Treer Mór Ferenc

A tárolás optimalizálása felfutó és kifutó felhasználásnál

Tárolásra sokkal gyakrabban van szükség, mint ahogy gondolnánk. A növények, az állatok szervezete, az emberalkotta létesítmények lépten-nyomon tárolókat igényelnek. Mindenütt kell tárolás, ahol két összefüggő folyamat közt időkülönbség van. Ez a két folyamat a felhasználás, amely a tárolt készlet csökkenésével és a pótlás, amely ennek növekedésével jár. Amikor folyamatokat létesítünk, úgy kell az adottnak tekintendő felhasználáshoz a pótlást illesztenünk, hogy a termelés folytonosságának biztosítása mellett a tárolás költsége a legkisebb legyen, vagyis a tárolást költség-optimalizálnunk kell.

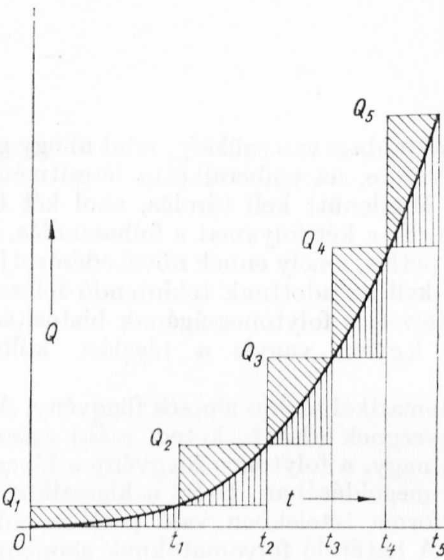
A két folyamat matematikai alakja lépcsős függvény. A tárolt készlet rendszerint valamilyen egységnek (darab, köteg, zsák) egészszámú többszöröse. De ha ez a számérték nagy, a folytonos függvény a lépcsősnek jó megközelítését adja feladatunk megoldásában. Ezért a klasszikus irodalom egyenletes felhasználásra és egyforma tételekben való pótlásra ad megoldásokat ([1] 204., 207., 210. oldal). A határoló folyamatoknak azonban többnyire várható értékük körüli szórásuk van. A megoldást aránylag nem nagyon nehezíti meg, ha csak a felhasználást vesszük stohasztikus folyamatnak ([1] 218., 223., 225., 227. oldal). A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének munkatársai azonban a tárolással kapcsolatos minden lépcsős függvénynél figyelembe vették a stohasztikus jelleget ([3] 187., és [4] 203. oldal).

Nem stacioner viszonyokra variációszámítással általában csak elvi megoldást tudunk kapni ([1] 236., 245., 248., 254. oldal) a felhasználást tetszőleges alakú stochasztikus függvénynek, a pótlást pedig adott szerkezetű, de paraméterében változtatható függvénynek véve. A műszaki irodalom légüstelméletei ([5] 4/46., 47. oldal). periodikus folytonos függvényt alkotó pótlásra, és stacioner, vagy ehhez közeledő felhasználásra adnak megoldást. Lange, Lesourne nyomán ([1] 212. és [2] 356. oldal) tetszőleges alakú folytonos függvénynek veszi a felhasználást, a pótlást megválasztandó lépcsős függvénynek, de körülményes és próbálgatást igénylő grafikus megoldásra jut.

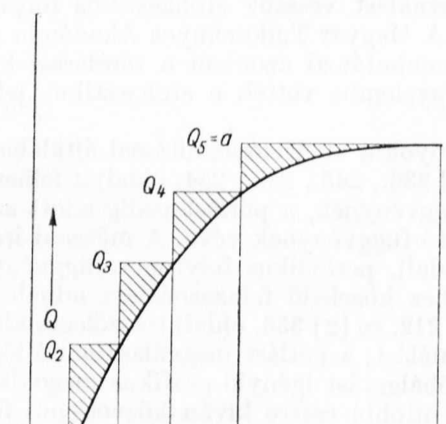
Jelen tanulmány ez utóbbi esetre kíván közvetlenül felhasználható megoldást adni, vagyis arra, hogy mely t_i időpontokban és milyen Q_i mennyiségekben optimális a pótlás, ha a felhasználás halmozott értéke az időnek (t) valamilyen $Q = at^m$ alaku függvénye. A kidolgozott változatok a következők:

A felhasználás felfutó jellegű ($m > 1$). A (4) képlet alapján számíthatjuk a beszerzések időpontjait, és az (5) alapján a tárolás összköltségét (S), az 1. ábra szerinti lefutással.

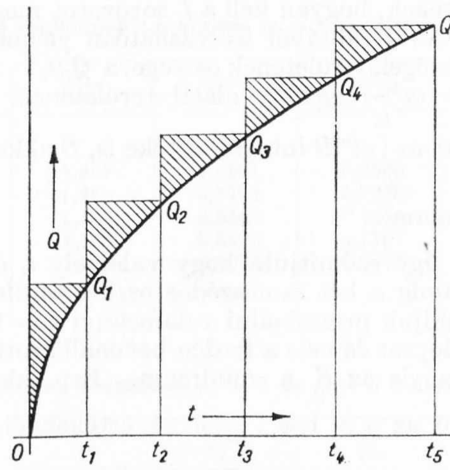
Az előző feladatnak inverze, ha a pótlás (= termelés) folytonos függvény, és a felhasználás (= elszállítás) történik részletekben. Az időpontot a (7), a tárolás összköltségét a (9) képlet adja, a lefutás ugyancsak az 1. ábra szerint. – Teljesen kifutó felhasználásnál a (13) képlet adja meg a beszerzés időpontjait és a (17) a tárolás összes költségét a 2. ábra szerinti lefutással. – Ha a kifutó jellegű felhasználás $\left(\frac{dQ}{dt}\right)$ hiperbolikusan csökken $(1 > m > 0)$, a (7)



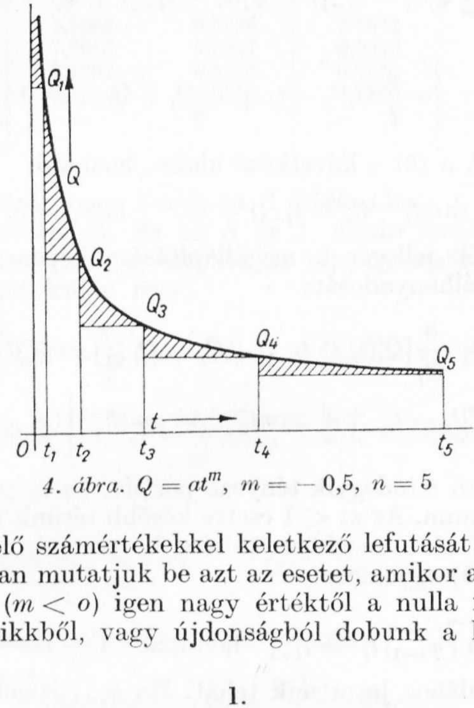
1. ábra. $Q = a\,[1 - (1 - t)^m]$, $m = 3$, $n = 5$



2. ábra. $Q = at^m$, $m = 3$, $n = 5$



3. ábra. $Q = at^m$, $m = 0{,}5$, $n = 5$



4. ábra. $Q = at^m$, $m = -0{,}5$, $n = 5$

képletből a megfelelő számértékekkel keletkező lefutását a 3. ábra mutatja. — Végül a 4. ábrában mutatjuk be azt az esetet, amikor a felhasználás hiperbolikusan csökken ($m < o$) igen nagy értéktől a nulla felé tartva, amikor például egy hiánycikkből, vagy újdonságból dobunk a közben fokozatosan telítődő piacra.

1.

A kérdés tehát az, hogy ha az összefüggés

$$(1) \qquad \int_0^{t_n} Q\,dt + S = \sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1}),$$

ahol $Q = at^m$, tehát $Q' = amt^{m-1} = \frac{m}{t}Q$, és így $\int_0^t Qdt = \frac{t}{m+1}Q$, továbbá

a, m, t_n és n adott értékek, hogyan kell a t_i sorozatot megválasztanunk, hogy S minimum legyen. Az 1. ábrából leolvashatóan geometriailag S a ferdén bevonalkázott háromszögek területének összege, a $Q_i(t_i - t_{i-1})$ oszlopsor összterületének és a $Q = at^m$ függvény alatti területének különbsége. Miután a, m, t_n adottak, adott az $\int_0^{t_n} at^m dt$ integrál értéke is, S akkor lesz minimum, ha $\sum_1^n at_i^m(t_i - t_{i-1})$ minimum.

Ezt a minimumot úgy számítjuk, hogy valamely t_i értéket egymagában addig változtatjuk, amíg a két szomszédos oszlop területe a legkisebb lesz. Ha ezt egyidejűleg tudjuk megcsinálni valamennyi $i = 1, 2, \ldots, n-1$ értéknél, akkor lesz az oszlopsor és vele a ferdén bevonalkázott háromszögek területének összege, vagyis az S a minimum. Ezt akkor érjük el, ha $\frac{\partial}{\partial t_i} \sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1}) = 0$ az $i = 1, 2, \ldots, n-1$ értékeknél, tehát ha:

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1}) = Q_i'(t_i - t_{i-1}) + Q_i - Q_{i+1} =$$

$$(2) \qquad = \frac{m}{t_i} Q_i(t_i - t_{i-1}) + Q_i - Q_{i+1} = 0$$

Miután $Q_i = at_i^m$, a (2) a következő alakra hozható:

$$(3) \qquad amt_i^{m-1}(t_i - t_{i-1}) + at_i^m - at_{i+1}^m = 0.$$

Ezen szélső érték jellegének megállapítására képezzük az összegezésnek második differenciálhányadosát:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_i^2} \sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1}) = \frac{\partial}{\partial t_i}[Q_i'(t_i - t_{i-1}) + Q_i - Q_{i+1}] = Q_i''(t_i - t_{i-1}) + Q_i' + Q_i' =$$

$$= am(m-1)\, t_i^{m-2}(t_i - t_{i-1}) + 2amt_i^{m-1} = amt_i^{m-1}\left[(m-1)\left(1 - \frac{t_{i-1}}{t_i}\right) + 2\right].$$

A kapott szorzatban mindegyik tényező pozitív, ha $m > 1$, az összegezésnek szélső értéke minimum. Az $m < 1$ esetre később térünk ki.

További számításaink megkönnyítésére bevezetjük a $t_i^m = \varphi_{i-1} t_{i-1}^m$ jelölést. Rendezve a (3) egyenletet:

$$(4) \qquad (1 + m - m\sqrt[-m]{\varphi_{i-1}})\, t_i^m = t_{i+1}^m \quad \text{honnan:} \quad 1 + m - m\sqrt[-m]{\varphi_{i-1}} = \varphi_i.$$

Rekurziós formulához jutottunk tehát. Ha φ_{i-1} ismeretes, φ_i számítható. A számítást $i = 1$-nél kezdjük el. Miután $t_0 = 0$, $t_1 \neq 0$ csak akkor lehet, ha $\varphi_0 = \infty$, igy akkor $\varphi_1 = 1 + m$. Innen fokozatosan eljutunk φ_{n-1} értékére, melyből t_{n-1}-et számítani tudjuk, miután t_n adott. Evvel megkaptuk t_i keresett értékeit.

φ_i kiszámítását $m = 3$-nál az 1a táblázat mutatja be, az 1b táblázat pedig megadja $m = 3$ és $n = 5$ értékekre a t_i értékek számítását, ha $t_n = 1$. Megfigyelhetjük, hogy a t_i értékek eloszlása nem egyenletes, hanem i növekedésével sűrűsödnek.

1/a táblázat

φ_i értékeinek számítása $m = 3$ esetében

i	φ_{i-1}	$\sqrt[3]{\varphi_{i-1}}$	$\sqrt[-3]{\varphi_{i-1}}$	$1-\sqrt[-3]{\varphi_{i-1}}$	$[1+m(1-\sqrt[-3]{\varphi_{i-1}})]=\varphi_i$
1.					4,0000
2.	4,0000	1,587	0,6301	0,3699	2,1097
3.	2,1097	1,283	0,7794	0,2206	1,6618
4.	1,6618	1,184	0,8446	0,1554	1,4662
5.	1,4662	1,136	0,8803	0,1197	1,3591
6.	1,3591	1,108	0,9025	0,0975	1,2925
7.	1,2925	....	....		

1/b táblázat

t_i értékeinek számítása $m = 3$ és $n = 5$ esetében

i	t_{i+1}	φ_i	φ_1^{-i}	$\sqrt[-3]{\varphi_i}$	$t_{i+1}\sqrt[-3]{\varphi_i}=t_i$
5					1,0000
4	1,0000	1,4662	0,6825	0,8804	0,8804
3	0,8804	1,6618	0,6017	0,8442	0,7465
2	0,7465	2,1097	0,4762	0,7810	0,5830
1	0,5830	4,0000	0,2500	0,6300	0,3678
0	0,3678	∞	0	0	0,0000

A következő kérdésünk, hogy mekkora S értéke, ha a t_i értékeket a fent számítottak szerint választjuk. Ez az S az 1. ábrán ferdén bevonalkázott háromszögek területének összege, értékét az (1) egyenletből számítjuk. Az összegezés utolsó tagját külön írva:

$$S + \int_0^{t_n} Q\mathrm{d}t = \sum_1^{n-1} Q_i(t_i - t_{i-1}) + Q_n(t_n - t_{n-1})$$

A (2) egyenletből $Q_i(t_i - t_{i-1}) = \frac{t_i}{m}(Q_{i+1} - Q_i)$, továbbá $\int_0^{t_n} Q\,\mathrm{d}t = \frac{t_n Q_n}{m+1}$,

ezeket behelyettesítve:

$$m\left(S + \frac{t_n Q_n}{m+1}\right) = \sum_1^{n-1} t_i(Q_{i+1} - Q_i) + mQ_n(t_n - t_{n-1}).$$

Az összegezés első tagját írhatjuk a következően:

$$\sum_1^{n-1} t_i Q_{i+1} = t_{n-1} Q_i + \sum_1^{n-1} t_{i-1} Q_i\,,$$

mert az összegezés utolsó tagját külön írtuk, első tagként pedig $t_0 Q_1 = 0$ értéket hozzáírtuk, és az összegezést átszámoztuk. Behelyettesítve az előző egyenletbe:

$$m\left(S + \frac{t_n Q_n}{m+1}\right) = t_{n-1} Q_n + \sum_1^{n-1} t_{i-1} Q_i - \sum_1^{n-1} t_i Q_i + mQ_n(t_n - t_{n-1}).$$

Összevonva, az összegezéshez az n-edik tagot hozzáírva és az utolsó taghoz adva:

$$m\left(S+\frac{t_nQ_n}{m+1}\right)=-\sum_1^n Q_i(t_i-t_{i-1})+(m+1)Q_nt_n-mQ_nt_{n-1}.$$

A jobboldali összegezést az (1) egyenletből helyettesítve:

$$(m+1)\left(S+\frac{t_nQ_n}{m+1}\right)=(m+1)Q_nt_n-mQ_nt_{n-1}.$$

A keresett S érték tehát:

$$S=\frac{m}{m+1}Q_n(t_n-t_{n-1})=\frac{m}{m+1}Q_nt_n\left(1-\frac{t_{n-1}}{t_n}\right) \tag{5}$$

vagyis a $\sum_1^n Q_i(t_i-t_{i-1})$ sor utolsó tagjának, az 1. ábrán az oszlopsor utolsó oszlopának $\frac{m}{m+1}$-ed része.

2.

Kiegészíti az előzőket, ha azt vizsgáljuk, hogy mennyi egy oszlopsornak a $Q=at^m$ függvénytől való eltérése ($\bar{S}$), ha az oszlopok sarkai alulról érintik a függvényt. Az 1. ábrán függélyesen bevonalkázott háromszögek mutatják az eltérést ebben az esetben. A függvény, a differenciálhányadosa és az integrálja, valamint az állandók ugyanazok, mint az (1) egyenletnél voltak, az oszlopsor és a függvény alatti terület közötti összefüggés azonban:

$$\int_0^{t_n} Qdt-\bar{S}=\sum_0^{n-1}Q_i(t_{i+1}-t_i)=\sum_1^{n-1}Q_i(t_{i+1}-t_i). \tag{6}$$

Az összegezésből az első tagot elhagyhatjuk, mert $Q_0=0$. Az előző esettel ellentétesen most a Q függvény alatti területből kivonni kell az $\bar{S}$-t, hogy a (6) összegezésének megfelelő oszlopsor területét kapjuk.

t_i legjobb értékeinek számítására a gondolatmenetünk az előző esettel megegyező. Képezzük az összegezés szélső értékét:

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\sum_1^{n-1}Q_i(t_{i+1}-t_i)=Q_i'(t_{i+1}-t_i)+Q_{i-1}-Q_i=0.$$

Innen $\frac{m}{t_i}Q_i(t_{i+1}-t_i)=Q_i-Q_{i-1}$, azaz viszonyszámokban

$$m\left(\frac{t_{i+1}}{t_i}-1\right)=1-\frac{Q_{i-1}}{Q_i}=1-\left(\frac{t_{i-1}}{t_i}\right)^m. \tag{7}$$

Bevezetve a $\Psi_{i+1} = \frac{t_{i+1}}{t_i}$ jelölést

$$\Psi_{i+1} = 1 + \frac{1}{m}(1 - \Psi_i^{-m}). \tag{8}$$

Ismét rekurziós képlet, úgy a Ψ, mint a t_i értékei az előző esethez hasonlóan számíthatók.

A (7) ismeretében meg tudjuk állapítani a fent képezett szélső érték jellegét:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_i^2}\sum_1^{n-1} Q_i(t_{i+1} - t_i) = \frac{\partial}{\partial t_i}[amt_i^{m-1}(t_{i+1} - t_i) + at_{i-1}^m - at_i^m] =$$

$$= am(m-1)\,t_i^{m-2}(t_{i+1} - t_i) - 2amt_i^{m-1} = amt_i^{m-1}\left[(m-1)\left(\frac{t_{i+1}}{t_i} - 1\right) - 2\right].$$

Helyettesítve a (7)-ből:

$$\frac{\partial^2}{\partial t_i}\sum_1^{n-1} Q_i(t_{i+1} - t_i) = amt_i^{m-1}\left[(m-1)\frac{1}{m}\left(1 - \frac{Q_{i-1}}{Q_i}\right) - 2\right] =$$

$$= amt_i^{m-1}\left[\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{Q_{i-1}}{Q_i}\right) - 2\right].$$

A szegletes zárójel első tagja kisebb egynél, ha m pozitív, a másodfokú differenciálhányados tehát negatív, a képezett szélső érték maximum, így $\bar{S}$ lentebb számítandó értéke minimum lesz.

$\bar{S}$ nagyságának számítására a (6) egyenletből a (7) figyelembevételével:

$$m\left(\int_0^{t_n} Q\,dt - \bar{S}\right) = m\sum_1^{n-1} Q_i(t_{i+1} - t_i) = \sum_1^{n-1} t_i(Q_i - Q_{i-1}).$$

Tekintettel arra, hogy $Q_0 = 0$, $\sum_1^{n-1} t_i Q_{i-1} = \sum_2^{n-1} t_i Q_{i-1}$, átszámozással

$$\sum_2^{n-1} t_i Q_{i-1} = \sum_1^{n-2} t_{i+1} Q_i = \sum_1^{n-1} t_{i+1} Q_i - t_n Q_{n-1},$$

miután az összegezéshez írtuk és külön levonjuk az $(n-1)$-edik tagot. Innen

$$m\left(\frac{Q_n t_n}{m+1} - \bar{S}\right) = \sum_1^{n-1} t_i Q_i - \sum_1^{n-1} t_{i+1} Q_i + t_n Q_{n-1} = -\sum_1^{n-1} Q_i(t_{i+1} - t_i) + t_n Q_{n-1}.$$

Az összegezést a (6)-ból behelyettesítve:

$$(m+1)\left(\frac{Q_n t_n}{m+1} - \bar{S}\right) = t_n Q_{n-1}.$$

Az integrál oszlopsortól való eltérése tehát:

$$\bar{S} = \frac{1}{m+1} t_n(Q_n - Q_{n-1}), \tag{9}$$

vagyis az 1. ábra felső, $Q_n - Q_{n-1}$ magas sávja területének $\frac{1}{m+1}$-ed része.

3.

Megoldást tudunk találni egy integrál értékének véges számsorral való legjobb megközelítésének kérdésére akkor is, ha $\frac{dQ}{dt}$ értéke csökkenő. Csak amíg növekedésnél ez nulláról indul $t_n = 1$ időpontig a legnagyobb értékre, addig a csökkenésnél ez fordítva van. A csökkenést $am(1-t)^m$ lefolyásúnak véve:

$$Q = a[1-(1-t)^m]. \tag{10}$$

Differenciálhányadosa

$$\frac{dQ}{dt} = am(1-t)^{m-1} = \frac{m}{1-t}(a-Q), \tag{11}$$

második deriváltja pedig

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = -am(m-1)(1-t)^{m-2}.$$

A rekurziós formula felállítására levezetésünk gondolatmenete most is ugyanaz, mint volt a növekvő $\frac{dQ}{dt}$-nél, a parciális differenciálhányados alakja is ugyanaz, mint a (2) egyenletben,

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1}) = Q_i'(t_i - t_{i-1}) + Q_i - Q_{i+1} = 0 \tag{12}$$

csak most a csökkenő $\frac{dQ}{dt}$-nek megfelelő értéket kell behelyettesítenünk:

$$Q_i'(t_i - t_{i-1}) = \frac{m}{1-t_i}(a-Q_i)\,[(1-t_{i-1})-(1-t_i)] =$$

$$= Q_{i+1} - Q_i = (a-Q_i)-(a-Q_{i+1}).$$

Viszonyszámokban: $m\left(\frac{1-t_{i-1}}{1-t_i}-1\right) = 1-\frac{a-Q_{i+1}}{a-Q_i} = 1-\left(\frac{1-t_{i+1}}{1-t_i}\right)^m$.

A $\varphi_i = \frac{1-t_i}{1-t_{i-1}}$ jelöléssel $m\left(\frac{1}{\varphi_i}-1\right) = 1-\varphi_{i+1}^m$, vagyis

$$\frac{1}{\varphi_i} = 1 - \frac{1}{m}(1-\varphi_{i+1}^m). \tag{13}$$

Ezúttal is rekurziós formulára jutottunk, most azonban $i = n-1$ értéknél kell kezdenünk φ_i kiszámítását: Miután $t_n = 1$, $\varphi_n = 0$. Ebből kiindulva sorban megkapjuk a φ_i értékeket, végül is a $\varphi_1 = \frac{1-t_1}{1-t_0}$-et. Miután $t_0 = 0$, $t_1 = 1-\varphi_1$, ezután i növekedő értékei szerint haladva meghatározhatjuk valamennyi t_i értéket.

A (13) összefüggés segélyével könnyen megállapítható a (12) egyenlet alapján képezett szélső érték jellege. (12)-ből a másodrendű differenciálhányados

$$\frac{\partial^2}{\partial t_i^2}\sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1}) = a\,[-m(m-1)(1-t_{i-1})(1-t_i)^{m-2}] + (m+1)m(1-t_i)^{m-1} =$$

$$= am(1-t_i)^{m-1}\left[-(m-1)\frac{1-t_{i-1}}{1-t_i} + m + 1\right],$$

amely a φ_i jelöléssel

$$am(1-t_i)^{m-1}\left[-(m-1)\frac{1}{\varphi_i} + m + 1\right]$$

alakú lesz.

Behelyettesítve $\frac{1}{\varphi_i}$ (13) alatti kifejezését kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2}{\partial t_i^2}\sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1}) = am(1-t_i)^{m-1}\left[2 - \frac{m-1}{m}(1-\varphi_{i+1}^m)\right].$$

A másodrendű differenciálhányados tehát pozitív, mert a második tag kisebb egynél, ha $m \geq 1$. A $\sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1})$ összegezésnek, az oszlopsor területének tehát maximuma van.

Ezen $\sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1})$ összegnek az $\int_0^{t_n} Q\,dt$-től való eltérésének S nagyságát számítandó lényegében az előző esetekhez hasonlóan járunk el, egyes részleteiben azonban eltérően. Az S értékét a 2. ábrán is a bevonalkázott háromszögek területének összege adja meg. Miután a t_i-ik változtatásánál a parabola vonala nem változik, az oszlopsor területét a háromszögterületek hozzáadásával kapjuk a parabola alatti területből, és az oszlopsor területének minimuma fogja adni a háromszögek területének minimumát. Ezek szerint az oszlopsor területe:

$$\int_0^{t_n} Q\,dt + S = \sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_1^n a[1-(1-t_i)^m](t_i - t_{i-1}) =$$

$$(14)\qquad = a(t_n - t_0) - a\sum_1^{n-1}(1-t_i)^m(t_i - t_{i-1}).$$

Az összegezésben az utolsó tagot elhagytuk, mert $t_n = 1$. A szélső érték számítására:

$$\frac{\partial}{\partial t_i}\sum_1^{n-1}(1-t_i)^m(t_i - t_{i-1}) = -m(1-t_i)^{m-1}(t_i - t_{i-1}) + (1-t_i)^m - (1-t_{i+1})^m.$$

Ez a szélső érték minimum, amint azt az előző oldalon kimutattuk. A minimum helyén tehát $m(1-t_i)^{m-1}(t_i-t_{i-1}) = (1-t_i)^m - (1-t_{i+1})^m$. A (14)-be helyettesítve

$$\int_0^{t_n} Q\,\mathrm{d}t + S = a(t_n - t_0) - \frac{a}{m}\sum_1^{n-1}(1-t_i)[(1-t_i)^m - (1-t_{i+1})^m]. \tag{15}$$

A (15) jobb oldalán különbségek összegezése végzendő. A különbség két tagját külön összegezzük, de a másodikat előbb átcsoportosítjuk:

$$\sum_1^{n-1}(1-t_{i+1})^m(1-t_i) = \sum_1^{n-2}(1-t_i)(1-t_{i+1})^m.$$

Az összegezés utolsó tagját elhagytuk, mert $i = n-1$ esetén $t_n = 1$, így az utolsó tag nulla. Az összegezéshez hozzáírjuk és külön kivonjuk az $i = 0$ tagot, figyelembe véve, hogy $t_0 = 0$, ekkor

$$\sum_1^{n-2}(1-t_i)(1-t_{i+1})^m = \sum_0^{n-2}(1-t_i)(1-t_{i+1})^m - (1-t_i)^m$$

átszámozást hajtva végre $= \sum_1^{n-1}(1-t_{i-1})(1-t_i)^m - (1-t_i)^m$.

Az átcsoportosított összegrészt a (15)-be helyettesítve és összevonva

$$\int_0^{t_n} Q\,\mathrm{d}t + S = a(t_n - t_0) - \frac{a}{m}\left\{\sum_1^{n-1}(1-t_i)^m[(1-t_i) - (1-t_{i-1})] + (1-t_1)^m\right\} =$$

$$= a(t_n - t_0) - \frac{a}{m}\left[\sum_1^{n-1}(1-t_i)^m(t_{i-1}-t_i) + (1-t_1)^m\right] =$$

$$= a\frac{m+1}{m}(t_n - t_0) - \frac{a}{m}\left\{\sum_1^{n}[1-(1-t_i)^m](t_i - t_{i-1}) + (1-t_1)^m\right\}.$$

A Σ-tag értékét a (14) egyenletből véve

$$\frac{m+1}{m}\left[\int_0^{t_n} Q\,\mathrm{d}t + S\right] = a\frac{m+1}{m}(t_n - t_0) - (1-t_1)^m\frac{a}{m}. \tag{16}$$

Kiszámítjuk az intergáltagot:

$$\int_0^{t_n}[1-(1-t)^m]\,\mathrm{d}t = a\left[t + \frac{(1-t)^{m+1}}{m+1}\right]_0^{t_n} =$$

$$= a\left[t_n + \frac{(1-t_n)^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{m+1}\right] = \frac{am}{m+1}.$$

Helyettesítve a (16) egyenletbe

$$(m+1)\left[\frac{am}{m+1}+S\right]=a(m+1)-a(1-t_1)^m.$$

S keresett értéke tehát:

$$S=\frac{a}{m+1}[1-(1-t_1)^m]=\frac{Q_1}{m+1}, \tag{17}$$

vagyis a Q_1 magasságú sáv területének $\frac{1}{m+1}$-ed része.

Megjegyzés: Hasonlóképpen vizsgálhatjuk meg azt is, hogy milyen egy oszlopsornak beosztása és területének a (10) hatványtól való eltérése, ha az oszlopok sarkai alulról érintik a hatványfüggvényt.

4.

Nehézségek nélkül alkalmazhatók a levezetett képletek m nem egészszámú értékeire is, csak ha $m < 1$, akkor a Q parabola tengelye nem az ordináta, hanem az abszcissza. Például a 3. ábra $m = 0{,}5$ és $n = 5$ értékekre lett kidolgozva. Megfigyelhetjük, hogy t_i értékei az 1. ábrával ellentétesen itt a kis értékeknél a sűrűbbek.

Alkalmazhatjuk a fenti gondolatmenetet akkor is, ha $m < 0$. A Q képletben ilyenkor negatív a kitevő, így a függvény lefutása hiperbolikus (4. ábra). Nehézségek keletkezhetnek azonban azért, mert a $t_0 = 0$-nál Q értéke végtelen. A (4) rekurziós képlet ugyanaz, de az (1) egyenletben az S-et ellenkező jellel kell venni, mert Q a t_i növekedéssel csökken, így a háromszögek területét le kell vonni az integrál értékéből, hogy az oszlopsorét megkapjuk:

$$\int_0^{t_n} Q\,\mathrm{d}t - S = \sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_1^{n-1} Q_i(t_i - t_{i-1}) + Q_n(t_n - t_{n-1}).$$

A továbbiak az előző fejezetekhez hasonló gondolatmenettel haladhatnának, előbb vizsgáljuk azonban, hogy lehet-e nulla az értéke a t_1 szerinti parciális differenciálhányadosnak, mely az ordinátatengely melletti első két oszlop legjobb arányát kívánja megállapítani. Deriválva és Q értékét behelyettesítve

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1}) = Q_1'(t_1 - t_0) + Q_1 - Q_2 =$$

$$= amt_1^{m-1}\cdot t_1 + at_1^m - at_2^m = at_2^m\left[(m+1)\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^m - 1\right].$$

Leolvashatjuk a képlet szegletes zárójeléből, hogy ha $m > -1$, akkor a fenti parciális differenciálhányadosnak mindig van nulla helye ott, ahol $\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^m = \frac{1}{m+1}$, ahogy azonban m közeledik -1-hez, $\frac{1}{m+1}$ mindig nagyobb lesz, így $\frac{t_1}{t_2}$-nek (negatív hatványra emelve) mindig kisebbnek kell lennie, vagyis t_1 a t_2-től távolodva lassanként egészen a t_0 mellé tolódik. Nulla helye azonban a parciális differenciálhányadosnak és evvel szélső értéke az összegezésnek mégis csak létezik.

Ha azonban $m \leq -1$, akkor az $i = 1$ szerinti parciális differenciálhányadosnak egyáltalán nincs nulla helye, mert a fenti képlet szegletes zárójelében mind a két tag mindenkor negatív. Ennek megfelelően az ordinátatengely melletti két oszlop területének összege t_1-gyel a nulla felé haladva folyton nagyobbodik. Miután pedig azt követeljük, hogy $\frac{\partial}{\partial t_i} \sum_1^n Q_i(t_i - t_{i-1}) = 0$ legyen minden $i = 1, 2, \ldots, n-1$ értéknél, ezt pedig a jelen esetben a t_1-nél teljesíteni nem tudjuk, feladatunk $m \leq -1$-nél megoldhatatlan.

(Beérkezett: 1972. május 2.)

IRODALOM

1. Lange, O.: Optimális döntések. Budapest, 1964. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. Lesourne, J.: Téchnique économique et gestion industrielle. Paris, 1958.
3. Palásti, I.—Rényi A.—Szentmártony T.—Takács L.: A raktárkészlet pótlásáról I. MTA Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményei. Budapest, 1953.
4. Ziermann M.: A raktárkészlet pótlásáról II. MTA Alkalmazott Matematikai Intézet Közleményei. Budapest, 1953.
5. Pattantyus Á. G.: Gépész és villamos mérnökök kézikönyve.
6. Naddor, E.: Inventory Systems. London, 1966. J. Wiley & Sons, Inc.

OPTIMIZATION OF STORAGE AT INCREASING AND DECREASING UTILIZATION

The paper gives a solution to storage procedures in cases if from among the two variables of storage — replacement and utilization — one is continuous and changes parabolically, and the other consists of impulses of a given number. Their size and time should be determined so that the difference between the two variables, the stored quantity were minimum. Mathematically a step function $Q = at^m$ to the given period $0 \leq t \leq t_n$ of the given function $Q_i = at_i^m$ should be determined so that the difference between them should be minimal by appropriate choice of the values of t_i.

To the solution of the problem the basic equation (1) is given, in which the variables are t_i where $i = 1, 2, \ldots n-1$. The extreme value of the function is where all the partial derivatives according to the variables t_i vanishes (2). Function $Q = at^m$ is formed so, however, that equation (2) can be transformed to (3) and the result will be the recursion (4). Hereby the minimum value of the difference between the two functions, — the stored quantity — can be given in the equation (4a) explicitely.

The way of solution is the same with the other problem variants. In case of the first version utilization increases smoothly ($m > 1$), and replacement is made in jumps. The difference between them is given by equation (8). Evaluations can be found in tables 1a and 1b and on the fig. 1.

In case of the next variant utilization decreases to 0 according to the equation (9). Optimal terms of replacement are given by the equation (12) and minimum storage is given by the equation (17). The course of the functions and evaluations can be found on the fig. 2. The converse of this variant can be solved in a similar way.

If utilization decreases but its rate decreases hiperbolically, the course and evaluation of the functions is shown by fig. 3. ($1 > m > 0$) and in fig. 4. ($0 > m > -1$), respectively.

ОПТИМИЗАЦИЯ ХРАНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ВОЗРАСТАЮЩЕГО И УМЕНЬШАЮЩЕГОСЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

Статья дает решение на методы хранения в случаях, если из двух переменных хранения — дополнением и использованием — первый является беспрерывным и изменяется параболически, а второй состоит из импульсов данного количества. Величина и срок этих переменных должны быть установлены так, чтобы разница между двумя переменными, храненное количество товаров было минимум. Математически к периоду данной функции $Q = at^m$ должно установить ступенчатую функцию $Q_i = at_i^m$ так, чтобы разница между двумя функциями путем угодного избрания стоимостей t_i была минимальная.

Для решения задачи нужно написать основное уравнение (1), в котором переменные t_i, $i = 1, 2, \dots n-1$. Крайняя стоимость этой функции там, где все парциальные производные согласно переменному исчезли (2). Однако функция такая, что уравнение (2) можно трансформировать в (3) и решение будет формула (4). С помощью этого разницу между двумя уравнениями — храненное количество — можно дать экцплицически в уравнении (4а). Ход решения тот же самый в других вариантах задач.

В первом варианте использование имеет возрастающий характер ($m > 1$) и дополнение делается в частях. Противоположность этого, если дополнение (производство) имеет возрастающий характер и использование делается в частях. Их разница дает уравнение (8). Оценки находятся в таблице 1a и 1b и на рисунке 1.

В следующем варианте использование имеет уменьшающийся характер, согласно уравнению (9). Оптимальные времена дополнения даны уравнением (12), а минимум хранения дан уравнением (17). Конец и оценка функций находятся на рисунке 2. Противоположность этого варианта можно решить аналогически.

Если использование имеет уменьшающийся характер, но его доля уменьшается гиперболически ($1 > m > 0$), то конец и оценку функций показывает рисунок 3.

Уменьшающееся использование гиперболического характера показывает рисунок 4, но в этом случае решение наступает только если ($0 > m > 1$).