Martos Béla—Kornai János

Tervszondázás: a modellek szerkezete

1. Bevezetés

A ,,tervszondázásnak" elkeresztelt kutatás első számítási eredményeiről Dániel Zsuzsa, Jónás Anna és e cikk szerzői már beszámoltak a Közgazdasági Szemlében megjelent cikkükben [1]. Az a cikk elsősorban a nem-matematikus közgazdásznak szólt és fókuszában egyrészt a közgazdasági-gazdaságpolitikai elemzés, másrészt a modellek számszerűsítése és az eredmények interpretálása állottak. Ezt kívánjuk most kiegészíteni a számítások alapjául szolgáló modell ismertetésével és emellett bemutatni az eredeti modell továbbfejlesztett változatait. Ez az utalás elárulja a sorok között is olvasni tudónak, hogy eredeti modellünkkel nem voltunk elégedettek (az újabbakkal sem teljesen) és modellszámításaink eredményeiből többek között metodikai tanulságokat is levontunk.

Tárgyalásunk homlokterében így most a modellek matematikai szerkezete, a részösszefüggések ilyen vagy olyan ábrázolásának közgazdasági és modellszerkesztési indítékai és a modellek megoldási módszerei állnak. Cikkünkből a modellek szerkezetét az is megértheti, aki az előzőt nem olvasta. Az egész kutatás célját, gondolatmenetét, eredményeink használhatóságát azonban pusztán a modellek leírása alapján aligha lehet megítélni, ehhez az előző cikk ismerete is szükséges. (Hadd mondjuk meg azt is, hogy a kutatás jelenlegi szakaszában még nem jelölhetjük ki e modelleknek a hosszú távú tervezés egészében betöltendő szerepét és így kapcsolatukat sem a tervezésben alkalmazott, vagy alkalmazásra javasolt többi modellekkel.)

Dióhéjban összefoglalva: a tervszondázás keretében a magyar népgazdaság hosszú távú (15 éves) tervezésének néhány aktuális problémáját kívántuk megközelíteni, éspedig elsősorban a fogyasztás és felhalmozás-aránya, a beruházások ágazatközi allokációja (különös tekintettel az infrastrukturális fejlesztésre), az állóeszközök hatékonysága szempontjából. A vizsgálat céljára igen kicsiny (12 szektoros) modellt használtunk, amelynek egyszerű szerkezete és kezelési módja, viszonylag kicsiny adatigénye lehetővé teszi, hogy nagyon sok, egymástól lényegesen különböző növekedési pályát számítsunk ki, a gazdasági fejlődésünk előtt álló lehetőségeket eléggé széles sávban tapogathassuk, ,,szondázhassuk" ki.

Modelljeink leírásánál egy általános modellből indulunk ki, amelyből a konkrét modelleket bizonyos specifikációval nyerjük. Ez a leírás nem felel meg teljesen a ,,történelmi" sorrendnek, a kutatás megindulásakor valamifajta metamodell csak gondolataink hátterében motoszkált, jelenlegi formájában utólagos absztrakció eredménye. Ebben az absztrakciós folyamatban nem mentünk el még addig a határig sem, amennyire jelenleg képesek lennénk, csak addig, amennyit az eddigi modellváltozatok általánosítása megkövetel.

További általánosítási lehetőségekre alkalmanként utalunk. A specifikált modellek sorrendje viszont követi kidolgozásunk, illetve használatbavételük időrendjét, és ez a sorrend történetesen a logikai egymásra-épülés követelményének is eleget tesz.

2. Az általános modell

2.1. *Fogalmak és jelölések*

a) *Indexek*

Modellünk n termelő szektorból álló gazdaságot ábrázol, az egyes szektorokra, ha nem különböztetjük meg őket, a j alsó index utal. A szektorokat két csoportba osztjuk. Az első m szektort „beruházási javakat termelő" szektorként (röviden: *beruházási szektorként)* értelmezzük, és feltételezzük róluk, hogy kizárólag beruházási célokra használható javakat állítanak elő. (A fordított feltételezéssel nem élünk, más szektorok is állíthatnak elő beruházási javakat.) A beruházási szektorokra az i alsó index utal. A fennmaradó $n-m$ szektort (a fentiek értelmében pontatlanul) *nem-beruházási szektornak* nevezzük és h indexszel jelöljük. Formálisan:

$$j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$i \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

$$h \in \{m+1, m+2, \ldots, n\}$$

A modell T számú időperiódusra (évre) terjed ki, az év sorszámát a t felső index jelöli. Folyam (flow) jellegű változó esetén t az egy esztendő alatt végbemenő folyamatra utal, állapot (stock) jellegű változó esetén pedig az év *elején* fennálló állapotra (készletre).

$$t \in \{1, 2, \ldots, T\}$$

Első számításainkban, $n = 12$, $m = 2$, $T = 18$ (néhányban $T = 15$) volt.

b) *Változók*

X = bruttó termék
Y = hozzáadott érték (GDP)
K = állóeszköz-állomány
I = bruttó beruházás (beruházás + pótlás)
S = forgóeszköz-készlet
C = fogyasztás
Q = termékfelesleg (+) vagy hiány (−)
U = állóeszköz-felesleg
V = forgóeszköz-felesleg.

Egyes speciális modellekben további változók is szerepelnek az egyszerűbb leírás kedvéért.

Az összes változók, a Q változót kivéve, értelmezésükből kifolyólag csak nemnegatív értéket vehetnek fel.

Ha a fenti változók alsó index nélkül szerepelnek, akkor az egész népgazdaságra összesített értéket képviselnek, j, i vagy h alsó indexszel ellátva pedig egy-egy szektort (bármelyiket, illetőleg egy beruházási vagy egy nem beruházási szektort). Tehát például I = a népgazdaság összes bruttó beruházása, I_h egy nem beruházási szektorba beruházott összeg. Természetesen nem minden változó jelenik meg mindkét (index nélküli és indexes) alakban. Például C és Y kizárólag „népgazdság összesen", tehát index nélküli alakban szerepel, K, X, U és Q kizárólag szektorváltozóként, azaz indexes alakban.

c) *Konstansok*

Itt csak az általános modellben szereplő konstansokat tüntetjük fel, a speciális modellek további konstansokat és paramétereket is tartalmaznak.

a_j = hozzáadott érték/termelés hányados, $\in (0,1)$

q_j = az állóeszközök ki nem selejtezett hányadosa, $\in (1,1)$

k_j = állóeszköz/termelés hányados

s_j = forgóeszköz/termelés hányados

d_j, $(\tilde{d}_h)$ = beruházás allokációs koefficiensek; a j szektor (h nem beruházási szektor) részesedési hányada az összes (a nem beruházási szektoroknak jutó összes) beruházásból. $\sum\limits_j d_j = 1$, $\sum\limits_h \tilde{d}_h = 1$.

b_{ij} = beruházási input koefficiens, a j szektornak jutó egységnyi beruházás igénye az i beruházási szektor termékéből, $\sum\limits_i b_{ij} \leq 1$.

Ezek a konstansok az időben nem változatlanok, ezért mindannyian t felső indexet is viselnek. Értelemszerűen mindannyian nemnegatívak.

d) *Induló értékek*

K_j^1 = az induló állóalap-állomány (szektoronként)

S_j^1 = az induló forgóalap-állomány (szektoronként)

C^0 = a bázisév fogyasztása.

2.2. *A modell formális leírása*

Az általános modell leírásában eltekintünk a nem-negativitási feltételek vizsgálatától.

(1) $$Y^t = \sum_j a_j^t X_j^t .$$

Az egyenlet a hozzáadott érték előállítását írja le az egyes szektorok hozzájárulásának összegeként.

(2) $$K_j^{t+1} = q_j^t K_j^t + I_j^t .$$

Az egyes szektorok évvégi állóalapjának képződése az év eleji állóalap ki nem selejtezett részéből és az év folyamán végrehajtott beruházásból.

(3) $$Y^t = C^t + I^t + S^{t+1} - S^t$$

A GDP felosztás fogyasztásra, beruházásra és a forgóeszközök (készletek) változására.

(4) $$K_j^t = k_j^t X_j^t + U_j^t$$

(5) $$S_j^t = s_j^t X_j^t + V_j^t.$$

Az állóalapoknak, illetve a forgóeszközöknek a termelés volumenétől függően kihasznált, illetve felesleges része.

(6) $$C^t = C^t(C^0, C^1, \ldots C^{t-1}, Y^t).$$

Szimbólikus kifejezés arra, hogy a fogyasztás az előző évek fogyasztásától és a folyó év nemzeti jövedelmétől függhet. A függvény alakja a különböző speciális modellekben más és más.

(7a) $$I_j^t = d_j^t I^t, \text{ vagy}$$

(7b) $$I_h^t = \widetilde{d}_h^t \sum_h I_h^t.$$

Az összes beruházás, illetve a nem beruházási szektoroknak jutó beruházás allokációja a szektorok között. A kettősségre még visszatérünk.

(8) $$X_i^t = \sum_j b_{ij}^t I_j^t + Q_i^t.$$

Az egyes beruházási szektorok termékeinek felosztása a beruházók igényei szerint plusz a felesleg vagy hiány.

(9) $$S^t = \sum_j S_j^t$$

(10) $$I^t = \sum_j I_j^t \text{ (7b-vel kapcsolatban).}$$

Definíciós egyenletek. A definíciós egyenletek közül csak azokat tüntettük itt fel, amelyek az (1)–(8) egyenletekben szereplő változók között létesítenek kapcsolatot. A (10) típusú egyenletre csak a (7b) változat esetén van szüség, hiszen a (7a) változatban $I^t = \sum_j I_j^t$ következik abból, hogy $\sum_j d_j^t = 1$.

Az (1)–(10) rendszer változóinak és egyenleteinek száma a következő: Változók száma periódusonként:

X_j	n
Y	1
K_j	n
I, I_j	$n+1$
S, S_j	$n+1$
C	1
Q_i	m
U_j	n
V_j	n
Összesen	$6n + m + 4$

A változók összes száma tehát:

$$(6n + m + 4)\,T.$$

Jóllehet az induló K_j^1, S_j^1 értékek adottak, és a változók száma így 2 n-nel csökkentendő lenne, valójában ezeket helyettesítik az utolsó év záróállományaira vonatkozó K_j^{T+1}, S_j^{T+1} változók, így a fenti szám korrekt.

A független egyenletek száma évenként

(1)	1	
(2)	n	
(3)	1	
(4)	n	
(5)	n	
(6)	1	
(7a)	n	(7b) $n - m - 1$ ($\sum_h \widetilde{d}_h^t = 1$ miatt egy egyenlet redundáns)
(8)	m	
(9)	1	
(10)	—	1
Összesen	$4n + m + 4$	$4n + 4$

Összesen tehát, aszerint, hogy a (7a) vagy a (7b) változatot tekintjük-e,

$$(4n + m + 4)\,T,$$

illetőleg

$$(4n + 4)\,T$$

egyenletünk van.

Így tehát a rendszer szabadságfoka

$$2\,n\,T,$$

illetőleg

$$(2n + m)\,T.$$

A specifikált modellekben ezt a szabadságfokot ilyen vagy olyan módon csökkenteni fogjuk.

2.3. *A modell interpretálása és lehetséges általánosításai*

Az általános modell fent ismertetett formájának sajátosságai, amelyek más hasonló célt szolgáló modellektől megkülönböztetik, a következők:

a) *Ágazati kapcsolatok.* A modell nem tartalmazza a folyó ráfordítások ágazatközi kapcsolatait, folyó input-output egyenleteket. Az ágazatoknak a fogyasztást, készletváltozást és beruházást szolgáló outputjai (amelyek között itt nem teszünk különbséget) egyszerűen befolynak a népgazdaság egészére összesített „hozzáadott érték" kasszájába (1), és innen naturális összetételükre való tekintet nélkül osztatnak fel (3). A termelés folyó ráfordításait képviselő $\sum_j (1 - a_j) X_j$ összeg be sem lép az (1) és (3) egyenletek által alkotott GDP mérlegbe és csak a felhasználó szerint bontható fel, a kibocsátó szerint nem. Ezzel szemben a beruházási javak egy nagy részének (a beruházási szektorok által kibocsátott részének) ágazatközi áramlását a modell részletesen ábrázolja a (8) egyenletben. Az itt szereplő Q változók bármelyikének nem 0 értéke a beruházási piac parciális egyensúlytalanságát jelzi. Ezek az egyensúlytalanságok kiegyenlíthetik egymást a GDP mérlegben, akkor az egyensúlytalanság a beruházási szektorokra korlátozódik és (például) a beruházások anyagi összetételének módosításával megszüntethető. Ellenkező esetben azonban, ha a beruházási szektorok együttese globális hiányt vagy felesleget mutat, akkor, mivel a GDP mérleg egyensúlyát előírtuk, az egyensúlytalanság ellenkező előjellel a fogyasztási javak piacán is megjelenik vagy készletváltozásban csapódik le.

A modellnek fent leírt sajátossága azzal függ össze, hogy – a hosszútávú tervezés szolgálatában – a figyelmet a beruházások allokációjára koncentrálja.

b) *Beruházási politika.* Modellünk legsajátságosabb jellemzője az, ahogyan a beruházási politikát kezeljük a (7a) illetve (7b) egyenletekben, fix allokációs koefficiensek segítségével. Bár a koefficiensek periódusról periódusra változnak, de egy számításban adottak és meghatározzák azt az arányt, amelyben a (változóként kezelt) összes beruházás (7a), illetőleg a nem beruházási szektoroknak jutó beruházás (7b) megoszlik a kérdéses szektorok között. A beruházás allokációs koefficiensek egy együttesét úgy tekintjük, mint egy beruházási politika reprezentánsát és modellünk különböző lehetséges politikák hatását vizsgálja a gazdaság növekedési pályájára. Specifikált modelljeink részben abban különböznek egymástól, hogy az összes allokációs arányokat tekintjük-e fixnek (7a), vagy pedig csak a nem beruházási szektorok közötti allokáció arányait (7b). Az utóbbi esetben a beruházási szektorok beruházásai bizonyos fokig endogén módon határoztatnak meg nemcsak abszolút nagyságukban, hanem egymáshoz és a nem beruházási szektorok összes beruházásához mért arányukban is. Modellünk tehát, egy-egy számítás során, elfogad és vizsgál, de nem alakít ki beruházási politikát, legalábbis a nem beruházási szektorok közötti allokációt illetően. Egy sok számításból álló sorozat azonban, amelyekben különböző allokációs koefficiens-együttesek szerepelnek, lehetővé tesz bizonyos szelekciót az ezek által képviselt gazdaságpolitikák között.

Modellünknek fenti aspektusa az, ami a Feldman–Mahalanobis típusú modellekkel [2, 3] rokonítja, mégis azzal a szerintünk lényeges különbséggel, hogy az allokációs koefficiensek időbeli változatlanságát mi nem posztuláljuk.

c) *Fogyasztás.* A fogyasztási függvény (6) specifikálatlansága miatt itt még erről a kérdésről nem sokat tudunk mondani. Mégis kissé előreszaladva annyit elmondhatunk, hogy kezelésük a beruházási allokációk kezeléséhez igazodik. Olyan modellben, ahol az összes beruházásokat fix koefficiensekkel osztjuk szét, hasonló módon hasítjuk ki a fogyasztást is a GDP-ből, más modellben a fogyasztási pálya a maga egészében rögzített vagy pedig a modell választ a megengedett pályák egy seregéből. Végül is e tekintetben nem köteleztük el magunkat valamilyen jellegzetes elvhez és esetleges további modellváltozatok kidolgozása esetén szabadon választhatunk akár az alább szereplő változatok között, akár újabbakat kreálhatunk.

d) *A ráfordítások linearitása.* Egyenleteink a specifikálatlan (6) egyenlet kivételével valamennyien lineárisak és az alábbi specifikus modellekben ez a kivétel is eltűnik. A linearitásnak ez a feltételezése itt sokkal inkább kényelmességből és kevésbé kényszerből származik, mint más modelltípusoknál. Látni fogjuk, hogy a specifikált modellek közül kettőnek az algoritmusa nem követeli meg egyenletrendszerek szimultán megoldását, pusztán korábban kiszámított változó-értékeknek a szukcesszív helyettesítését. Ilyen esetekben elvileg semmiféle és számítástechnikailag is csak jelentéktelen hatása lenne annak, ha egyes összefüggéseket nemlineáris függvényekkel reprezentálnánk.

Ezt a lehetőséget elsősorban az (1), (4) és (5) egyenletek esetében lehetne kihasználni, tehát lényegében a ráfordításoknak a termelésssel való arányosságától szabadulhatnánk meg, akár a csökkenő, akár a növekvő hozamok irányában. Ez lenne az egyik út az itt szereplő általános modell további általánosítása felé. Mindez a könnyedség, amivel itt a kérdésről szóltunk, eltűnik, ha arra gondolunk, hogy milyen nehézségekkel jár a megfelelő típusú nemlineáris függvény kiválasztása és paramétereinek becslése, prognosztizálása. Elsősorban ennek tulajdonítható, hogy első, kísérleti számításaink során nemlineáris függvények beiktatására komolyan gondolni sem mertünk.

e) *Munkaerő.* A modellben a munkaerő nem szerepel. Ez a hiány semmiféle közgazdasági megfontolással nem támasztható alá, a munkaerőt mi is a hosszútávú tervezésben még erősen aggregált elemzés esetén is számításba veendő alapvető tényezőnek tekintjük; hiánya a modellnek gyermekbetegsége. Úgy véljük, hogy ha a modelltípus életképessége és használhatósága bebizonyosodik, akkor elsőrendű feladattá válik a hiány pótlása.

A munkaerőproblémának az általános modellbe való beépítésére több alternatív lehetőség kínálkozik, amelyekkel különböző típusú modelleket kapnánk:

A) A modell szerkezetét változatlanul hagyjuk csak kiegészítjük egy vagy több

$$L^t = \sum_j l_j^t X_j^t + H^t$$

alakú munkaerőmérleggel, ahol L^t a rendelkezésre álló munkaerő, l_j^t a j szektor fajlagos munkaerőigénye, H^t pedig a munkaerőfelesleg vagy hiány. Több mérleg esetén az egyes mérlegek a munkaerő különböző kategóriáira vonatkozhatnak. Ezzel, ha mást nem, regisztrálni és ellenőrizni tudjuk a beruházási politikának a munkaerőhelyzetre kifejtett hatását, de olyan specifikált modell is készíthető, amelyikben a munkaerőpiac egyensúlyát is kikötjük. Ez különösen az *LP* modellbe látszik könnyen beilleszthetőnek.

B) A gazdaságpolitikát nem a beruházásoknak, hanem a mindenkor rendelkezésre álló munkaerőnek az allokációs hányadai útján fejezzük ki. Ez esetben az egyes ágazatok állóeszköz (tehát beruházási) szükséglete a munkaerő elosztásának következménye. Egy ilyen modell inkább párja, semmint helyettesítője lehetne az itt leírt modellnek.

C) Míg az *A)* és *B)* esetekben az állóeszköz és a munka komplementer termelési tényezőként szerepelnek (mivel hogy a tőkekoefficiens fix értékei nem engednek meg technológiák közötti választást), egy más modelltípusban számításba vehető a közöttük fennálló technológiai helyettesítési viszony. Kutatócsoportunknak vannak bizonyos fenntartásai ezzel a felfogással, a neoklasszikus termelési függvények alkalmazásával szemben, de azért véglegesen még ezt a változatot sem vetettük el.

Végső soron az az igazság, hogy a munkaerő kezelésének mikéntjét az egyes speciális modellekben sem oldottuk még meg és így egyelőre nem ábrázolható a probléma az általános modell keretei között sem. (Az a körülmény, hogy az LP modell minden nehézség nélkül befogadná a munkaerőmérlegeket, a mi szemünkben nem oldja meg a problémát, hiszen mint majd kifejtjük, e modellnek csak kiegészítő, alárendelt szerepet szánunk.)

f) *Külkereskedelem.* Véleményünk szerint a külkereskedelem hosszútávú tervezésének problémái olyan mértékben elütnek az itt vizsgált kérdéskörtől, hogy azok csak speciálisan külkereskedelmi célra szerkesztett modell vagy modellek segítségével vizsgálhatók. Ezzel szemben igaz az, hogy Magyarországra külkereskedelmet figyelmen kívül hagyó és mégis reális eredményt adó modellt nehéz elképzelni. Ezért a későbbiek során meg kell majd vizsgálni, hogyan lehet a speciális külkereskedelmi modellekből nyert eredményeket a tervszondázás keretében felhasználni, a külkereskedelemnek a beruházási politikára való hatását számításba venni.

g) *Állóeszközök selejtezése.* A (2) egyenlet az állóeszközök selejtezését igen leegyszerűsítetten kezeli, feltételezve, hogy minden évben a meglevő állóeszközök egy meghatározott hányadát (bár évenként és szektoronként különböző hányadát) selejtezik ki. Még a linearitás fenntartása mellett is lehetőség volna a selejtezés finomabb kezelésére, figyelembe véve, például, az eszközök évjáratát és így összefüggést teremtve a selejtezés mértéke és a tőkekoefficiensek értéke között. Ilyen összefüggés kétségtelenül fennáll, de alig áll rendelkezésre statisztikai adat, amelyből számszerűsíthető lenne. Még az itt alkalmazott egyszerűsített kezelési mód mellett is csak közvetett és bizonytalan módon tudtuk becsülni a selejtezés tényadatait és semmiféle támpontunk nem volt a hosszútávú terv lehetséges „selejtezési politikáit" illetően, hogy azokat modellünkkel megvizsgálhattuk volna.

2.4. *Az általános modell specifikálása*

Az általános modell különböző specifikációinak két egymással ellentétes tendenciájuk van:

Először: a modellek különböznek egymástól abban, hogy miféle és milyen mértékű egyensúlytalanságot engednek meg. A modellek egymásutámja e tekintetben javuló tendenciát tükröz, egyre kisebb és ésszerűbb területre szorul a megengedett egyensúlytalanság. (Például beruházási javak hiánya is megengedett az elsőben, míg csupán termelési kapacitás feleslegek megengedettek az utolsóban.) Azt persze nem lehet garantálni, hogy egy a priori rögzített gazdaságpolitikához biztosan lehessen egyensúlyi pályát illeszteni.

Másodszor: az előbbivel párhuzamosan növekszik a modellek megoldásának munkaigényessége. Míg az első modell szukcesszív behelyettesítésekkel oldható meg és így nagyon könnyen nagyon sok pályát lehet kiszámítani, az utolsó már egy közepes méretű lineáris programozás elvégzését követeli. Mivel fő célunk pályák tömeges számítása, a terv lehetőségeinek szondázása volt, az utóbbi megoldás hátrányai nem lebecsülendők, még akkor sem, ha egyébként egy ilyen modell megoldása ma már számítástechnikai szempontból nem túl igényes feladat.

A továbbiakban három specifikált modellt mutatunk be:

A szekvenciális (SQ) modell. (3. fejezet)

A negatív visszacsatolásos (NV) modell. (5. fejezet)

A lineáris programozási (LP) modell. (6. fejezet)

Minden modell esetében először megmutatjuk kapcsolatát az általános modellel, majd taglaljuk megoldási módját és azt, hogy mit tud és mit nem. E modellek egy-egy megoldási elvet is reprezentálnak és az alábbi elvek szerint megoldható modellcsaládok egy-egy tagjának is tekinthetők:

1. Szukcesszív helyettesítések módszere. Itt az egyenletekből álló rendszer változóit meghatározott sorrend szerinti helyettesítésekkel egymásból számítjuk ki, egy számítás keretében a korábban kiszámított értékeket nem módosítjuk. Ezt az elvet képviseli az SQ modell.

2. Visszacsatolásos módszerek. Ezek hasonlítanak az előzőhöz abban, hogy a változók értékeit egymás után számítjuk ki, de különbözik abban, hogy az egyszer kiszámított értékeket más változók utóbb kiszámított értékeinek felhasználásával módosítjuk (az utóbbi értékek visszahatnak, visszacsatolódnak az előbbiekre). Így a megfelelő eljárások rekurziós lépéseket is tartalmaznak. Ilyen módszert alkalmazunk az NV modell megoldásánál.

3. Egyenletrendszerek szimultán megoldása. Ez esetben a változóknak egy — adott egyenleteket és más (pl. nem-negativitási) feltételeket kielégítő — értékrendszerét egyidejűleg kapjuk meg. A feladat megoldásának csak egyik — de lineáris rendszer esetén jól járható — útja a matematikai programozási (optimálási) feladat formájában való felírás. Ezt tesszük az LP modell esetében.

3. A szekvenciális (SQ) modell

3.1. *Specifikációk*

A szekvenciális (SQ) modell a pályaelemeket, azaz a változók évről-évre felvett értékeit az időben előre haladva egymásután számítja ki. Hogy ez az eljárás alkalmazható legyen, a rendszer szabadságfokát lényegesen csökkentenünk kell. Ezenkívül specifikálnunk kell a C^t fogyasztási függvényt (6) és döntenünk kell arról, hogy a (7a) vagy a (7b) allokációs formulát alkalmazzuk-e.

Specifikációink a következők:

a) $U_j^t = V_j^t = 0$ minden j-re és $t \neq 1$-re.

Azaz a második évtől kezdődően nem engedünk meg egyik szektorban sem felesleges állóeszközt, vagy forgóeszközt, ezek állományát az első év végére összhangba hozzuk, lényegében úgy, hogy a forgóeszközök állományát az egyensúlyi szintre emeljük vagy csökkentjük.

b) $U_j^1 \cdot V_j^1 = 0$ minden j-re.

Az első évben minden ágazatban megengedünk vagy kihasználatlan állóeszközöket, vagy forgóeszközöket, de csak az egyiket. Az első év termelése a szektor vonatkozásában szűkebb keresztmetszethez igazodik. Mivel az induló álló- és forgóeszközöket adottságkként örököltük, nem tételezhetjük fel, hogy ezek összhangban vannak, csak azt, hogy nincsenek túlságosan távol és egy év alatt összhangba hozhatók.

c) $C^t = c^t Y^t$

ahol $c^t \in (0,1)$ adott, a gazdaságpolitikai koncepciót kifejező arányossági tényező, a GDP fogyasztási célra szolgáló hányada. A fogyasztási függvénynek az az alakja bizonyos uniformizálási törekvésből származott. ,,Ha a beruházási politikát allokációs *hányadokkal* fejeztük ki, jellemezzük hányad alakjában a GDP allokációját is fogyasztásra és felhalmozásra''. Ezt a felfogást ma már nem valljuk és helyesebbnek tartjuk például azt is, ha a fogyasztási politikát a fogyasztás növekedési rátájának előírásával reprezentáljuk, mondjuk

$$C^t = g^t C^{t-1}$$

alakban. Ez azt jelenti, hogy eleve rögzített fogyasztási pályával dolgozunk. A modell megoldási módját ez a módosítás lényegében nem érintené.

d) A (7a) beruházás-allokációs formulát alkalmazzuk.

e) A beruházási piac egyensúlytalanságát ($Q_j \neq 0$) csak regisztráljuk, de konzekvenciáit nem érvényesítjük.

3.2. *Az SQ modell leírása*

A modell leírásában a teljesség kedvéért megismételjük az általános modellből változatlanul átvett egyenleteket és ezekhez nem fűzünk megjegyzést.

$$Y^t = \sum_j a_j^t X_j^t \tag{1}$$

$$K_j^{t+1} = q_j^t K_j^t + I_j^t \tag{2}$$

$$Y^t = C^t + I^t + S^{t+1} - S^t \tag{3}$$

$$K_j^t = k_j^t X_j^t \quad t \neq 1 \tag{4}$$

$$S_j^t = s_j^t X_j^t \quad t \neq 1 \tag{5}$$

(4) és (5) megfelelnek az (a) specifikációnak.

$$X_j^1 = \min\left\{\frac{K_j^1}{k_j^1}, \frac{S_j^1}{s_j^1}\right\}. \tag{$4^1 - 5^1$}$$

Megfelel a (b) specifikációnak.

$$C^t = c^t Y^t. \tag{6}$$

A (c) specifikáció szerint.

$$I_j^t = d_j^t I^t. \tag{7}$$

Lásd (d).

$$Q_i^t = X_i^t - \sum_j b_{ij}^t I_j^t. \tag{8}$$

Lásd (e).

$$S^t = \sum_j S_j^t. \tag{9}$$

A nem-negativitási feltételekkel majd a 3.4. pontban foglalkozunk.

3.3. *A modell megoldása*

Az SQ modell megoldása nem áll egyébből, mint az (1)–(9) egyenletek megfelelő sorrendben való elhelyezéséből és a (3) és (5) egyenleteknek némi, helyettesítések útján végrehajtott átalakításából. Az azonosítás könnyebbsége érdekében az egyenletek számozását megőriztük.

A t-edik periódusra vonatkozó számítás kezdetén rendelkezésre állnak a nyitó állóeszköz- és forgóeszköz-állományok, K_j^t és S_j^t szektoronként.

$$(4^1 - 5^1) \qquad X_j^1 = \min\left\{\frac{K_j^1}{k_j^1}, \frac{S_j^1}{s_j^1}\right\}$$

$$(4) \qquad X_j^t = \frac{K_j^t}{k_j^t} \qquad t \neq 1$$

$$(1) \qquad Y^t = \sum_j a_j^t X_j^t$$

$$(6) \qquad C^t = c^t Y^t$$

$$(9) \qquad S^t = \sum_j S_j^t$$

$$(3^*) \qquad I^t = \frac{Y^t - C^t + S^t - \sum\limits_j \frac{q_j^t s_j^{t+1}}{k_j^{t+1}} K_j^t}{1 + \sum\limits_j \frac{d_j^t s_j^{t+1}}{k_j^{t+1}}}$$

$$(7) \qquad I_j^t = d_j^t I^t$$

$$(8) \qquad Q_i^t = X_i^t - \sum_j b_{ij}^t I_j^t$$

$$(2) \qquad K_j^{t+1} = q_j^t K_j^t + I_j^t$$

$$(5^*) \qquad S_j^{t+1} = \frac{s_j^{t+1}}{k_j^{t+1}} K_j^{t+1}$$

Ezután kezdődik a $t + 1$ periódus számítása.

Ezekután könnyen belátható az alábbi állítások igazsága:

I. A fenti számítási eljárás minden lépése végrehajtható és megadja a a rendszer minden változójának értékét $t = 1$-től T-ig.

II. Az így kiszámított értékek kielégítik az eredeti (1)—(9) egyenletrendszert minden t-re.

III. Az (1)—(9) egyenletrendszernek van megoldása.

Bizonyítás.

I. A k_j (és az s_j^1) koefficiensek értelemszerűen pozitív és a d_j hányadok hasonlóképpen nemnegatív értékei mellett 0-val való osztást sehol sem írtunk elő. Így a számítás végrehajtható és az összes változók értékeit rendre megkapjuk.

II. A számításban használt egyenletek a (3) és az (5) kivételével megegyeznek a modell egyenleteivel. Így csak ezek kielégítettségét kell bizonyítanunk. Először (5)-ét: (4)-ből $K_j^{t+1} = k_j^{t+1} X_j^{t+1}$ minden t-re, tehát (5*)-ból $S_j^{t+1} = s_j^{t+1} X_j^{t+1}$, azaz (5) áll minden $t \neq 1$-re.

Lássuk most (3)-at:
(3*)-ból

$$I^t + \sum_j \frac{d_j^t I^t s_j^{t+1}}{k_j^{t+1}} = Y^t - C^t + S^t - \sum_j \frac{q_j^t s_j^{t+1}}{k_j^{t+1}} K_j^t$$

(7) szerint helyettesítve és átrendezve:

$$I^t = Y^t - C^t + S^t - \sum \frac{s_j^{t+1}}{k_j^{t+1}} (q_j^t K_j^t + I_j^t).$$

Tehát (2) és (5*) figyelembevételével

$$I^t = Y^t - C^t + S^t - \sum_j S_j^{t+1}$$

ami (9) alapján és átrendezve (3)-at adja.

III. Következik az I. és a II. állításból.

A fentiekből az is látható (anélkül, hogy meg kellene számolnunk a változókat és egyenleteket), hogy rendszerünk szabadságfoka 0.

3.4. *A nemnegativitási feltételek*

A modell megoldásának menetéből látható, hogy ha a (3*) alapján kiszámított I^t nemnegatív minden t-re, akkor ez a kiinduló K_j^1, S_j^1 értékek és a koefficiensek értelemszerű nemnegativitásával együtt garantálja, hogy az összes többi változók is (eltekintve az előjelben nem korlátozott Q_i változóktól) nemnegatív értékeket vegyenek fel. Megmutatjuk, hogy I^t nem negativitása a koefficiensekre vonatkozó nagyon plauzibilis feltevések mellett teljesül. Ugyanis (3*) szerint I^t nem negatív, ha

$$Y^t - C^t + S^t - \sum_j \frac{q_j^t s_j^{t+1}}{k_j^{t+1}} K_j^t \geq 0$$

C^t értékét (6) szerint, majd Y^t-ét (1) szerint, továbbá S^t-ét (9) és (5) szerint, K_j^t-ét (4) szerint helyettesítve

$$\sum_j (1 - c_j^t) a_j^t X_j^t + \sum_j s_j^t X_j^t - \sum_j \frac{q_j^t s_j^{t+1} k_j^t}{k_j^{t+1}} X_j^t \geq 0, \quad (t \neq 1).$$

Ha minden j-re áll

$$(+) \qquad (1 - c_j^t) a_j^t + s_j^t - \frac{q_j^t s_j^{t+1} k_j^t}{k_j^{t+1}} \geq 0 \quad (t \neq 1)$$

akkor a fortiori áll a fenti egyenlőtlenség.

Feltételezve, hogy

$$\frac{s_j^t}{k_j^t} \approx \frac{s_j^{t+1}}{k_j^{t+1}} \quad (t \neq 1)$$

azaz az álló- és a forgóeszköz-hányadosok aránya egyik évről a másikra nem változik túl drasztikusan (és az egy nagyon plauzibilis feltevés), akkor

$$s_j^t - \frac{q_j^t s_j^{t+1} k_j^t}{k_j^{t+1}} \approx (1 - q_j^t) s_j^t > 0, \quad (t \neq 1)$$

és a (+)-szal jelzett egyenlet baloldala két pozitív szám összegére bomlott, hiszen $c^t < 1, q_j^t < 1$. Ezzel beláttuk, hogy I^t minden bizonnyal nem negatív, minden $t \geq 2$-re. $t = 1$-re hasonlóképpen kézenfekvően teljesülő feltevés adható meg, de ennek részletezését mellőzzük.

Ezzel tulajdonképpen megindokoltuk, hogy a nemnegativitási feltételeket miért hagyhattuk mindvégig figyelmen kívül.

4. Korrekciós eljárás az SQ modellhez

Az [1] cikkben ismertetett és elemzett valamennyi pályát az SQ modellel számítottuk. A pályák nagy részénél a beruházási piacon meglehetősen nagy egyensúlytalanság uralkodott — azaz a Q_i változók értéke jelentősen különbözött 0-tól —, az eltérés azonban az egyes beruházási szektorokban ellenkező előjelű volt; az egyik szektorban majdnem minden évben termékhiány, a másikban termékfelesleg lépett fel. Nyilvánvaló, hogy ilyen esetekben a beruházási eszközöknek az átcsoportosítása a termékfelesleggel rendelkező ágazatból a termékhiánnyal küszködőbe, javíthatja mindkettő egyensúlyát. Ez vezetett az alábbi korrekciós eljárás kidolgozásához, amelynél igyekeztünk az SQ eljárás egyszerűségét megtartani és ezért a kérdést heurisztikus úton közelítettük meg.

A korrekció a beruházási szektorok d_i^t allokációs hányadainak módosítására irányul. A nem beruházási szektorok d_h^t allokációs hányadainak egymás közötti arányait érintetlenül hagyjuk, ezzel elérjük, hogy a módosított pálya lényegében ugyanazt a beruházási politikát reprezentálja, mint az eredeti, legalábbis a nem beruházási szektorok irányában. A nem beruházási szektorok és a beruházási szektorok együttese közötti allokációs arány is változhat eközben a beruházási szektorok allokációs hányadainak módosulása következtében.

Tegyük fel, hogy a beruházási szektorok d_i^t allokációs hányadait

$$d_i^{t*} = d_i^t + \delta_i^t$$

-re változtattuk, ahol feltesszük, hogy $\delta_i^t \in (-d_i^t, 1 - d_i^t)$. Ekkor a nem beruházási szektorok d_h^t allokációs hányadait

$$d_h^{t*} = d_h^t \frac{1 - \sum\limits_i d_i^{t*}}{\sum\limits_h d_h^t}$$

re kell változtatnuk. Így ugyanis

$$d_h^{t*} : d_{h'}^{t*} = d_h^t : d_{h'}^t$$

és

$$\sum_j d_j^{t*} = \sum_i d_i^{t*} + \frac{1 - \sum\limits_i d_i^{t*}}{\sum\limits_h d_h^t} \sum_h d_h^t = 1.$$

Ily módon — ha a δ_i^t korrekciós tagokat helyesen állapítottuk meg — újra alkalmazhatjuk az SQ módszert mostmár a d_j^{t*} korrigált allokációs hányadokkal számolva. Így a korrigált pálya közelebb kerülhet az egyensúlyi állapothoz a beruházási javak piacán anélkül, hogy az eredeti koncepciót lényegesen módosítottuk volna. A kérdés tehát az, hogyan határozzuk meg a δ_i^t korrekciókat. Ehhez a következő pontatlanul közelítő gondolatmenettel juthatunk el.

Tegyük fel, hogy az i-edik beruházási szektorban a $t+1$-edik évben P_i^{t+1} mennyiséggel akarjuk a termékfelesleget csökkenteni. Ehhez $k_i^{t+1} P_i^{t+1}$-gyel kell csökkenteni a szektor éveleji állóeszköz állományát, azaz durván ugyanennyivel az előző t-edik évben a kérdéses szektorba beruházott összeget. A δ_i^t korrekció a t-edik évben $\delta_i^t I^t$-vel módosítja a szektor beruházását. E kettőt egyenlővé téve és figyelembe véve, hogy δ_i^t-nak termékfelesleg esetén negatívnak, termékhiány esetén pozitívnak kell lennie, azt kapjuk, hogy

$$\delta_i^t I^t = -k_i^{t+1} P_i^{t+1},$$

azaz

$$\delta_i^t = \frac{-k_i^{t+1} P_i^{t+1}}{I^t}.$$

A P_i^t-k meghatározásához két szempontot kell figyelembe vennünk. Először is, ha egy évben a szektornak jutó beruházást csökkentettük, akkor – minden egyebet változtatlanul hagyva – ez az akció nem csak a közvetlenül utána következő év, hanem valamennyi későbbi év termelőkapacitását is csökkenti, módosítja a következő évek termékhiányait és feleslegeit is. Tehát ha az $1, 2, \ldots, t$ években $P_i^1, P_i^2, \ldots, P_i^t$ korrekciókat vettünk számításba, akkor a $t+1$-edik évben már csak (újból durván közelítve) $Q_i^{t+1} - \sum_{\tau=1}^{t} P_i^\tau$ termékfeleslegünk (hiányunk) lesz az i szektorban. Másodszor: mindezek a számítások csak durván közelítik a valóságos hatásokat, hiszen nem vettük tekintetbe, hogy a beruházási szektorok közötti allokáció megváltoztatása nemcsak a kibocsátásokat, hanem a beruházási javak keresletét is módosítja, hogy megváltozik a kiselejtezett állóeszközök mennyisége stb. Ezért helytelen lenne a $Q_i^{t+1} - \sum_{\tau=1}^{t} P_i^\tau$ mennyiséget teljes egészében korrigálandónak tekinteni, hiszen így az elhanyagolások miatt a feleslegből hiányba, a hiányból feleslegbe ugrándozhatunk. A hatás csillapítása végett mindig csak az így közelített mennyiség felét vesszük számításba, azaz

$$P_i^{t+1} = \frac{1}{2}\left(Q_i^{t+1} - \sum_{\tau=1}^{t} P_i^\tau\right).$$

Végül pedig az első év hiányait, illetve feleslegeit ezen az úton nem lehet korrigálni, hiszen múltbeli beruházásokat nem tudunk reallokálni.

A fenti gondolatmenet tehát a következő számítássorozathoz vezet:

$$P_i^1 = 0$$

$$P_i^{t+1} = \frac{1}{2}\left(Q_i^{t+1} - \sum_{\tau=1}^{t} P_i^\tau\right)$$

$$\delta_i^t = -\frac{k_i^{t+1} P_i^{t+1}}{I^t}$$

$$d_i^{t*} = d_i^t + \delta_i^t$$

$$d_h^{t*} = d_h^t \frac{1 - \sum_i d_i^{t*}}{\sum_h d_h^t}.$$

Bármily primitív is ez a korrekciós eljárás, a kísérleti számítás során meglepően hatékonynak bizonyult. Egyszeri alkalmazása egy meglehetősen egyensúlytalan pálya feleslegeit és hiányait töredékükre csökkentette. A korrekciós eljárás hátránya, hogy utólag, a pálya kiszámítása után külön munkamenetben kell végrehajtani, nem pedig a pályaszámítás keretében, automatikusan. Ez a felismerés egy új modellváltozat kidolgozásához vezetett.

5. A negatív visszacsatolásos (NV) modell

5.1. *Specifikációk*

Az NV modell nagyon hasonlít az SQ modellhez, néhány specifikációjában mégis különbözik tőle. Magában a modellben a lényeges eltérés az, hogy amíg az SQ modellben az egyensúlyhiány a beruházási szektorok termékfeleslegeként vagy hiányaként csapódott le, itt biztosítjuk a beruházási termékmérlegek egyensúlyát, ezzel szemben megengedjük, hogy a beruházási szektorokban bizonyos korlátozott mértékű kihasználatlan kapacitások legyenek állóeszközökben. Ezt általában nem lehet egy csapásra elérni, ha valamelyik évben valamelyik beruházási szektorban állóeszközhiány vagy a megengedettnél nagyobb mértékű felesleg mutatkozik, akkor vissza kell térni az előző évhez és ott a beruházásokat újra allokálni. Ez az időbeni visszatérés az, amit a szabályozáselmélet nyelvéből kölcsönözve negatív visszacsatolásnak nevezhetünk. Hiszen itt a t-edik év outputját (információs értelemben) felhasználjuk arra, hogy segítségével a $t-1$-edik év információs inputját módosítsuk; a reálfolyamat szabályozása végett a lemért értékeket transzformáljuk és visszacsatoljuk. A visszacsatolás negatív, hiszen kapacitástöbblet (+) esetén a múltbeli beruházást csökkentjük (—), hiány (—) esetén növeljük (+). Egy szabályosan működő visszacsatolásos rendszer kiépítése végett valójában nem csak az előző évhez, hanem az előző évekhez is vissza kellene térni, hiszen ha a t-edik év egyensúlyzavarának kiküszöbölésére a $t-1$ évben a beruházásokat reallokáljuk, akkor ezzel elronthatjuk a $t-1$ évnek korábban létrehozott egyensúlyát, ennek korrigálására vissza kell térnünk a $t-2$-edik évhez és így tovább. Ez így igen hosszadalmas eljárás lenne, amelyik végülis nem biztos, hogy sikerhez vezetne, hiszen az időben nem haladhatunk korlátlanul visszafelé. Ezért a sok lépcsős visszacsatolás helyett csak egy lépcsős visszacsatolást alkalmazunk, abban a reményben, hogy az egyszer létrehozott egyensúlyt a további évek korrekciói csak olyan kismértékben zavarják, hogy a kapacitásfeleslegek még mindig a megengedett tűrési határok között maradnak (és a kapott pálya ebben az értelemben egyensúlyi) vagy a határokat csak kis mértékben lépik túl. Ebből a szempontból elsősorban az alsó határ átlépésének, azaz kapacitáshiány fellépésének van jelentősége, elméletileg ilyen visszahatás is előfordulhat. Ennek valószínűségét úgy csökkentjük, hogy az egylépéses visszacsatolás során némi fölös kapacitást hozunk létre, hogy a későbbi korrekciók ennek terhére végrehajthatók legyenek.

Az így megfogalmazott modellre és megoldási módszerére csak nagyon gyenge (matematikailag pontos) állításokat lehetne bizonyítani. Ezért helyesebb, ha ezt az eljárást is heurisztikusnak tekintjük.

Specifikációink (az általános modellhez képest) a következők:

a) $U_h^t = V_h^t = 0$, ha $t \neq 1$, $U_h^1 \cdot V_h^1 = 0$, azaz nem engedünk meg sem felesleges állóeszköz-, sem forgóeszköz-készleteket a nem-beruházási szektorokban, kivéve az első évet, amikor legfeljebb egyikük pozitív lehet.

b) $Q_i = 0$

azaz a beruházási szektorokban sem termékfelesleg, sem hiány nem lehet.

c) A beruházási szektorokban a forgóeszközöket nem a termeléshez, hanem az állóeszközökhöz igazítjuk. Tehát, ha állóeszközökben bizonyos felesleg van egy beruházási szektorban, ott ugyanilyen arányú felesleg lesz forgóeszközökben is. Így a nem beruházási szektorokban *a)* miatt amúgyis érvényes:

$$S_i^{t+1} = \frac{s_i^{t+1}}{k_i^{t+1}} K_i^{t+1}$$

egyenletet alkalmazzuk a beruházási szektorokra is.

d) $C^t = \bar{C}^t$ adott

Lásd a 3.1. szakasz *c)* bekezdésében foglaltakat.

e) Váltogatva alkalmazzuk a (7a) és (7b) allokációs formulákat, úgy hogy

$$\tilde{d}_h^t = \frac{d_h^t}{\sum\limits_h d_h^t}$$

Ez annyit jelent, hogy a modell megoldása során a d_h^t eredeti allokációs hányadokból indulunk ki, majd a beruházási szektoroknak jutó beruházást ehhez képest, ha szükséges, módosítjuk és a nem-beruházási szektorok részére megmaradó beruházási összeget a $\tilde{d}_h^t$ koefficiensekkel, tehát az eredetivel azonos arányban osztjuk szét.

5.2. *Az NV modell*

Bevezetjük a következőképpen definiált új J változót

$$J = \sum_h I_h$$

azaz J a nem beruházási szektoroknak jutó beruházások összege.

Bevezetjük továbbá az α paramétert (tűrési határt), amely egy önkényesen megállapított szám, $\alpha \in (0,1)$, közel 1-hez. Ennek feladata a beruházási szektorok eszközfeleslegeinek korlátozása. Pl. ha $\alpha = 0{,}9$, akkor 10% kapacitásfelesleget tekintünk megengedettnek.

Végül bevezetjük az $\bar{U}_i$ változókat az

$$\bar{U}_i^t = k_i^t X_i^t - \alpha K_i^t$$

definicióval. Azaz $\bar{U}_i^t$ azt mutatja meg, hogy az állóeszközök tényleges kihasználtsága mennyivel haladja meg a megengedett minimális kihasználtságot. E változó nem-negativitása jelzi, hogy nem léptük át a kihasználatlanságra előírt határt.

A modell egyenletei ezúttal is az általános modell 2.2. szakaszbeli számozását viselik.

(1) $$Y^t = \sum_j a_j^t X_j^t$$

(2) $$K_j^{t+1} = q_j^t K_j^t + I_j^t$$

(3) $$Y^t = C^t + I^t + S^{t+1} - S^t$$

(4_i) $$K_i^t = k_i^t X_i^t + U_i^t$$

(4_h) $$K_h^t = k_h^t X_h^t \quad t \neq 1$$

(4_h^1—5_h^1) $$X_h^1 = \min \left\{ \frac{K_h^1}{k_h^1}, \frac{S_h^1}{s_h^1} \right\}.$$

A (4_i), (4_h), (4_h^1—5_h^1) egyenleteket illetően lásd az *a)* specifikációt.

(5) $$S_j^t = \frac{s_j^t}{k_j^t} K_j^t \quad t \neq 1 .$$

Lásd a *c)* specifikációt.

(6) $$C^t = \bar{C}^t .$$

Lásd a *d)* specifikációt.

(7) $$I_h^t = \tilde{d}_h^t J^t$$

Lásd *a)*.

(8) $$X_i^t = \sum_j b_{ij}^t I^t$$

Lásd *b)*.

(9) $$S^t = \sum_j S_j^t$$

(10) $$I^t = \sum_i I_i^t + J^t$$

(11) $$\bar{U}_i^t = k_i^t X_i^t - \alpha K_i^t$$

Pótlólagos egyenlet az $\bar{U}_i^t$ definíciója értelmében.

Nem negativitási feltételek:

(12) $$I_i^t \geq 0, \; J^t \geq 0, \; U_i^t \geq 0, \; \bar{U}_i^t \geq 0.$$

E feltételek kielégítettsége esetén a többi változók nem-negativitása természetszerűleg adódik. K_j-é (2)-ből, X_i-é (7) és (8)-ból, X_h-é (4_h)-ból stb.

A rendszer szabadságfoka mT.

5.3. *A modell megoldása*

Az NV modell megoldásának gondolatmenete a következő. Először az SQ modell megoldásának mintájára, tehát szukcesszív behelyettesítésekkel és az eredeti d_j^t allokációs koefficiensek alkalmazásával kiszámítjuk a pályaelemeket (a változók értékeit) két egymást követő évre, a másodikra csak addig, amíg kiderül, hogy U_i^t illetve $\bar{U}_i^t$ nem negatív-e valamilyen i-re. Ha nem, akkor haladunk tovább, ha igen, akkor visszatérünk az utolsó előtti évre, célszerűen módosítjuk a beruházási szektoroknak jutó beruházást, a maradékot a $\tilde{d}_h^t$ arányokban szétosztjuk a nem beruházási szektorok között és újból ellenőrizzük, hogy U_i^t, $\bar{U}_i^t$ nem negatívok-e. A két egymást követő év ezen egyeztetését addig folytatjuk, míg minden U_i^t, $\bar{U}_i^t$ nemnegatívvá (valójában pozitívvá) válik és akkor tovább megyünk.

A t-edik szakasz számításának kezdetén rendelkezésünkre áll K_j^t, S_j^t minden t-re.

1. lépés. Végezzük el a következő számításokat:

$$X_h^1 = \min\left\{\frac{K_h^1}{k_h^1}, \frac{S_h^1}{s_h^1}\right\} \tag{4_h^1–5_h^1}$$

$$X_h^t = \frac{K_h^t}{k_h^t} \qquad t \neq 1 \tag{4_h}$$

$$S^t = \sum_j S_j^t \tag{9}$$

$$I^t = \frac{\sum_h a_h^t X_h^t + S^t - \bar{C}^t - \sum_j \frac{s_j^{t+1} q_j^t}{k_j^{t+1}} K_j^t}{1 + \sum_j \frac{s_j^{t+1} d_j^t}{k_j^{t+1}} - \sum_i a_i^t \sum_j b_{ij}^t d_j^t} \tag{3*}$$

$$I_j^t = d_j^t I^t \tag{7a}$$

Menj a 2. lépésre.

2. lépés

$$X_i^t = \sum_j b_{ij}^t I_j^t \tag{8}$$

$$Y^t = \sum_j a_j^t X_j^t . \tag{1}$$

Menj a 3. lépésre, vagy ha 3-ról tértél vissza, a 4. lépésre.

3. lépés

$$K_j^{t+1} = q_j^t K_j^t + I_j^t \tag{2}$$

$$S_j^{t+1} = \frac{s_j^{t+1}}{k_j^{t+1}} K_j^{t+1} \tag{5}$$

Ha $t = T$, állj. Egyébként tegyél t helyett $t + 1$-et és menj az 1. lépésre. A 2. lépés befejeztével menj a 4. lépésre.

4. lépés

$$U_i^{t+1} = K_i^{t+1} - k_i^{t+1} X_i^{t+1} \tag{4_i}$$

$$\bar{U}_i^{t+1} = k_i^{t+1} X_i^{t+1} - \alpha K_i^{t+1} \tag{11}$$

(A) Ha $U_i^{t+1} \geq 0$ és $\overline{U}_i^{t+1} \geq 0$ minden i-re, akkor rögzítsd a t évre kiszámított változó-értékeket és folytasd a $(t+1)$-edik év számítását a 3. lépéssel.
(B) Ellenkező esetben térj át az 5. lépésre.

5. lépés

$$(*) \qquad I_i^{t*} = \max\left\{I_i^t + \frac{1}{2}(\overline{U}_i^{t+1} - U_i^{t+1}),\ 0\right\}$$

$$(3^{**}) \qquad J^t = \frac{\sum\limits_h a_h^t X_h^t + S^t - \overline{C}^t - \sum\limits_j \frac{s_j^{t+1} q_j^t}{k_j^{t+1}} K_j^t - \sum\limits_i \left(1 + \frac{s_i^{t+1}}{k_i^{t+1}} - \sum\limits_{\nu=1}^m a_\nu b_{\nu i}\right) I_i^{t*}}{1 + \sum\limits_h \frac{s_h^{t+1} \widetilde{d}_h^t}{k_h^{t+1}} - \sum\limits_i a_i^t \sum\limits_h b_{ih}^t \widetilde{d}^t}$$

$$(7\text{b}) \qquad I_h^{t*} = \widetilde{d}_h^t J^t$$

$$(10) \qquad I^{t*} = \sum_i I_i^{t*} + J^t.$$

Menj a 2. lépésre I_j^{t*}-ot téve I_j^t helyébe.
A számítás blokkdiagrammja a következő: (lásd 1. ábra)

5.4. *Az eljárás heurisztikus vizsgálata*

Ahhoz, hogy az eljárás helyességét teljesen bebizonyítsuk, a következőket kellene bizonyítanunk:

I. Az eljárás minden lépése végrehajtható.
II. Mind az

1 — 2 — 3 — 1 — 2 — (4) — 3,

Mind az

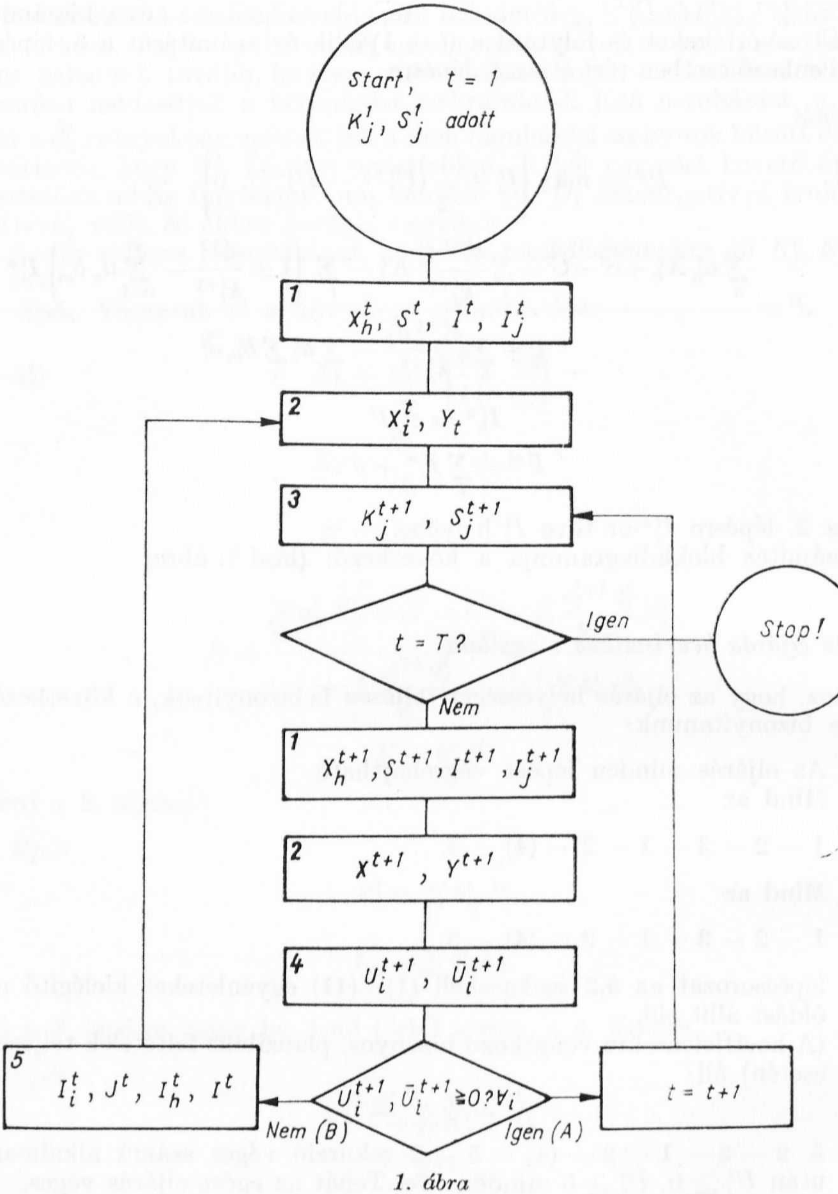
1 — 2 — 3 — 1 — 2 — (4) — 5

lépéssorozat az 5.2 szakaszbeli (1)—(11) egyenleteket kielégítő megoldást állít elő.
III. (A koefficiensekre vonatkozó bizonyos, plauzibilis feltételek teljesülése esetén) áll:

$$I_i^t \geq 0, \ J^t \geq 0.$$

IV. A 2 — 3 — 1 — 2 — (4) — 5 — 2 rekurzió véges számú alkalmazása után $U_i^t \geq 0$, $\overline{U}_i^t \geq 0$ minden i-re. Tehát az egész eljárás véges.
V. Az egy lépéses visszacsatolás alkalmazása, tehát az, hogy az 5—2 lépés-sorozat után csak az U_i^{t+1}, $\overline{U}_i^{t+1}$ nem negativitását ellenőrizzük, de az ugyancsak megváltozott U_i^t, $\overline{U}_i^t$-ket már nem, csak kis mértékben torzíthatja el az egyszer már létrehozott egyensúlyt.

Plauzibilisan belátható, hogy adott koefficiens együttes és tetszőleges fogyasztási pálya mellett a fenti I—V. állítások nem lehetnek mind igazak, hiszen ez azt jelentené, hogy bármilyen beruházási politika mellett tetszőlegesen sokat fogyaszthatunk.



1. ábra

Vizsgáljuk meg ezért, hogy az I–V. állítások közül melyek azok, amelyeknek érvényessége legalább heurisztikusan belátható és melyek azok, amelyeknek nem teljesülése az eljárás kudarcára utal. (Az eljárás kudarca alatt itt azt értjük, hogy nem találunk az (1)–(12) feltételeket kielégítő pályát, és nem tudjuk eldönteni, hogy azért nem találtunk-e, mert nincs, azaz a vizsgált gazdaságpolitika inkonzisztens, vagy pedig azért, mert ez az eljárás nem képes az egyébként létező megengedett pályát felderíteni.)

I. Az eljárás csak akkor akad el, ha a (3*) vagy a (3**) formulák alkalmazásakor a jobboldali tört nevezője 0-vá válik. Ez az értelmezhető tartományból véletlenszerűen választott koefficiensek esetén 0 valószínűségű esemény, amely éppen ezért gyakorlatilag nem fordul elő.

II. Ez az állítás igaz és ugyanolyan módon bizonyítható (behelyettesítésekkel és elemi átalakításokkal) mint ahogyan a 3.3. szakaszban bizonyítottuk az ottani II. állítást. A hosszadalmas helyettesítgetést itt nem végezzük el.

III. Ez az állítás általában nem igaz. Előfordulhat, hogy a (3*) formula alkalmazásakor $I^t < 0$ vagy a (3**) alkalmazásakor $J^t < 0$ értéket kapunk. Ezt arra vonatkozó jelzésnek tekinthetjük, hogy *esetleg* nincs is az (1)—(12) feltételeket kielégítő pálya. A kérdés eldöntésére más módszert (lásd az 5. fejezetet) kell alkalmaznunk.

IV. Heurisztikusan belátható, hogy a rekurzív lépést valószínűleg csak egyszer kell végrehajtani. Ugyanis, ha első közelítésben eltekintünk attól, hogy a rekurzió következtében a beruházási szektorok termelése X_i^t megváltozik (X_h^t a lépések során változatlan marad), akkor ha $I_i^{t*} \neq 0$:

$$K_i^{t+1*} = q_i^t K_i^t + I_i^{t*} = q_i^t K_i^t + I_i^t + \frac{1}{2}[\overline{U}_i^{t+1} - U_i^{t+1}] =$$

$$= K_i^{t+1} + \frac{1}{2}[\overline{U}_i^{t+1} - U_i^{t+1}] = k_i^{t+1} X_i^{t+1} + \frac{1-\alpha}{2} K_i^{t+1}.$$

Tehát

$$U_i^{t+1,*} \approx K_i^{t+1,*} - k_i^{t+1} X_i^{t+1} = \frac{1-\alpha}{2} K_i^{t+1} > 0$$

és

$$\overline{U}_i^{t+1,*} \approx k_i^{t+1} X_i^{t+1} - \alpha K_i^{t+1,*} = (1-\alpha)\left[k_i^{t+1} X_i^{t+1} - \frac{\alpha}{2} K_i^{t+1}\right].$$

Feltevéseink mellett $\overline{U}_i^{t+1,*}$ csak abban az esetben maradna negatív, ha a rekurzió végrehajtása előtt a kapacitás kihasználtsága 50%-nál is alacsonyabb lett volna. Egyrészt ez olyan eset, amelynek bekövetkeztétől gyakorlatilag nem kell félnünk, másrészt ha be is következik, a rekurzió ismételt alkalmazása rendbehozza. Ugyanis, ha

$$k_i^{t+1} X_i^{t+1} - \frac{\alpha}{2} K_i^{t+1} < 0$$

akkor

$$\overline{U}_i^{t+1} - \overline{U}_i^{t+1,*} = \alpha\left(k_i^{t+1} X_i^{t+1} - \frac{\alpha}{2} K_i^{t+1} - \frac{1}{2} K_i^{t+1}\right) < 0$$

azaz $\overline{U}_i^{t+1} < \overline{U}_i^{t+1,*}$, $\overline{U}_i^{t+1}$ a rekurzió során abszolút értékben csökken.

Ha $I_i^{t*} = 0$ és a rekurzió többszörös ismétlés után sem vezet eredményre, ez annak a jele, hogy valamelyik beruházási szektorral szemben az igények egyik évről a másikra olyan hirtelen csökkentek (gyakorlatilag aligha előforduló eset), hogy egy év alatt a hatalmas kapacitásfelesleget nem lehet megszüntetni. Ugyan ezt az esetet algoritmikusan is meg lehetne oldani (mindaddig 0 szinten tartani a szektor beruházását, amíg a selejtezés révén, vagy az igények növekedése révén a kapacitásfelesleg kellően nem csökken), célszerűbbnek látszik erre az esetre egy stop! utasítást beállítani és kézi úton beavatkozni, éppen az esemény bekövetkeztének kicsinyke valószínűsége miatt.

V. Ez az állítás, a maga pontatlan fogalmazásában, heurisztikusan igaznak tűnik. Hogy mit takar a valóságban a „kis méretű” torzítás, az csak gyakorlatilag végrehajtott számítások során lesz vizsgálható. (Ezzek a modellel még nem számoltunk.)

Összefoglalva: az NV modell és megoldási módszere alkalmasnak látszik arra, hogy ha a feltételezett beruházás allokációs politika és a fogyasztási pálya konzisztens, akkor sok esetben megtaláljunk egy olyan pályát, amelyen csak csekély (vagy szerencsés esetben semilyen) beruházási kapacitáshiány és csak a megengedett mértékű kapacitásfelesleg lép fel egyes években.

6. A lineáris programozási (LP) modell

6.1. *Bevezetés és specifikáció*

Az SQ és NV modellekkel kísérletet tettünk arra, hogy viszonylag primitív módszerekkel évről-évre előrehaladva, vagy csak egy-egy évet visszacsatolva olyan pályákat állítsunk elő, amelyeknél az egyensúlyhiány bizonyos területekre koncentrálódik és lehetőség szerint legyen minél kisebb. Egyik esetben sem tudtuk garantálni, hogy egyensúlyi pályát találunk legalább akkor, ha ilyen az adott adategyüttes mellett létezik. Nyilvánvaló, hogy ilyent csak úgy lehet konstruálni, ha az egész időhorizontot egyidejűleg tekintjük át, tehát ha egy nagy, minden évet magában foglaló egyenlet- illetőleg egyenlőtlenségrendszerrel dolgozunk, vagy pedig ha a visszacsatolást terjesztjük ki az egész időszakra. (Talán valaki talál majd más elméleti lehetőséget is, mi nem találtunk.) Az utóbbi megoldást mint túlságosan munkaigényest és lassút elvetettük, marad tehát a rendszer szimultán megoldásának lehetősége. Erre kézenfekvő és hatékony módszer a lineáris programozás technikája. Ezért — az előbbi modellek kiegészítéseképpen — dolgozunk az általános modellnek egy lineáris programozási változatával is. (LP modell.)

Láthatjuk majd, hogy az LP modell segítségével mindazokat a nehézségeket, csak üggyel-bajjal megoldott vagy éppen megoldatlan problémákat, amelyek az SQ és NV modellek alkalmazásakor felvetődtek, egy csapásra megoldjuk. Ebbe a modellbe ezenkívül könnyűszerrel beépíthetők a munkaerőkorlátok, sőt ha akarnók, kiegészíthetnénk ezt a modellt a folyó ráfordítások input-output kapcsolataival, külkereskedelemmel, a fogyasztás szerkezetére vonatkozó feltételekkel stb. Sőt egy optimálási modell más szempontból is „többet tud”, mint az előbbi modellek: ha kitűnik, hogy egy bizonyos beruházási allokációs politika egyáltalában konzisztens, ki lehet az egyensúlyi pályák közül választani valamilyen szempontból optimálisakat is.

Felvetődik tehát a kérdés, ha ilyen eszköz áll rendelkezésünkre, miért bajlódunk egyáltalán olyan modellekkel, amelyek egyensúlytalan pályákat produkálnak azokban az esetekben is, amikor lehetne találni egyensúlyi pályákat: olyan módszerekkel, amelyeket nem tudunk matematikai értelemben korrektül elemezni. Miért nem végezzük e terv-szondázást az LP modellel, vagy ennek valamilyen még részletezettebb, több összefüggést figyelembe vevő változatával?

Önmagában az az érv, hogy egy SQ és egy LP számítás gépi időigénye között kb. egy nagyságrendi különbség van, nem tűnik elég meggyőzőnek, ha figyelembe vesszük, hogy a gépi idő az összes időráfordításoknak amúgy is csak egy töredéke és egy közepes nagyságú LP feladatnak akár sok változatban való megoldása sem kíván ma már olyan sok időt, hogy ezt tiltó akadályként foghatnók fel.

Mi indokolta tehát, — a fenti érven kívül — azt, hogy a terv-szondázást ne alapozzuk az LP modellre, hanem ezt csak másodlagos segédeszköznek tekintsük?

— A terv-szondázás során nem egy vagy néhány, hanem nagyon sok pályát akarunk kidolgozni, éspedig olyanokat, amelyek nagyon széles sávban fogják át a hosszútávú tervezés gazdaságpolitikai lehetőségeit, egymástól jelentősen eltérő gazdasági struktúrákat állítanak elő. A számításoknak ez a megsokszorozódása egyrészt növeli a gépidőben mutatkozó különbség jelentőségét, másrészt, és ez még fontosabb, hasonló arányban növekszik az előkészítő és befejező (íróasztali) munkák időigénye. Ugyanis az SQ és NV modellek esetén az adatbevitel és kiírás módját magunk határozzuk meg és így kihasználhatjuk e modellek sajátos (egyszerű) szerkezetét, míg könyvtári LP programnál alkalmazkodni kell annak adatbeviteli és kiírási rendszeréhez.

— Az LP modell gazdagítása, bővítése növeli az adatigényt és egyre nehezebbé válik egymástól jelentősen eltérő és mégis ésszerűen összefüggő adategyüttesek nagy számban való összeállítása.

— Az LP technika, mint ismeretes, csúcsponti optimumot állít elő, tehát valamilyen szempontból szélsőséges és az évek egymásutánját tekintve szeszélyes lefutású pályákat. A pályáknak ez a tulajdonsága nem a feladat természetéből, hanem az alkalmazott módszerből fakad és így gazdaságilag nem interpretálható értelmesen.

Ezeknek az érveknek az együttese inspirálja azt, hogy az LP modellszerepét a terv-szondázás egész munkájában a következőképp korlátozzuk:

1. LP modellt használunk arra, hogy az SQ és NV modellek által kiszámított nem egyensúlyi pályák közül néhány legfigyelemreméltóbbnál megvizsgáljuk: vannak-e egyensúlyban levő változatai. Mit képes az ezeknek megfelelő beruházási allokációs politika maximálisan nyújtani, különböző kritériumok (célfüggvények) szerint.

2. Nem tulajdonítunk különösebb jelentőséget az LP modellel nyert pályák optimalitásának; az alapvetően eldöntendő kérdés: van-e egyensúlyi pálya? Az optimális pályákat csak „ha már úgyis programozunk, miért ne nézzünk meg néhány értelmesnek tűnő célfüggvényt" jelszóval vizsgáljuk.

Ezek miatt a meggondolások miatt megtartjuk az LP modellben is az SQ és NV modellek egyszerű szerkezetét, nem használjuk ki azokat a lehetőségeket, amelyeket az LP modell a gazdasági tartalom bővítésére nyújt. Fontosabb az, hogy megőrizzük az LP modellel nyert eredményeknek az SQ és NV eredményekkel való direkt összehasonlíthatóságát.

Így az LP modell az általános modellhez képest a következő specifikációkat alkalmazza:

(a) $Q_i = 0$

tehát a beruházási szektorokban nem engedünk meg sem termékfelesleget, sem hiányt.

(b) A beruházások allokációjára a (7b) formulát alkalmazzuk. (Így továbbra is szerepelni fog az NV modellnél bevezetett $J^t = \sum_h I_h^t$ változó.)

(c) A fogyasztási függvényt a következő differencia egyenlet megoldásaként specifikáljuk:

$$C^{t+1} - C^t = \gamma(C^t - C^{t-1}),$$

ahol C^0 adott és $\gamma > 1$, rögzített paraméter, a fogyasztási pálya aszimptotikus növekedési rátája.

Bevezetve a

$$Z = C^1 - C^0$$

egyenlettel értelmezett változót és a

$$\Theta^t = \frac{(\gamma)^t - 1}{\gamma - 1} \quad [(\gamma)^t \text{ hatványozást jelöl}]$$

konstansokat, a fenti differenciaegyenlet megoldását a következő alakban kapjuk meg:

$$C^t = C^0 + \Theta^t Z.$$

Behelyettesítéssel könnyen belátható, hogy ez valóban megoldása a fenti differenciaegyenletnek, ugyanis

$$C^{t+1} - C^t = (\Theta^{t+1} - \Theta^t) Z = \frac{(\gamma)^{t+1} - (\gamma)^t}{\gamma - 1} = (\gamma)^t Z =$$

$$= \gamma(\gamma)^{t-1} Z = \gamma(C^t - C^{t-1}).$$

Továbbá belátjuk, hogy γ valóban az aszimptotikus növekedési ráta. Ugyanis

$$C^{t+1} - \gamma C^t + (\gamma - 1) C^0 = (\Theta^{t+1} - \gamma \Theta^t) Z =$$

$$= \frac{(\gamma)^{t+1} - 1 - \gamma[(\gamma)^t - 1]}{\gamma - 1} Z = Z$$

$$\frac{C^{t+1}}{C^t} = \gamma + \frac{Z - (\gamma - 1) C^0}{C^t} \to \gamma$$

ha $t \to \infty$, mivel $C^t \to \infty$, ha $\gamma > 1$, $Z > 0$.
(Ha $Z = 0$, $C^t = C^0$ minden t-re és így a növekedési ráta 1.)

Tekintsük most Z-t változónak és γ-t rögzítsük, ekkor $C^t = C^0 + \Theta^t Z$ egy görbesereget állít elő, melynek paramétere Z. Ha

$$Z = Z_{\text{exp}} = (\gamma - 1) C^0$$

akkor $C^t = C^0(\gamma)^t$. Tehát egy exponenciális görbét kapunk. A görbeseregehez tartozó többi görbék az exponenciális görbét csak a $t = 0$ helyet metszik, mivel a

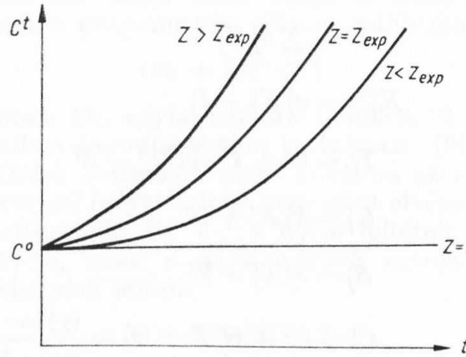
$$C^0 + \Theta^t Z = C^0(\gamma)^t$$

azaz a

$$[(\gamma)^t - 1][Z - (\gamma - 1)C^0] = 0$$

egyenlet egyetlen megoldása $t = 0$, ha $Z \neq Z_{\text{exp}}$. Tehát $Z < Z_{\text{exp}}$ esetben a görbe teljes egészében az exponenciális alatt fekszik és a növekedési ráta növekvően tart γ-hoz, $Z > Z_{\text{exp}}$ esetben fordítva.

A görbesereget a következő ábra mutatja:



2. ábra

A fogyasztási függvénynek fent leírt, lineáris modellekben előnyösen alkalmazható alakját Allan S. Mannetől vettük át. (Lásd: [4, 5].)

(d) A véges időhorizontú optimálási modelleknél, így a miénknél is számításba kell vennünk a *horizont-effektust*. Ez abban áll, hogy az utolsó periódusban beruházott javaknak az időhorizonton belül 0 a hozamuk, a modell sajátos szempontjából nézve értelmetlenek. Ennek a hatásnak a kiküszöbölésére, vagy legalábbis csökkentésére rá kell kényszeríteni a modellt arra, hogy a tervezési periódus végére is eszközöljön beruházásokat éspedig kb. folytatódjék az állóalapoknak az előző periódusokban megfigyelt növekedése. Ugyanez a megfontolás áll a forgóeszközökre is.

Tekintve hogy a fogyasztás növekedését az utolsó utáni, $T + 1$-ik évre célszerű a (c) alatt bevezetett

$$C^{T+1} - C^T = \gamma(C^T - C^{T-1})$$

formulának megfeleltetni, ésszerűen adódnék, hogy az álló- és forgóeszközök záróállományát is

$$K_j^{T+1} - K_j^T = \gamma(K_j^T - K_j^{T-1})$$
$$S_j^{T+1} - S_j^T = \gamma(S_j^T - S_j^{T-1})$$

formulákkal írjuk elő. Ezeken a formulákon két módosítást hajtunk végre. Először is nem egyenlőség, hanem $\geq$ egyenlőtlenség alakban írjuk elő őket, hiszen a záróállományoknál csak az őket csökkentő horizonthatást kívánjuk ellensúlyozni. Másrészt a jobboldalon nem a tényleges, hanem csak a kihasznált kapacitások utolsó előtti évi növekményét vesszük számításba, hiszen a modellt nem kívánjuk a kihasználatlan kapacitások növelésére kényszeríteni. Ennek megfelelően zárófeltételeink a következő alakot öltik:

$$K_j^{T+1} - K_j^T \geq \gamma(k_j^T X_j^T - k_j^{T-1} X_j^{T-1})$$
$$S_j^{T+1} - S_j^T \geq \gamma(s_j^T X_j^T - s_j^{T-1} X_j^{T-1})$$

(e) Specifikálnunk kell az LP feladat célfüggvényét. Ezzel a kérdéssel a 6.3. szakaszban foglalkozunk.

(f) Az LP modellben a változók nemnegativitását explicite elő kell írni.

6.2. *Az LP modell feltételi rendszere*

$$(1)\qquad Y^t = \sum_j a_j^t X_j^t$$

$$(2)\qquad K_j^{t+1} = q_j^t K_j^t + I_j^t$$

$$(3)\qquad Y^t = C^t + I^t + S^{t+1} - S^t$$

$$(4)\qquad K_j^t = k_j^t X_j^t + U_j^t$$

$$(5)\qquad S_j^t = s_j^t X_j^t + V_j^t$$

$$(6)\qquad C^t = C^0 + \Theta^t Z, \quad \Theta^t = \frac{(\gamma)^t - 1}{\gamma - 1}$$

$$(7)\qquad I_h^t = \widetilde{d}_h^t J^t$$

$$(8)\qquad X_i^t = \sum_j b_{ij} I_j^t$$

$$(9)\qquad S^t = \sum_j S_j^t$$

$$(10)\qquad I^t = \sum_i I_i^t + J^t.$$

Zárófeltételek:

$$(4^T)\qquad K_j^{T+1} - K_j^T \geq \gamma(k_j^T X_j^T - k_j^{T-1} X_j^{T-1})$$

$$(5^T)\qquad S_j^{T+1} - S_j^T \geq \gamma(s_j^T X_j^T - s_j^{T-1} X_j^{T-1})$$

Nem negativitási feltételek

$$(11)\qquad Y^t,\ I^t,\ J^t,\ C^t,\ S^t,\ X_j^t,\ K_j^t,\ S_j^t,\ I_j^t,\ U_j^t,\ V_j^t,\ Z \geq 0$$

A modell tehát, mint könnyen összeszámolható,

$(6n + 5)T + 1$	változót
$(4n + 5)T$	egyenlőség alakú és
$2n$	egyenlőtlenség alakú

feltételt tartalmaz, a nem-negativitási feltételeket leszámítva.

Annak érdekében, hogy a változók és feltételek számát csökkentsük az (1), (4), (5), (6), (7), (8), (9) és (10) feltételek felhasználásával az

$$Y^t,\ K^t,\ S_j^t,\ C^t,\ I_h^t,\ X_i^t,\ S^t \text{ és } I^t$$

változókat ki lehet a rendszerből küszöbölni, sőt a

$$V^t = \sum_j V_j^t$$

változó bevezetésével a V_j^t változókat is. Mint az idézett és az utóbbi összefüggésekből kitűnik, a megmaradt

$$J^t,\ X_h^t,\ I_i^t,\ U_j^t,\ V^t,\ Z$$

változók nem-negativitása maga után vonja a kihagyott változók nem-negativitását is. Ezzel a programozási feladat változóinak száma

$$(2n+2)T+1$$

-re, tehát az eredetinek kb. egyharmadára csökken. A korlátozó feltételek közül csak a dinamikus összefüggéseket tartalmazó (2) és (3) egyenletek, valamint a zárófeltételek maradnak meg. Továbbá az első évben K_j^1 és S_j^1 adottak lévén a (4) szerinti helyettesítést nem lehet elvégezni, (5) szerint pedig csak (9)-be helyettesíthetünk. Ez $n+1$ nyitó feltételt ad. Az (5^T) szerint helyettesíthetünk (9)-be, ezzel a zárófeltételek száma $n+1$-re csökken. Így a megmaradó feltételek száma

$$(n+1)\cdot(T+2)\,.$$

A feltételek száma ezzel kb. 1/4-ére csökkent, ami a számítási időt hozzávetőleg 60-ad részére csökkenti. (Az időmegtakarítással szemben többletet igényel az új koefficiensek kiszámítása az optimálás megkezdése előtt és a kiküszöbölt változók értékének kiszámítása az optimálás befejezte után.)

Megjegyezzük még, hogy az LP modellel végzett kísérleti számítás során a (8) szerinti helyettesítést nem alkalmaztuk.

A módosított feltételi rendszer elvileg semmi újat nem ad és a sok helyettesítés miatt meglehetősen áttekinthetetlen. Ezért leírását mellőzzük.

6.3. *A célfüggvény*

Mint már elöljáróban említettük, nem tulajdonítunk nagy jelentőséget az LP modellel nyert megoldás „optimális" voltának és így természetesen az optimalitási kritériumnak, a célfüggvénynek sem.

Az alábbiakban négy célfüggvényt javasolunk. (A kísérleti számításban mind a néggyel számolunk külön-külön.)

(A) A fogyasztási pálya maximálása:

$$Z \to \max!$$

Ezzel a célfüggvénnyel a Z-től függő görbeseregből a legmagasabban futót, illetőleg az ehhez a pályához tartozó termelési szinteket keressük ki.

(B) A tőkefeleslegek minimálása:

$$\sum_t \sum_j U_j^t + \sum_t V^t \to \min!$$

A szektoronként és évenként jelentkező kihasználatlan álló és forgóeszközök állományának egyszerű összegét minimáljuk. Ezzel az LP modellt az SQ modellel nyert pályához hasonlóra kényszerítjük (hiszen ott $U_j^t = 0$, $V^t = 0$ volt minden $t \neq 1$-re), azzal az eltéréssel, hogy itt a beruházási piac egyensúlyát is előírtuk.

(C) A záróévi GDP maximálása:

$$Y^T \to \max!$$

Modellünkben a záróévi GDP maximálása további korlátozás hiján a $Z = 0$, $C^t = C^0$ minimális fogyasztási pályára kényszerítené a modellt. Így ahhoz, hogy értelmes eredményt kapjunk. Z-t egy pozitív számmal alulról korlátoznunk kell. Ennek érdekében pótlólagos feltételként előírjuk, hogy az első évben a fogyasztás relatív növekménye legalább érje el az aszimptotikus növekedési rátának (γ) megfelelő értéknek, mondjuk $\beta = 0{,}8$-szorosát:

$$Z \geq \beta(\gamma - 1)C^0.$$

(D) A záróévi beruházott nemzeti vagyon maximálása:

$$\sum_j K_j^{T+1} \rightarrow \max!.$$

Azt, hogy egy hosszútávú terv során a gazdaság milyen szintre fejlődött, nemcsak a nemzeti jövedelem vagy a fogyasztás színvonala méri, hanem a felhalmozódott nemzeti vagyon is. Ugyanazon okból mint (C) alatt, itt is alulról korlátoznunk kell Z-t.

*

Mint helyenként már utaltunk rá, a modell megszerkesztésére és matematikai kezelésére irányuló kutatómunkát még nem tekintjük befejezettnek. Az ebben a cikkben közzétett modelleket és algoritmusokat így még csak kísérletezésre és nem a tervezési munkába való bevezetésre javasoltuk. De reméljük, hogy e modellek és módszerek a kísérletek befejezésével párhuzamosan és azt követően továbbfejleszthetők úgy, hogy a hosszútávú tervezésben alkalmazott matematikai modellek egyik fajaként hasznos szolgálatot tegyenek.

(Beérkezett: 1972. október 16.)

IRODALOM

1. Dániel Zs.—Jónás A.—Kornai J.—Martos B.: Terv-szondázás. Közgazdasági Szemle. 1972. 1031—1050. o.
2. Фелдман, Г. А.: К теории темпов народного дохода. Пановое хозяйство 1928 № 11 146—170 и № 12 151—178.
3. Mahalanobis, P. C.: Some observations on the process of growth of national income. Sankhyja. 12 (1953) 307—321. o.
4. Manne, A. S.: Sufficient conditions for optimality in an infinite horizont development plan. Econometrica 38 (1970) 18—38. o.
5. Manne, A. S.: DINAMICO, a dynamic multi-sector, multiskill model. In: Goreux, L. M.—Manne, A. S. (szerk.): Multi-level planning: case studies in Mexico. Amsterdam, North-Holland (sajtó alatt).

PLAN SOUNDING: THE STRUCTURE OF THE MODELS

Within the framework of the research called plan sounding we have tried to approach some up-to-date problems of the long-term (15-year) planning of the Hungarian national economy, first of all from the viewpoint of the proportion of consumption and accumulation, the allocation of the investments among branches (with special regard to the development of the infrastructure) and the efficiency of fixed assets. We use models of simple structure with a low demand for data in order to enable ourselves to calculate a large number of signifactly different growth paths and to observe, to sound into the possibilities of economic development in a sufficiently wide range.

Three variants of a general model are introduced in the article, they are the results of compromises with different proportions between two points of view: restriction of disequilibrium along the paths, and economy in the solution time. This article contains the mathematical structure and solution methods of the models only, the purposes and the train of thought of the whole research, the results of the first calculations and their economic analysis are published in another paper [1] by the participants of the research team.

ПЛАНОВОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ: СТРУКТУРА МОДЕЛЕЙ

В рамках исследования имени «плановое зондирование» мы желаем приблизиться к некоторым актуальным проблемам долгосрочного (15-летнего) планирования венгерского народного хозяйства, в первую очередь с точки зрения доли потребления и накопления, аллокации капиталовложений среди отраслей (принимая во внимание развитие инфраструктуры) и эффективности основных фондов. В исследовании авторы пользуются моделями простой структуры и мелкого требования данных для того, чтобы исчислять очень много, существенно различающихся друг от друга путей роста, за возможности нашего экономического развития следить в довольно широкой полосе, и могли зондировать их.

В статье представляются три варианта общей модели, они являются результатами компромиссов разной доли между двумя точками зрения: ограничение возмущения равновесия путей, и экономии требованием времени решения. Эта статья распространяется только на математическую структуру и методы решения, цель, ход мышления целого исследования, результаты первых исчислений и их экономический анализ представили участники исследования в другой статье [1].