a $\mathcal{Q}$ és $\mathcal{M}$ altereket úgy, hogy $\mathcal{R} \oplus \mathcal{Q} = \mathcal{E}^m$ és $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{E}^n$ teljesüljön, van-e az A mátrixnak olyan G általánosított inverze, amelyekkel fennállnak a kívánt

$$\begin{aligned} F &= AG = P_{\mathcal{R}\mathcal{Q}}, & \mathcal{Q} &\supseteq \mathcal{N}(G) \\ H &= GA = P_{\mathcal{M}\mathcal{N}}, & \mathcal{M} &\subseteq \mathcal{R}(G) \end{aligned}$$

relációk. A kérdésre adható igenlő választ itt Egerváry [4] és Langenhope [11] megfogalmazásában közöljük. Eredményüket mindketten reflexív inverzekre bizonyították.

3.1. *Tétel.* (Egerváry): Ha az adott r-edrangú A $m\times n$ típusú mátrix bázisfaktorokra bontott alakja

$$A = RN$$

(ahol tehát R $m\times r$ típusú, N pedig $r\times n$ típusú mátrix és $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(R)$, $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(N)$, akkor az

$$(AG)^2 = AG$$

illetve

$$(GA)^2 = GA$$

összefüggéssel definiált r-edrangú G inverz mátrix

$$G = M(NM)^{-1}(QR)^{-1}Q$$

$$= M(QAM)^{-1}Q$$

alakban állítható elő, ahol M és Q tetszőleges, csupán a $|MN| \neq 0$, $|QR| \neq 0$ feltételeket kielégítő mátrix ($|X|$ az X kvadratikus mátrix determinánsát jelöli).

Geometriailag szemléletesebbek Langenhope alábbi tételei.

3.2. *Tétel.* (Langenhope): Legyen A $m\times n$ típusú r-edrangú mátrix, amelynek oszloptere $\mathcal{R}$ és zérustere $\mathcal{N}$. Legyen $\mathcal{Q}$ az $\mathcal{R}$ tetszőleges komplementer altere az $\mathcal{E}^m$ térben: $\mathcal{R} \oplus \mathcal{Q} = \mathcal{E}^m$ és $\mathcal{M}$ az $\mathcal{N}$ tetszőleges komplementer altere az $\mathcal{E}^n$ térben: $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{E}^n$. Akkor van olyan G mátrix, amely kielégíti az

$$AH = P_{\mathcal{R}\mathcal{Q}} \tag{3.4}$$

és

$$GA = P_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \tag{3.5}$$

egyenlőségeket. Ha $A = RN_0$ az A mátrix egy rang faktorizációja (tehát R $m\times r$ típusú, N_0 pedig $r\times n$ típusú mátrix) Q_0 pedig a $P_{\mathcal{R}\mathcal{Q}} = RQ_0$ felbontásából, M pedig a $P_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = MN_0$ felbontásából van meghatározva, akkor

$$G = MQ_0 \tag{3.6}$$

kielégíti a (3.4) és (3.5) egyenlőséget.

3.3. *Tétel.* (Langenhope): A (3.6) alatti $G = MQ_0$ mátrix csupán a $\mathcal{Q}$ és $\mathcal{M}$ altér megválasztásától függ, s nem függ attól, hogy az A rang faktorizációjánál milyen R mátrixot választottunk.

Ha az R mátrixot már megválasztottuk úgy, hogy $\mathcal{R}(R) = \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}$ teljesüljön, akkor az $A = RN_0$ felbontásból N_0 egyértelműen meghatározható. A $\mathcal{Q}$ és $\mathcal{M}$ tetszőleges választása mellett most már R és N_0 ismeretében a $P_{\mathcal{R}\mathcal{Q}} = RQ_0$ és $P_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = MN_0$ összefüggésből a Q_0 és M mátrix is egyértelműen meghatározható. Vegyük figyelembe, hogy a $P_{\mathcal{R}\mathcal{Q}} = RQ_0$ alapján $Q_0R = I_r$, ill. a $P_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = MN_0$ alapján $N_0M = I_r$, így egyszerű behelyettesítés után belátható, hogy a $G = MQ_0$ mátrix valóban kielégíti az (3.4) és (3.5) egyenlőségeket és kielégíti az

$$AGA = A, \quad GAG = G$$

összefüggéseket is, tehát G az A reflexív inverze. Az így konstruált reflexív inverz oszloptere $\mathcal{R}(G) = \mathcal{M}$ és zérustere $\mathcal{N}(G) = \mathcal{Q}$, amit az

$$A^-_{\mathcal{M}\mathcal{Q}} = G = MQ_0 \tag{3.7}$$

jelöléssel fejezzük ki. Mivel $A^-_{\mathcal{M}\mathcal{Q}}$ reflexív inverz, így $\varrho(A^-_{\mathcal{M}\mathcal{Q}}) = \varrho(A) = r$. Az $A^-_{\mathcal{M}\mathcal{Q}}$ inverze vonatkozik a következő nagyon fontos tétel:

3.4. *Tétel.* (Langenhope): A (3.7) alatti $A^-_{\mathcal{M}\mathcal{Q}}$ mátrix az

$$AG = P_{\mathcal{R}\mathcal{Q}}, \quad GA = P_{\mathcal{M}\mathcal{N}}, \quad \varrho(G) = \varrho(A)$$

egyenletek egyértelmű megoldása.

3.2. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy az $A^-_{\mathcal{M}\mathcal{Q}}$ inverz a speciális $\mathcal{Q} = \mathcal{R}^\perp$, $\mathcal{M} = \mathcal{N}^\perp$ választás esetén megegyezik a pseudoinverzzel, azaz

$$A^-_{\mathcal{N}^\perp\mathcal{R}^\perp} = A^+.$$

Így a 3.4. tétel alapján az A^+ pseudoinverz egyértelmű megoldása a

$$AG = P_{\mathcal{R}\mathcal{R}^\perp}, \quad GA = P_{\mathcal{N}^\perp\mathcal{N}}, \quad \varrho(G) = \varrho(A)$$

egyenleteknek. Ezek tehát az (1)—(4) Penrose egyenletekkel ekvivalensek. Moore is lényegében így definiálta az általa „general reciprocal"-nak nevezett pseudoinverzet.

Langenhope eredményei arra szolgáltatnak példát, hogy tetszőleges A mátrixhoz egyértelműen létező általánosított inverzet többféleképpen lehet definiálni.

Ha a 3.2.—3.4. tételek feltételeiből elhagyjuk a $\varrho(G) = \varrho(A)$ megkötést, akkor a megoldás általában nem egyértelmű. Ekkor a következő tétel igaz.

3.5. *Tétel.* Legyen A $m\times n$ típusú r-edrangú mátrix, melynek oszloptere $\mathcal{R}$ és zérustere $\mathcal{N}$. Legyen $\mathcal{Q}$ az $\mathcal{R}$ tetszőleges komplementer altere az $\mathcal{E}^m$ térben: $\mathcal{R} \oplus \mathcal{Q} = \mathcal{E}^m$ és $\mathcal{M}$ az $\mathcal{N}$ tetszőleges komplementer altere az $\mathcal{E}^n$ térben: $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{E}^n$. Az A mátrixnak mindig van olyan G általánosított inverze, amelyre

$$\mathcal{R}(G) \supseteq \mathcal{M}, \quad \mathcal{N}(G) \subseteq \mathcal{Q}, \quad \varrho(G) \geq \varrho(A).$$

4. További általánosított inverzek

A 2. pontban már vizsgáltuk a $\mathcal{G}_{(1)}$ és a $\mathcal{G}_{(12)}$ inverz osztályt. Most azt vizsgáljuk meg, hogy milyen tulajdonságú általánosított inverzekhez jutunk, ha az (1)—(4) Penrose egyenletek más kombinációinak kielégítését követeljük meg.

A $\mathcal{G}_{(14)}$ és a $\mathcal{G}_{(124)}$ inverz osztály

Jelölje $\mathcal{G}_{(14)}$, az A $m\times n$ típusú mátrix azon általánosított inverzeinek osztályát, amelyek kielégítik az

$$AGA = A, \quad (GA)^* = GA \tag{4.1}$$

feltételeket, azaz az (1) és (4) Penrose egyenletet.

A 3. pont alapján a (4.1) feltételek geometriai megfogalmazása:

$$H = GA = P_{\mathcal{N}^\perp\mathcal{N}}, \quad \mathcal{R}(G) \supseteq \mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^*), \tag{4.2}$$

azaz olyan legyen a G általánosított inverz, hogy oszloptere tartalmazza az A zérusterének ortogonális komplementumát, tehát az A^* oszlopterét. Ebből már egyszerűen adódik a következő lemma állítása.

4.1. *Lemma.* Az A mátrix G általánosított inverze akkor és csak akkor tartozik a $\mathcal{G}_{(14)}$ osztályba, ha

$$GAA^* = A^*$$

teljesül.

Érdemes azt is megnézni, hogy az (1) Penrose egyenlet mellett a (4) egyenlet teljesülése milyen, a lineáris egyenletrendszerek megoldásánál felhasználható tulajdonságot kölcsönöz egy g-inverznek.

Már láttuk, hogy az $Ax = b$ konzisztens egyenletrendszer bármely megoldása $x = Gb$ alakban állítható elő, ahol $G \in \mathcal{G}_{(1)}$. Felmerülhet a kérdés, vajon megválasztható-e a G inverz a b vektortól függetlenül úgy, hogy bármely, konzisztens egyenletrendszert adó b vektor esetén, az $Ax = b$ megoldásai között az ezen G mátrixszal előállított Gb megoldás minimális normájú, azaz

$$\min_{Ax=b} \| x \| = \| Gb \|.$$

Itt $\| x \|$ az x vektor euklideszi normáját jelöli, tehát

$$\| x \| = \sqrt{x^* x}$$

ahol $x^* y$, az $x, y \in \mathcal{E}^n$ vektorok skaláris szorzata. A kérdésre a következő tétel ad választ.

4.1. *Tétel.* ([19] 45. o.): Legyen G az A mátrixnak olyan g-inverze, hogy Gb minimális normájú megoldása az $Ax = b$ egyenletnek bármely $b \in \mathcal{R}(A)$ esetén. Ehhez szükséges és elegendő, hogy G kielégítse az

$$AGA = A, \qquad (GA)^* = GA$$

feltételeket.

Az $Ax = b$ konzisztens egyenletrendszer általános megoldása a 2.4. tétel szerint ugyanis $Gb + (I - GA)z$, ahol $G \in \mathcal{G}_{(1)}$ és $z \in \mathcal{E}^n$ tetszőlegesek. Legyen most Gb minimális normájú bármely konzisztens egyenleteket adó b esetén, azaz

$$\| Gb \| \leq \| Gb + (I - GA)z \| \quad \forall b \in \mathcal{R}(A),\ z \in \mathcal{E}^n,$$

vagy a b helyére Ax-et írva

$$\| GAx \| \leq \| GAx + (I - GA)z \| \quad \forall x, z \in \mathcal{E}^n.$$

A norma definíciójat figyelembe véve ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$(GAx)^*(I - GA)z) = 0 \quad \forall x, z \in \mathcal{E}^n.$$

Ebből a

$$(GA)^*(I - GA) = 0$$

feltételt kapjuk, ami ekvivalens a $(GA)^* = GA$ feltétellel.

4.1. *Megjegyzés.* Vegyük észre, hogy bármely $G \in \mathcal{G}_{(14)}$ általánosított inverzzel szorozzuk balról az A mátrixot, a $H = GA = P_{\mathcal{R}^\perp \mathcal{R}}$, tehát mindig ugyanaz a hermitikus projektor mátrix. Ennek következménye az is, hogy bármely rögzített $b \in \mathcal{R}(A)$ esetén a $\| Gb \|$ norma minden $G \in \mathcal{G}_{(14)}$ inverzzel ugyanaz.

Ha egy $G \in \mathcal{G}_{(14)}$ inverzre speciálisan $\varrho(G) = \varrho(A)$, akkor G kielégíti az (1) (2) és (4) Penrose egyenletet. Az ilyen $\mathcal{G}_{(124)}$ osztálybeli inverzre szokásos a *balról gyengén általánosított inverz* elnevezés és az A_w^- jelölés. Az A mátrixnak egy A_w^- inverzét könnyen előállíthatjuk az AA^* mártix egy $(AA^*)^-$ inverzének ismeretében. Az

$$(4.3) \qquad A_w^- = A^*(AA^*)^-$$

előállítás Urquharttól [24] származik.

4.2. *Megjegyzés.* Láttuk már, hogy ha az A $m \times n$ típusú mártix maximális rangú: $r = \min(m, n)$, akkor minden A^- inverz egyben A_r^- reflexív inverz. Nagyon könnyen konstruálható azonban A_w^- inverz is.

a) Ha $r = n$, azaz A maximális oszloprangú, akkor bármely A^- inverz bal inverz, hiszen $H = A^-A$ r-edrendű és r-edrangú idempotens mátrix, így szükségképpen az egységmátrix. Az egységmátrix azonban hermitikus, így minden A^- inverzre $A^-A = I_r = (A^-A)^*$, tehát az A bármelyik általánosított inverze balról gyengén általánosított: $A^- = A_w^-$.

b) Ha $r = m$, azaz A maximális sorrangú, akkor az AA^* mátrix nemszinguláris, tehát ebben az esetben a (4.3) előállítás alapján az A mátrixnak az

$$A_w^- = A^*(AA^*)^{-1}$$

az egyetlen balról gyengén általánosított inverze, így ez megegyezik az A^+ pseudoinverzzel.

A $\mathcal{G}_{(13)}$ és $\mathcal{G}_{(123)}$ inverz osztály.

A $\mathcal{G}_{(13)}$ inverz osztály az A mátrix azon általánosított inverzeiből áll, amelyek kielégítik az

$$(4.4) \qquad AGA = A, \quad (AG)^* = AG$$

feltételeket, azaz az (1) és (3) Penrose egyenletet.

A (4.4) feltételek geometriai megfogalmazása:

$$(4.5) \qquad F = AG = P_{\mathcal{R}\mathcal{R}^\perp} \quad \mathcal{N}(G) \subseteq \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*),$$

vagyis a G általánosított inverz olyan legyen, hogy zérusterét tartalmazza az A oszlopterének ortogonális komplementuma, azaz az A^* zérustere. Ebből már egyszerűen adódik a következő lemma.

4.2. *Lemma.* Az A mátrix G általánosított inverze akkor és csak akkor tartozik a $\mathcal{G}_{(13)}$ osztályba ha

$$A^*AG = A^*$$

teljesül.

A $\mathcal{G}_{(13)}$ és $\mathcal{G}_{(13)}$ inverz osztály analóg viselkedése folytán várható, hogy a $\mathcal{G}_{(13)}$ osztályba tartozó inverzeknek is van egy jellegzetes, a gyakorlati alkalmazások szempontjából fontos tulajdonsága. Ez valóban így van. A lineáris becsléselméletben, idősorok kiegyenlítésénél stb. fellépő $Ax = b$ egyenletek inkonzisztensek, azaz $b \notin \mathcal{R}(A)$. Az $Ax = b$ inkonzisztens egyenletrendszer *legkisebb négyzet megoldásán* olyan $\hat{x}$ vektort értünk, amelyre

$$\| A\hat{x} - b \| = \inf \| Ax - b \|,$$

tehát az $A\hat{x}$ eltérése a b vektorból normában a lehető legkisebb. Természetes az a törekvés, hogy a legkisebb négyzet megoldásokat is Gb alakban állítsuk elő alkalmas G mátrixok segítségével. Hogy milyen feltételeket kell kielégítenie egy ilyen mátrixnak — amelyről még nem tudjuk, vajon általános inverz-e —, ezt a következő tétel mondja meg.

4.2. *Tétel.* ([19] 48. o.): Legyen G olyan mátrix, hogy tetszőleges $b \in \mathscr{E}^n$ esetén Gb legkisebb négyzet megoldása az $Ax = b$ egyenletnek. Ehhez szükséges és elegendő, hogy G kielégítse az

$$AGA = A, \quad (AG)^* = AG$$

feltételeket.

A bizonyítás hasonló a 4.1. tétel bizonyításához.

4.3. *Megjegyzés.* A $G \in \mathscr{G}_{(13)}$ általánosított inverzekre az a figyelemre méltó, hogy itt az $F = AG = P_{\mathscr{R}\mathscr{R}^\perp}$ idempotens mátrix mindig ugyanaz. Ennek következménye a legkisebb négyzet megoldást előállító tulajdonság, ill. az, hogy a $\| AGb - b \|$ norma rögzített $b \in \mathscr{E}^m$ esetén minden $G \in \mathscr{G}_{(13)}$ mátrixszal ugyanaz.

A $\mathscr{G}_{(123)}$ inverz osztályt a $\mathscr{G}_{(13)}$ osztályba tartozó reflexív inverzek alkotják, tehát olyan mátrixok, amelyek kielégítik az (1), (2) és (3) Penrose egyenletet. Ezekre elterjedt a *jobbról gyengén általánosított inverz* elnevezés és az A_n^- jelölés. A (4.3) előállítás analogonja jobbról gyengén általánosított inverz előállítására a

$$A_n^- = (A^*A)^- A^* \tag{4.4}$$

kifejezés, amelyet Fisher [7] adott meg először.

4.4. *Megjegyzés.* Maximális rangú A $m \times n$ típusú mátrixok jobbról gyengén általánosított inverzeiről a következők mondhatók.

a) Ha $r = m$, azaz A maximális sorrangú, akkor bármely A^- inverz egyben jobbról gyengén általánosított is.

b) Ha $r = n$, azaz A maximális oszloprangú, akkor a (4.4) előállítással kapott

$$A_n^- = (A^*A)^{-1}A^*$$

mátrix az egyetlen jobbról gyengén általánosított inverz s így ez szükségképpen az A^+ pseudoinverz.

Végezetül csak megemlítjük, hogy $\mathscr{G}_{(2)}$ és $\mathscr{G}_{(234)}$ osztálybeli inverzek vizsgálatával Fisher [7] és Meyer [12] foglalkozott.

5. Az A^+ pseudoinverz

Most a pseudoinverzre vonatkozó legegyszerűbb és legfontosabb összefüggéseket tekintjük át röviden.

5.1. *Lemma.* Egy G mátrixra vonatkozóan az alábbi feltételek egymással ekvivalensek

$$AGA = A, \quad GAG = G, \quad (AG)^* = AG, \quad (GA)^* = GA; \tag{5.1}$$

$$A^*AG = A^*, \quad G^*GA = G^*. \tag{5.2}$$

E lemma alapján tehát az A^+ pseudoinverz az (5.2) egyenletek egyértelmű oldása. A következő lemma a pseudoinverz legegyszerűbb tulajdonságait foglalja össze. Az állítások egy részét már Penrose bizonyította, más részük későbbi eredmény.

5.2. *Lemma.* Az A mátrix A^+ pseudoinverzére az alábbi állítások igazak:

(i) $(A^+)^+ = A$,

(ii) $(A^*)^+ = (A^+)^*$,

(iii) $(AA^*)^+ = (A^+)^*A^+$,

(iv) $A^+A = AA^+$, ha A normális mátrix, azaz $AA^* = A^*A$,

(v) $(A^n)^+ = (A^+)^n$, ha A normális,

(vi) $(AA^*)^+AA^* = AA^+$,

(vii) $(UAV)^+ = V^*A^+U^*$, ha U és V ortogonális mátrixok, azaz $U^{-1} = U^*$, $V^{-1} = V^*$,

(viii) $(\lambda A)^+ = \lambda^{-1}A^+$, ha $\lambda \neq 0$,

(ix) $A^+ = (A^*A)^+A^*$,

(x) B $m\times r$ típusú r-edrangú és C $r\times n$ típusú r-edrangú, akkor $(BC)^+ = C^+B^+$,

(xi) Ha $A = \Sigma A_i$, ahol $A_iA_j^* = 0$ és $A_i^*A_j = 0$ $(i \neq j)$, akkor $A^+ = \Sigma A_i^+$,

(xii) $A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+$.

Lényegesnek tartjuk megemlíteni a közönséges inverznek azt a két fontos tulajdonságát, amellyel a pseudoinverz általában nem rendelkezik.

1. Ha A és B nemszinguláris mátrixok, akkor $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, azaz szorzat inverze a fordított sorrend szabálya szerint tényezőnként számolható. Ez a szabály a pseudoinverzre nem érvényes, tehát általában $(AB)^+ \neq B^+A^+$.

2. Ismeretes a kvadratikus nemszinguláris mátrixok spektrális tulajdonsága: ha $Au = \lambda u$, akkor $A^{-1}u = \lambda^{-1}u$, azaz (i) az A és A^{-1} sajátértékei egymás reciprokai és (ii) az A és A^{-1} mátrixának ugyanaz a sajátvektor rendszere. A pseudoinverzre általában sem a (i) sem a (ii) tulajdonság nem igaz. Külön kutatási terület, hogy mi jellemzi azokat a mátrixokat, amelyeknek valamely típusú inverzére az (i) és (ii) valamelyike teljesül (lásd pl. [20]). A spektrális tulajdonság megkövetésével is definiálhatók azonban általánosított inverzek (lásd pl. [6], [8] és [2] 26. o.). E spektrális inverzek — legalább is egyelőre — csupán elméleti szempontból érdekesek; ismertetésüket itt mellőzzük.

Az előző pontban láttuk, hogy az $\mathcal{G}_{\mathcal{J}(14)}$ osztályba tartozó inverzek segítségével az $Ax = b$ konzisztens egyenletrendszerek legkisebb normájú megoldásai, míg a $\mathcal{G}_{\mathcal{J}(13)}$ osztályba tartozó inverzekkel az az $Ax = b$ inkonzisztens egyenletrendszerek legkisebb négyzet megoldásai állíthatók elő. Feltehetjük azt a kérdést is, vajon van-e olyan általánosított inverz, amelynek segítségével minimális normájú legkisebb négyzet megoldás állítható elő. A megoldás az A^+ pseudoinverztől várható, minthogy $A^+ \in \mathcal{G}_{\mathcal{J}(13)}$ és $A^+ \in \mathcal{G}_{\mathcal{J}(14)}$. Valóban igaz a következő tétel.

5.1. *Tétel.* Legyen a $G \in \mathcal{G}_{(13)}$ általánosított inverz olyan, hogy Gb minimális normájú legkisebb négyzet megoldása az $Ax = b$ inkonzisztens egyenletnek, azaz

$$\| Gb \|_n \leq \| x \|_n \quad Ax \in \{x : \| \forall x - b \|_m \leq \| Az - b \|_m \quad \forall z \in \mathcal{E}^n\},$$

ahol $\| \cdot \|_n$, ill. $\| \cdot \|_m$ jelölés arra utal, hogy a normák az $\mathcal{E}^n$, ill. $\mathcal{E}^m$ térben értendők. Ehhez szükséges és elegendő, hogy $G = A^+$ legyen, azaz teljesüljenek az

$$AGA = A, \quad GAG = G, \quad (AG)^* = AG, \quad (GA)^* = GA$$

feltételek.

6. EP$_r$ mátrixok, parciális izometriák

A mátrixelméletben a pseudoinverz fontos szerepet kapott egyes speciális mátrixok jellemzésénél is. Erre mutatunk be röviden két példát.

A) *Az EP_r mátrixok*

E mátrixokat Schwerdtfeger vezette be 1950-ben megjelent könyvében (lásd [23] 130. o.) eredetileg a szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok közös általánosításaiként. Az alább következő, ma elterjedt definícióban az EP_r mátrixok a hermitikus és ferdén hermitikus mátrixok közös általánosításainak tekinthetők.

6.1. *Definíció.* A kvadratikus r-edrangú A mátrixot EP_r mátrixnak mondjuk, ha $AX = 0$, akkor és csak akkor, ha $A^*X = 0$, azaz ha

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*).$$

Tehát az EP_r mátrixok éppen azok a mátrixok, amelyeknek zérustere megegyezik transzponált konjugáltjuk zérusterével, ami valóban közös tulajdonsága a hermitikus és ferdén hermitikus mátrixoknak. Vegyük észre azt is, hogy a definíció magában foglalja a nemszinguláris mátrixokat és a normális mátrixokat is.

Az EP_r mátrixoknak igen nagy irodalma van; különösen Pearl, Katz és Hearon vizsgálatai (pl. [9], [10], [15]) jelentősek. Itt csupán Pearl 1966-ban bizonyított eredményét közöljük, amely az mátrixokat pseudoinverzükkel jellemzi.

6.1. *Tétel.* (Pearl [15]): Egy A kadratikus mátrix akkor és csak akkor EP_r mátrix, ha pseudoinverzével felcserélhető, azaz ha

$$AA^+ = A^+A.$$

Az eredménynek az az érdekessége, hogy az EP_r mátrixoknak ez a jellemzése sokkal természetesebb egyszerűbb formában fogalmazható, mint jóval korábbi eredeti definíciójuk.

B) *Parciális izometriák*

A parciális izometriákat az unitér mátrixok általánosításaként vezette be Erdelyi [5] s azóta igen nagy irodalmuk van.

Ismeretes az unitér mátrixok izometria tulajdonsága: Az n-edrendű U mátrixot unitérnek nevezzük, ha az

$$y = Ux \quad \forall x \in \mathcal{E}^n$$

lineáris transzformáció távolságtartó, azaz

$$\| Ux_1 - Ux_2 \| = \| x_1 - x_2 \|, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{E}^n.$$

A következő két feltétel bármelyike szükséges és elegendő ahhoz, hogy az U mátrix unitér legyen:

(i) $$\| Ux \| = \| x \|, \quad \forall x \in \mathcal{E}^n;$$

(ii) $$(Ux_1, Ux_2) = (x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{E}^n.$$

A parciális izometriák az unitér mátrixok izometria tulajdonságát megragadó általánosításai.

6.2. *Definíció.* Az $m \times n$ típusú V mátrixot *parciális izometriá*nak nevezzük, ha az

$$y = Vx \quad \forall x \in \mathcal{N}(V)^\perp$$

lineáris transzformáció távolságtartó, azaz

$$\| Vx_1 - Vx_2 \|_m = \| x_1 - x_2 \|_n, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{N}(V)^\perp,$$

ahol a norma m, ill. n indexe arra utal, hogy az az $\mathcal{E}^m$, ill. $\mathcal{E}^n$ térben értendő.

Könnyen belátható, hogy érvényes az unitér mátrixokra vonatkozó (i) és (ii) feltételek parciális izometriákra érvényes analogonjai. Nevezetesen a következő két feltétel bármelyike szükséges és elégséges ahhoz, hogy a V $m \times n$ típusú mátrix parciális izometria legyen:

(i) $$\| Vx \|_m = \| x \|_n, \quad \forall x \in \mathcal{N}(V)^\perp;$$

(ii) $$(Vx_1, Vx_2)_m = (x_1, x_2)_n, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{N}(V)^\perp.$$

A parciális izometriák is jellemezhetők a pseudoinverz segítségével a következőképpen.

6. 2. *Tétel.* Az $m \times n$ típusú V mátrix akkor és csak akkor parciális izometria, ha

$$V^+ = V^*.$$

Ez a tétel is mutatja, milyen természetes általánosításai a parciális izometriák az unitér mátrixoknak.

A hermitikus és unitér mátrixokat összekapcsolja a mátrixok poláris előállítása, amely szerint minden kvadratikus mátrix előállítható egy pozitív szemidefinit hermitikus mátrix és egy unitér mátrix szorzataként. Hearon mutatta meg [9], hogy igaz egy olyan poláris előállítás is, amely minden kvadratikus mátrixot egy pozitív szemidefinit hermitikus mátrix és egy parciális izometria szorzataként állít elő.

E két példával is érzékeltetni kívántuk a pseudoinverz sokrétű szerepét a mátrixelméletben.

IRODALOM

1. Bjerhammar, A.: Rectangular reciprocal matrices with special reference to geodetic calculations. Bull. Géodésique 52 (1951) 188—220.
2. Boullion, T. L.—Odell, P. L. (Ed.): Proceedings of the Symposium on Theory and Application of Generalized Inverses of Matrices. Texas, 1968. Texas Techn. College, Math. Series No. 4.
3. Boullion, T. L.—Odell, P. L.: Generalized inverse matrices. 1971. Wiley.
4. Egerváry J.: Az inverz mátrix általánosítása, MTA Mat. Kut. Int. Közleménye 1 (1956) 315—324.
5. Erdélyi, I.: On partial isometries in finite-dimensional Euclidean spaces. Siam J. Appl. Math. 14 (1966) 453—467.
6. Erdélyi, I.: The quasi-commuting inverses for a square matrix, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 42 (1967) 626—633.
7. Fisher, A. G.: On construction and properties of the generalized inverse. Siam J. Appl. Math. 15 (1967) 269—272.
8. Greville, T. N. E.: Spectral generalized inverses of square matrices. MRC Tech. Summary, Rep. 823, Madison, 1967. Math. Res. Center, U. S. Army, Univ. of Wisconsin.
9. Hearon, J. Z.: Polar factorization of a matrix, J. Res. Nat. Bur. Standards 71B (1967) 65—67.
10. Katz, I. J.—Pearl, M. H.: On *EPr* and normal *EPr* matrices, J. Res. Nat. Bur. Standards 70B (1966) 47—77.
11. Langenhope, C. E.: On generalized inverses of matrices. Siam J. Appl. Math. 15 (1967) 1239—1246.
12. Meyer, C. D. Jr.: On ranks of pseudoinverses. Siam Rev. 11 (1969) 382—385.
13. Moore, E. H.: On the reciprocal of the general algebraic matrix, Abstract, Bull. Amer. Math. Soc., 26 (1920) 394—395.
14. Moore, E. H.: General analysis, Part I., Mem. Amer. Philos. Soc., 1 (1935) 197—209.
15. Pearl, M. H.: On generalized inverses of matrices, Proc. Camb. Phil. Soc. 62 (1966) 673—677.
16. Penrose, R.: A generalized inverse for matrices, Proc. Camb. Philos. Soc., 51 (1955) 406—413.
17. Pringle, R. M.—Rayner, A. A.: Generalized inverse matrices with applications to statistics (Griffins Statistical Monographs). London, 1971. Griffin.
18. Rado, R.: Note on generalized inverses of matrices, Proc. Camb. Philos. Soc. 52 (1966) 600—601.
19. Rao, C. R.—Mitra, S. K.: Generalized inverse of matrices and its applications, 1971. Wiley.
20. Rohde, C. A.: Some results on generalized inverses, Siam Rev. 8 (1966) 201—205.
21. Rosen, J. B.: Minimum and basic solutions to singular linear systems, Siam J. Appl. Math. 12 (1964) 156—162.
22. Rosen, J. B.: The gradient projection method for nonlinear programming, Part I., Linear constrains, J. Soc. Indust. Appl. Math. 8 (1960) 181—217.
23. Schwerdtfeger, H.: Introduction to linear algebra and the theory of matrices. Groningen, 1950. P. Noordhoff.
24. Urquhart, N. S.: Computation of generalized inverse matrices which satisfy specified conditions, Siam Rev. 10 (1968) 216—218.