

A KULLBACK-LEIBLER RELATÍV ENTRÓPIA  
FÜGGVÉNY ALKALMAZÁSA PÁROS  
ÖSSZEHASONLÍTÁS MÁTRIX EGY  
PRIORITÁSVÉKTORA MEGHATÁROZÁSÁRA<sup>1</sup>

KOMÁROMI ÉVA  
*Budapesti Corvinus Egyetem*

A dolgozatban a döntésméletben fontos szerepet játszó páros összehasonlítás mátrix prioritásvektorának meghatározására új megközelítést alkalmazunk. Az  $A$  páros összehasonlítás mátrix és a prioritásvektor által definiált  $B$  konzisztens mátrix közötti eltérést a Kullback-Leibler relatív entrópia-függvény segítségével mérjük. Ezen eltérés minimalizálása teljesen kitöltött mátrix esetében konvex programozási feladathoz vezet, nem teljesen kitöltött mátrix esetében pedig egy fixpont problémához. Az eltérésfüggvényt minimalizáló prioritásvektor egyben azzal a tulajdonsággal is rendelkezik, hogy az  $A$  mátrix elemeinek összege és a  $B$  mátrix elemeinek összege közötti különbség éppen az eltérésfüggvény minimumának az  $n$ -szerese, ahol  $n$  a feladat mérete. Így az eltérésfüggvény minimumának értéke két szempontból is lehet alkalmas az  $A$  mátrix inkonzisztenciájának a mérésére.

*Kulcsszavak:* AHP, páros összehasonlítás mátrix, többszemponú döntések, Kullback-Leibler relatív entrópia, eltérésfüggvények, konvex program.

## 1 Bevezetés

Az AHP (Analytic Hierarchy Process) a többszemponú döntési problémák kezelésére alkalmas eljárás. Kulcseleme a páronkénti összehasonlítások – másként: páros összehasonlítások – használata. A páros összehasonlítás a döntéshozó véleményének numerikus reprezentációja az egyes döntési alternatívák fontosságáról minden egyes másik döntési alternatívához viszonyítva egy adott kritérium szempontjából:  $a_{ij}$  azt mutatja meg, hányszor fontosabb az  $i$ -edik alternatíva a  $j$ -ediknél. Nyilvánvaló, hogy

$$a_{ij} > 0, \quad a_{ii} = 1, \quad a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}; \quad i, j = 1, \dots, n,$$

ahol  $n$  a döntési alternatívák száma. Az AHP alkalmazása során az egyes alternatívákhoz prioritásokat határozunk meg – ezeket az irodalomban gyakran preferencia értékeknek, vagy súlyoknak is nevezik. Ha a döntéshozó a fontosságok megítélésében konzisztens lenne, vagyis ha  $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$  lenne minden  $i, j, k$  indexhármassal, akkor az  $n$  alternatívához tartozó prioritásokat

<sup>1</sup>Beérkezett: 2013. március 13. E-mail: komaromi@uni-corvinus.hu.

(preferencia értékeket, súlyokat) könnyen megkaphatnánk. De a döntéshozók megítélése rendszerint csökkenően konzisztens az alternatívák számának növekedésével. A kérdés ez: hogyan rendeljük az egyes alternatívákhoz prioritásokat – az  $n$  alternatívához prioritásvektort – ha a megadott  $A = \{a_{ij}\} \in R^{n \times n}$  páros összehasonlítás mátrix nem konzisztens? Az alapelképzelés az, hogy olyan  $p = (p_1, \dots, p_n)$  vektor alkalmas a döntéshozó prioritásainak a kifejezésére, amely esetében az  $A$  mátrix a  $B = \{p_i/p_j\}$  konzisztens mátrixtól lehetőleg kevésbé tér el.

Az AHP-vel jelzett kutatási terület és módszertan Thomas L. Saaty nevéhez fűződik [1980], aki számos cikket, könyvet szentelt a sajátérték módszer (EM) kifejlesztésére és vizsgálatára – közülük egyet emelünk itt ki, amelyben a szerző a módszer legfontosabb tulajdonságait foglalja össze [2003]. E módszer lényege az, hogy a prioritásvektort így kapjuk:  $p = \arg\{Ap = \lambda_{\max}p\}$ , ahol  $\lambda_{\max}$  az  $A$  mátrix legnagyobb sajátértéke. Mivel  $\lambda_{\max}$  értéke  $n$ , ha a mátrix konzisztens, és nagyobb  $n$ -nél egyébként, ezért az inkonzisztencia mérőszámául Saaty a  $(\lambda_{\max} - n)/(n - 1)$  értéket, illetve ennek egy tapasztalati konstanssal vett szorzatát választotta. A módszer tanulmányozására iskola alakult, amelynek számos jeles képviselője közül itt hivatkozunk P. T. Harkerre és két dolgozatára [1987 és 1987a]. A másodikban Harker a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix esetével foglalkozik. Megjegyezzük, hogy a hiányzó elemek kitöltése érdekében a célprogramozás illetve a fuzzy preferencia relációk alkalmazására is vannak törekvések, ld. M. Fedrizzi és S. Giove dolgozatát [2007].

Hiányos mátrixok meglétekor több féle kérdés vetődik fel. Az egyik az, hogy szükséges-e a döntéshozót tovább kérdezgetni nézetéről az alternatívák fontosságát illetően – pl. ha a döntéshozó csak a mátrix első sorát töltötte ki, akkor ezzel megadta a prioritásait, amelyekkel a hiányzó elemeket már úgy tudjuk kitölteni, hogy konzisztens mátrixot kapjunk. Ez azonban nincs összhangban azzal a tapasztalattal, hogy a döntéshozók döntései általában nem konzisztensek, ezért néhány további elemre is szükség van, hogy mélyebb betekintést kapjunk a döntéshozónak az alternatívák fontosságát illető véleményébe. Ha a mátrix lényegesen több elemét tölti ki a döntéshozó, akkor szembesül a véleményeiből fakadó inkonzisztenciával, így hajlik korábbi véleményei felülvizsgálatára. Ezek azonban olyan „puha” kérdések, amelyekkel e dolgozat nem foglalkozik.

A módszerek másik csoportját olyan „távolságminimalizálási” eljárások alkotják, amelyekben a  $p = (p_1, \dots, p_n)$  prioritásvektorra kikötjük, hogy az  $A$  mátrix a  $B = \{p_i/p_j\}$  konzisztens mátrixhoz a „legközelebbi” legyen. A „legközelebbi” szó jelentésétől függ az alkalmazott módszer, különböző módszerek rendszerint különböző  $p$  vektorokhoz vezetnek. E módszerek közül a legismertebbek:

- $p \in \arg \min_{\sum_i p_i=1, p_i>0} \sum_i \sum_j (a_{ij} - p_i/p_j)^2$  – legkisebb négyzetek módszere (LSM);

- $p \in \arg \min_{\sum_i p_i=1, p_i>0} \sum_i \sum_j (a_{ij} p_j - p_i)^2$  – súlyozott legkisebb négyzetek módszere;
- $p \in \arg \min_{\sum_i p_i=1, p_i>0} \sum_i \sum_j (a_{ij} - p_i/p_j)^2 \frac{p_j}{p_i}$  – chi-négyzet módszer;
- $p \in \arg \min_{\sum_i p_i=1, p_i>0} \sum_i \sum_j (\ln a_{ij} - \ln p_i + \ln p_j)^2$  – logaritmikus legkisebb négyzetek módszere (LLSM).

S. I. Gass és T. Rapcsák [2004] a fenti két irányzatot összekapcsolta, J. Krovák [1987] numerikusan összehasonlította az EM, az LSM és LLSM módszereket. E. U. Choo és W. C. Wedley e módszerekről szóló összefoglaló cikkére [2004], illetve A. Ishizaka és A. Labibnak az AHP új fejleményeit bemutató cikkére [2011] hívjuk fel itt a figyelmet, az utóbbit ajánlva azon érdeklődő olvasónak, aki az AHP hatalmas irodalmáról áttekintést akar szerezni. Megemlíjtjük, hogy működik az AHP iskola magyar kutatói csoportja is, mindenekelőtt a SZTAKI Operációkutatás Laboratóriumában és a Corvinus Egyetem Operációkutatás Tanszékén, Rapcsák Tamás és Temesi József kezdeményezésére alakult. Tagjai jelentős publikációkkal járultak hozzá az AHP módszertanának a fejlesztéséhez, közöttük Bozóki S., Fülöp J. és Rónyai L. [2010], Csató L. [2012], Bozóki S., Fülöp J., Poesz A. [2011] cikkei az EM és LLSM módszerek alkalmazásával a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok optimális kiegészítéséről közöl eredményeket, Temesi J. cikke [2010] és Farkas A., P. Lancaster, Rózsa P. dolgozata [2003] a páros összehasonlítás mátrixok konzisztenciáját tanulmányozta, Kéri Gerzson munkája [2005] a páros összehasonlítás mátrixokra fogalmaz meg kritériumokat.

A jelen dolgozat a páros összehasonlítás mátrix egy prioritásvektorának meghatározására olyan módszert alkalmaz, amely a „távolságminimalizálási” eljárások csoportjába tartozik. Távolság helyett azonban eltérést kell mondanunk, mert az alkalmazott függvény nem teljesíti a távolságfüggvények minden tulajdonságát. A következő részben bemutatunk két eltérésfüggvény-családot, amelyek tagjai alkalmasak lehetnek arra, hogy ezekkel mérjük az  $A$  páros összehasonlítás mátrix és a prioritásvektorból képzett  $B = \{p_i/p_j\}$  konzisztens mátrix eltérését, közelségét. A harmadik részben az  $A$  és  $B$  mátrixok eltérését a  $p_i$  és  $a_{ij}p_j$  értékeknek az információelméletben, statisztikában és számos más területen alkalmazott Kullback-Leibler relatív entrópia-függvény alkalmazásával kapott eltéréseinek összegeként fogjuk fel (erre a továbbiakban  $A$  és  $B$  Kullback-Leibler eltéréseként hivatkozunk), bemutatjuk az így származtatott (K-L) minimalizálási modellt, amelynek a tulajdonságait tanulmányozzuk: bizonyítjuk a célfüggvény konvexitását, és hogy a modellnek van egyetlen pozitív megoldása. A negyedik részben a célfüggvénynek a modell paramétereitől való függését vizsgáljuk és egyben a konzisztencia növelésének módjára teszünk javaslatot. Az ötödik részben algoritmust javaslunk a feladat megoldására, felhasználva a feladathoz tartozó Kuhn-Tucker stacionárius pont problémát alkotó egyenletrendszert; bemu-

tatjuk, hogy a feladat egyetlen  $p$  optimális megoldásához tartozó célfüggvény-érték, amely az  $A$  mátrix és az optimális  $p$  vektor által meghatározott  $B$  mátrix Kullback-Leibler eltérése, egyenlő a két mátrix elemeinek összegei közötti különbség  $n$ -ed részével is ( $n$  a feladat mérete). A hatodik részben vizsgáljuk a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix esetén kapott feladatot, amelyet egy fixpont-problémával azonosítunk. Végül a numerikus számításokat illusztráljuk két klasszikus példán. Az összefoglalás és az irodalom zárják a dolgozatot.

## 2 Entrópiaszerű eltérésfüggvények

Az  $x \in R^n$  vektornak az  $y \in R^n$  vektortól való eltérését mérő függvénynek a következő két tulajdonsággal kell rendelkeznie: a) nemnegatív legyen, és b) értéke akkor és csak akkor legyen 0, ha  $x = y$ . Nem követeljük meg a távolságfüggvény további tulajdonságait: nem írjuk elő a szimmetricitást és a háromszög-egyenlőtlenséget.

A két legismertebb eltérésfüggvény-család: a Bregman-divergencia és a Csiszár-féle  $\varphi$ -divergencia.

A *Bregman-divergencia* (ld. Bregman [1967]) arra az észrevételre épül, hogy egy  $X_0 \subset R^n$  nyílt halmazon értelmezett tetszőleges  $n$ -változós szigorúan konvex, differenciálható  $f$  függvényre fennáll, hogy

$$f(x) - f(y) > \nabla f(y)(x - y); \quad \forall x, y \in X_0, x \neq y.$$

Így  $d(x, y) = f(x) - f(y) - \nabla f(y)(x - y)$  eltérésfüggvény, mert  $d(x, y) > 0$  és  $d(x, y) = 0$  akkor és csak akkor, ha  $x = y$ .

Ha például  $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ , akkor  $d(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$  - az euklideszi távolság négyzetét kapjuk. Ha  $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i$ ,  $x_i > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), akkor  $d(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i \ln \frac{x_i}{y_i} + y_i - x_i)$ ,  $y > 0$  - ez a Kullback-Leibler relatív entrópia-függvény. Ha  $f(x) = -\sum_{i=1}^n \ln x_i$ ,  $x_i > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ), akkor  $d(x, y) = \sum_{i=1}^n (-\ln \frac{x_i}{y_i} + \frac{x_i}{y_i} - 1)$  - ez a Burg entrópia.

További példákat és gazdag irodalomjegyzéket találhat az érdeklődő olvasó pl. Kiviel dolgozatában [1997].

A Bregman-divergencia nem korlátozódik a szeparábilis függvényekre, a *Csiszár-féle  $\varphi$ -divergencia* (ld. Csiszár Imre [1967]) azonban igen. A szóban forgó  $\varphi(t)$  a pozitív félegyenesen értelmezett kétszer differenciálható szigorúan konvex valós függvény az alábbi tulajdonságokkal:

$$\varphi(1) = 0; \quad \varphi'(1) = 0; \quad \varphi''(1) > 0; \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t) = -\infty,$$

Az  $x \in R_{++}^n$  vektornak az  $y \in R_{++}^n$  vektortól való  $\varphi$ -divergencia eltérését ekkor így kapjuk:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n y_i \varphi\left(\frac{x_i}{y_i}\right).$$

Könnyű belátni, hogy ekkor  $d_i(x_i, y_i)$  folytonosan differenciálható és szigorúan konvex az első változójában,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} d'(t, a) = +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} d'(t, a) = -\infty$ ,  $d'(a, a) = 0$ , ha  $a > 0$ . Ha például  $\varphi(t) = t \ln t - t + 1$ , akkor a Kullback-Leibler relatív entrópia-függvényt kapjuk. Ha  $\varphi(t) = -\ln t + t - 1$ , akkor

$$d_i(x_i, y_i) = y_i \ln \frac{y_i}{x_i} + x_i - y_i .$$

Ha  $\varphi(t) = (\sqrt{t} - 1)^2$ , akkor  $d_i(x_i, y_i) = (\sqrt{x_i} - \sqrt{y_i})^2$  - ez a Hellinger távolság négyzetének egy konstans-szorosa.

További példákat találhat az érdeklődő olvasó pl. Iusem, Svaiter, Teboulle dolgozatában [1994].

### 3 Az $A$ és $B$ mátrixok eltérésének mérése a Kullback-Leibler relatív entrópia-függvény segítségével

Mint hogy a  $B = \{p_i/p_j\}$  mátrix elemei változatlanok, ha a  $p$  vektort egy pozitív számmal megszorozzuk, a  $p$  vektor normalizálása érdekében bevezetjük a  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  feltételt. Ebben és a következő részekben feltesszük, hogy az  $A$  mátrix teljesen kitöltött.

Mind a súlyozott legkisebb négyzetek módszere, mind a legkisebb négyzetek módszere a Bregman függvények családjába tartozó eltérésfüggvényt alkalmaz: a  $p_i$  és az  $a_{ij}p_j$ , illetve az  $a_{ij}$  és a  $p_i/p_j$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$ ) értékek különbségeinek négyzetösszegének minimalizálása formájában keresi a prioritásvektort. E módszerek előnyeiről és hátrányairól az olvasó a hivatkozott dolgozatokból is tájékozódhat.

A jelen dolgozatban egy más megközelítést ajánlunk:  $A$  és  $B$  eltérését a  $p_i$  és az  $a_{ij}p_j$  értékeknek a Kullback-Leibler relatív entrópiával mért eltérése összegeként határozzuk meg. Ez azt jelenti, hogy a prioritásvektort olyan  $p^0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$  vektor formájában keressük, amely minimalizálja az eltérések összegét, amelyre

$$p^0 \in \arg \min_{\sum_i p_i = 1, p_i > 0} \sum_i \sum_j (p_i \ln \frac{p_i}{a_{ij}p_j} + a_{ij}p_j - p_i) .$$

Miért jó ez a módszer?

- mert a minimumpont egyértelmű;
- mert a minimumpont pozitív és a  $p^0$  vektor formájában kinyilvánított sorrendek nem változnak, ha a vektort megszorozzuk egy pozitív konstanssal;
- mert  $B$  prioritásvektora szintén  $p^0$  akkor, ha elemeit  $p^0$  elemei segítségével határozzuk meg;

- mert nem kell az alkalmazáshoz a páros összehasonlítás mátrixnak teljesen kitöltöttnek lennie (csak összefüggőnek);
- mert  $p^0$  azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy az optimális célfüggvény-érték legnagyobb csökkenését az  $A$  mátrix  $a_{ij}$  elemének és reciprokának változtatásával, a többi elem változatlanul hagyása mellett akkor érjük el, ha ezt az elemet az optimális  $p_i^0/p_j^0$  értékkel helyettesítjük.

Ezeket az észrevételeket igazoljuk a következő részben, amelyben először az alábbi matematikai programozási feladat tulajdonságait vizsgáljuk:

$$(K-L) \quad C(A, p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (p_i \ln \frac{p_i}{a_{ij} p_j} + a_{ij} p_j - p_i) \rightarrow \min$$

$$p \in P = \{ p \in R_+^n : \sum_{j=1}^n p_j = 1 \} \quad p > 0 ,$$

ahol  $A$  az adott páros összehasonlítás mátrix,  $R_+^n$  a nemnegatív tértengely.

A  $C(A, p)$  függvényt a továbbiakban az  $A$  páros összehasonlítás mátrix és a  $p$  elemei segítségével meghatározott konzisztens  $B$  mátrix Kullback-Leibler eltérésének nevezzük és az  $A$  és  $B$  közelségeként fogjuk fel. A (K-L) feladat egy optimális  $p$  megoldásából származtatott  $B$  mátrix pedig e felfogásnak megfelelően a „legközelebbi” az  $A$  páros összehasonlítás mátrixhoz. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ez a definíció tetszőleges két mátrix, vagy akár a  $B$  és  $A$  mátrixok – a sorrend fontos! – eltérésének, közelségének mérésére nem alkalmas.

Vizsgáljuk a (K-L) feladatot. Először vegyük észre, hogy a célfüggvény értelmezési tartománya a pozitív  $p$  vektorok  $R_{++}^n$  nyílt halmaza, ezért vizsgálnunk kell majd azt a kérdést, felveszi-e a minimumát  $C(A, p)$  a korlátos, zárt, konvex  $P$  halmaz és  $R_{++}^n$  metszetén. Az első állításokban  $C(A, p)$  tulajdonságait  $p \in R_{++}^n$  vektorokra vizsgáljuk.

Vegyük észre, hogy  $C(A, p)$  differenciálható a  $P$  halmaz relatív belső pontjainak halmazán: a

$$\text{rel int } P = \{ p \in R_{++}^n : \sum_{j=1}^n p_j = 1 \} = P \cap R_{++}^n$$

halmazon, hiszen a függvényt alkotó összeg minden tagja differenciálható a rel int  $P$  halmazon.

**1. Állítás.** *Ha  $p \in R_{++}^n$ , akkor a  $C(A, p)$  függvény nemnegatív és értéke 0 akkor és csak akkor, ha  $p_i = a_{ij} p_j$  minden  $i, j$  indexpár ( $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) esetén.*

**BIZONYÍTÁS.** Emeljük ki a célfüggvényben  $p_i$ -t rögzített  $i$  és  $j$  indexek esetén (megtehetjük, mert  $p_i$  a feltevés szerint pozitív):

$$p_i \ln \frac{p_i}{a_{ij} p_j} + a_{ij} p_j - p_i = p_i \left( - \ln \frac{a_{ij} p_j}{p_i} + \frac{a_{ij} p_j}{p_i} - 1 \right) .$$

Mint ismeretes,  $\ln a \leq a - 1 \forall a \in R_{++}$  esetén és egyenlőség teljesül akkor és csak akkor, ha  $a = 1$ . Az állítás fennáll tehát a  $C(A, p)$ -t alkotó összeg minden tagjára, így magára az összegre is.  $\square$

**2. Állítás.**  $C(A, p)$  szigorúan konvex és differenciálható a rel int  $P$  halmazon.

BIZONYÍTÁS. Írjuk fel a  $C(A, p)$  függvény tagjait az alábbi módon:

$$C(A, p) = \sum_{i=1}^n (np_i \ln p_i - p_i \sum_{j=1}^n \ln a_{ij} - p_i \sum_{j=1}^n \ln p_j + \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j - np_i) .$$

Az  $x \ln x$  szigorúan konvex függvény értelmezési tartománya az  $R_{++}$  pozitív nyílt félegyenes, a függvényt azonban a szokásoknak megfelelően lezárhatjuk a  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \ln 0 = 0$  függvényérték-adással. Így a  $C(A, p)$ -t alkotó fenti szummában az első tag, és a második, negyedik és ötödik tag, amelyek lineárisak, összege:

$$C_1(A, p) = \sum_{i=1}^n \left( np_i \ln p_i - p_i \sum_{j=1}^n \ln a_{ij} + \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j - np_i \right)$$

szeparábilis zárt szigorúan konvex függvényt alkot  $R_+^n$ - n.  $C(A, p)$  fennmaradó tagja

$$C_2(A, p) = - \sum_{i=1}^n p_i \sum_{j=1}^n \ln p_j = \left( - \sum_{j=1}^n p_j \right) \left( \sum_{j=1}^n \ln p_j \right) ,$$

és  $C_2(A, p) = - \sum_{j=1}^n \ln p_j$  a rel int  $P$  tartományon, vagyis szigorúan konvex. Ezzel az állítást beláttuk.  $\square$

A következő állítás itt leírt bizonyítása Fülöp Jánostól származik, aki ezt az eredeti kéziratban szereplő eléggé körülményes gondolatmenet helyett ajánlotta.

**3. Állítás.**  $C(A, p)$  felveszi a minimumát a rel int  $P$  halmazon, a minimum-pont egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. Az egyértelműség  $C(A, p)$  szigorúan konvex voltából következik. A létezést kell bizonyítanunk. Vegyük észre, hogy az előző bizonyításban szereplő  $C_1(A, p)$  függvény a minimumát a korlátos és zárt  $P$  halmazon felveszi, jelölje a minimumértéket  $L$ . Válasszunk egy tetszőleges  $\hat{p} \in P$ ,  $\hat{p} > 0$  pontot és legyen  $K = C(A, \hat{p})$ . Az optimális megoldás szempontjából  $P$  azon  $p$  pontjai érdekesek, amelyekre  $K \geq C(A, p)$ . Bármely  $p \in P$ ,  $p > 0$  esetén  $-\ln p_i \geq 0$ , mivel  $p_i < 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , így

$$L - \ln p_i \leq L - \sum_{j=1}^n \ln p_j \leq C(A, p) , \quad \forall p > 0, p \in P, i = 1, \dots, n .$$

Válasszunk tetszőlegesen egy  $\check{p} \in P$  pontot, amelyre  $\check{p} > 0$  és  $K \geq C(A, \check{p})$ . Ekkor  $L - \ln \check{p}_i \leq K$ , azaz

$$\check{p}_i \geq e^{L-K} , \quad i = 1, \dots, n .$$

A  $P$  halmaznak a  $K \geq C(A, p)$  feltételt kielégítő pontjai tehát kompakt halmazzá alkotnak, amelyen a folytonos  $C(A, p)$  függvény szükségképpen felveszi a minimumát. A minimumpont egyben  $C(A, p)$  minimumpontja a  $P$  halmazon. Ezzel az állítást beláttuk.  $\square$

## 4 Konzisztencia

A közelség fenti definíciója alapján az  $A$  páros összehasonlítás mátrixhoz létezik pontosan egy „legközelebbi”  $B$  konzisztens mátrix: a (K-L) feladat egyetlen optimális megoldását alkotó  $p$  prioritásvektor elemeiből alkotott hányadosok mátrixa. Mivel az eltérés nemnegatív és zéró akkor és csak akkor, ha a két mátrix egyenlő, ezért a két mátrix eltérése egyben az  $A$  mátrix inkonzisztenciájának méréséül is szolgálhat. Ebben a megállapításban Saaty (1987) gondolatmenetét követtük, aki az inkonzisztencia mérésére azért alkalmazta a  $C.I. = (\lambda_{\max} - n)/(n - 1)$  relatív eltérést (ill. ennek egy konstanssal való szorzatát), mert  $\lambda_{\max} > n$ . Hasonlóan ehhez a gondolatmenethez, javasoljuk a relatív eltérés és egyben az inkonzisztencia mérésére a  $\min C(A, p)$  értéket, amely javaslatot a következő részben leírt 1. Következmény szándékunk szerint meggyőzően alátámasztja.

A következő kérdés az, hogyan kellene megváltoztatnunk az  $A$  mátrix  $i_0$ -adik sorában és  $j_0$ -adik oszlopában lévő  $a_{i_0 j_0}$  elemet, illetve ennek a reciprokát a  $j_0$ -adik sorban és  $i_0$ -adik oszlopban, hogy az  $A$  többi elemének változatlanul hagyása mellett a legnagyobb csökkenést éadjuk el a célfüggvényértékben.

**4. Állítás.** *Adott  $i_0, j_0$  indexpár és adott  $p$  prioritásvektor esetén az  $A$  és  $B$  mátrixok Kullback-Leibler eltérése akkor csökken a legnagyobb mértékben, ha az  $a_{i_0 j_0}$  értéket a  $p_{i_0}/p_{j_0}$  hányadossal helyettesítjük;  $C(A, p)$ , mint  $a_{i_0 j_0}$  függvénye  $p_{i_0}/p_{j_0}$  egy környezetében konvex.*

BIZONYÍTÁS. Minimalizálni akarjuk adott  $p$  mellett a

$$C(A, p) = \sum_i \sum_j (p_i \ln \frac{p_i}{a_{ij} p_j} + a_{ij} p_j - p_i)$$

függvényt, mint a pozitív  $a_{i_0 j_0}$ -ban egyváltozós függvényt. Írjuk fel a deriváltját:

$$\begin{aligned} \frac{dC(A, p)}{da_{i_0 j_0}} &= \left( p_{i_0} \ln \frac{p_{i_0}}{a_{i_0 j_0} p_{j_0}} + a_{i_0 j_0} p_{j_0} - p_{i_0} + p_{j_0} \ln \frac{p_{j_0}}{\frac{1}{a_{i_0 j_0}} p_{i_0}} + \frac{1}{a_{i_0 j_0}} p_{i_0} - p_{j_0} \right)' \\ &= \left( -p_{i_0} \ln a_{i_0 j_0} + p_{j_0} a_{i_0 j_0} + p_{j_0} \ln a_{i_0 j_0} + \frac{p_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} \right)' \\ &= -\frac{p_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} + p_{j_0} + \frac{p_{j_0}}{a_{i_0 j_0}} - \frac{p_{i_0}}{a_{i_0 j_0}^2} = \left( 1 + \frac{1}{a_{i_0 j_0}} \right) \left( p_{j_0} - \frac{p_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} \right). \end{aligned}$$

Mivel  $a_{i_0 j_0}$  negatív nem lehet, ezért a derivált értéke 0, amint ezt vártuk is, ha:  $a_{i_0 j_0} = p_{i_0}/p_{j_0}$ . Nézzük meg, hogy e pontban konvex-e. Írjuk fel a



$C(A, p)$  függvény  $a_{i_0 j_0}$  szerinti második deriváltját:

$$\frac{d^2 C(A, p)}{da_{i_0 j_0}^2} = \frac{p_{i_0}}{a_{i_0 j_0}^2} - \frac{p_{j_0}}{a_{i_0 j_0}^2} + \frac{2p_{i_0}}{a_{i_0 j_0}^3} = \frac{1}{a_{i_0 j_0}^2} \left( p_{i_0} - p_{j_0} + \frac{2p_{i_0}}{a_{i_0 j_0}} \right).$$

Ha  $p_{i_0} \geq p_{j_0}$ , akkor  $d^2 C(A, p)/da_{i_0 j_0}^2 > 0$ . Ha  $p_{i_0} < p_{j_0}$ , akkor  $d^2 C(A, p)/da_{i_0 j_0}^2 > 0$ , ha  $0 < a_{i_0 j_0} < 2p_{i_0}/(p_{j_0} - p_{i_0})$ . Adott tetszőleges prioritásvektor esetén tehát  $C(A, p)$  mint  $a_{i_0 j_0}$  függvénye konvex a pozitív számegeyenesen, ha  $p_{i_0} \geq p_{j_0}$  és konvex a  $(0, \frac{2p_{i_0}}{p_{j_0} - p_{i_0}})$  tartományban, ha  $p_{i_0} < p_{j_0}$ . A  $p_{i_0}/p_{j_0}$  érték eleme mindkét tartománynak:

$$\frac{p_{i_0}}{p_{j_0}} \leq \frac{2p_{i_0}}{p_{j_0} - p_{i_0}} \Leftrightarrow p_{j_0} - p_{i_0} \leq 2p_{j_0} \Leftrightarrow -p_{i_0} \leq p_{j_0}.$$

Ezért  $C(A, p)$  konvex e pont egy környezetében. Ezt akartuk belátni.  $\square$

Vegyük észre, hogy az  $a_{i_0 j_0} = p_{i_0}/p_{j_0}$  helyettesítéssel az  $A$  és  $B$  mátrixok Kullback-Leibler eltérése csökkenésének nagysága maga az eltérés:

$$p_{i_0} \ln \frac{p_{i_0}}{a_{i_0 j_0} p_{j_0}} + a_{i_0 j_0} p_{j_0} - p_{i_0} + p_{j_0} \ln \frac{p_{j_0}}{\frac{1}{a_{i_0 j_0}} p_{i_0}} + \frac{1}{a_{i_0 j_0}} p_{i_0} - p_{j_0}.$$

Ha tehát abból a szempontból vizsgáljuk meg az  $A$  mátrixot, hogy a konzisztencia növelése érdekében melyik összehasonlítás esetében ajánljuk a döntéshozónak, hogy vizsgálja felül a döntését, akkor  $A$  azon elemét kell kiválasztanunk, amelyre e csökkenés a legnagyobb. Mivel ez egyben a legnagyobb eltérés kiválasztását is jelenti, a választás összhangban van Saaty (2003) két javasolt módszerével is: az egyik a legnagyobb eltérés, a másik a legnagyobb csökkenés (Harker, 1987) kiválasztásának felel meg.

**5. Állítás.** *Legyen  $p^0$  az  $A$  páros összehasonlítás mátrix prioritásvektora – a (K-L) feladat optimális megoldása –, és a  $B$  mátrix elemeit a  $p^0$  elemeinek hányadosai alkossák. Akkor a  $B$  mátrix prioritásvektora is  $p^0$ .*

Az állítás következik abból, hogy a  $B$  mátrixnak önmagától való eltérése 0, miközben minden más pozitív mátrixtól való eltérése pozitív az 1. Állítás szerint.

## 5 A Kullback-Leibler relatív entrópia minimalizálása: a feladat megoldása

Írjuk fel  $C(A, p)$  gradiensét:

$$\frac{\partial}{\partial p_i} C(A, p) = \sum_{j=1}^n a_{ji} + \sum_{j=1}^n \ln a_{ji} + n \ln p_i - \sum_{j=1}^n \ln p_j - \frac{\sum_{j=1}^n p_j}{p_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Kihasználtuk, hogy  $a_{ij} = 1/a_{ji}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Írjuk fel a (K-L) feladathoz tartozó stacionárius pont problémát. A problémát és az

itt következő állításokat ld. Mangasarian könyvében [1969]. Olyan  $p = (p_1, \dots, p_n, \omega, v_1, \dots, v_n)$  értékeket keresünk, amelyek kielégítik az alábbi feltételeket:

$$(K-T) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^n p_j &= 1, \quad p = (p_1, \dots, p_n) \in R_{++}^n \\ \frac{\partial C(A, p)}{\partial p_i} - \omega - v_i &= 0, \quad v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^n v_j p_j &= 0. \end{aligned}$$

Legyen  $p^0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$  a (K-L) feladat optimális megoldása – ez a 3. Állítás értelmében létezik és pozitív. Az optimalitás szükségességére vonatkozó Kuhn-Tucker tétel azt mondja ki, hogy a) mivel  $R_{++}^n$  nyílt és a (K-L) feladat célfüggvénye és feltételi függvényei differenciálhatók a  $p^0 \in R_{++}^n$  pontban; b) mivel a (K-L) feltételrendszere reguláris: lineáris; ezért léteznek olyan  $v_1^0, \dots, v_n^0 \geq 0$ ,  $\omega^0$  duális változó értékek, hogy  $(p_1^0, \dots, p_n^0, \omega^0, v_1^0, \dots, v_n^0)$  együttesen megoldását alkotják a (K-T) feladatnak. Mínt hogy  $p^0 \in R_{++}^n$ , ezért a  $\sum_{j=1}^n v_j^0 p_j^0 = 0$  komplementaritási feltétel csak akkor teljesül, ha  $v_1^0 = 0, \dots, v_n^0 = 0$ .

Az állítás fordítva is fennáll. Az optimalitás elégségességére vonatkozó Kuhn-Tucker tétel azt mondja ki, hogy ha  $(p_1^0, \dots, p_n^0, \omega^0, v_1^0, \dots, v_n^0)$  megoldása a (K-T) feladatnak, akkor a) mivel  $R_{++}^n$  nyílt és konvex; b) mivel a (K-L) feladat célfüggvénye és feltételi függvényei differenciálhatók a  $p^0 \in R_{++}^n$  pontban és konvexek az  $R_{++}^n$  konvex halmazon, ezért  $p^0$  optimális megoldása a (K-L) feladatnak.

A (K-L) feladat egyetlen pozitív optimális megoldása, és csak az, tehát kielégíti a következő problémát:

$$(K-T) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^n p_j &= 1, \quad p \in R_{++}^n \\ \sum_{j=1}^n \left( \ln \frac{p_i}{a_{ij} p_j} - \frac{p_j}{p_i} + a_{ji} \right) &= \omega, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

A (K-T) feladatból kitűnik az  $\omega$  változó jelentése. Szorozzuk meg az  $i$ -edik feltételt  $p_i$ -vel, és adjuk össze az egyenleteket. Azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n p_i \sum_{j=1}^n \left( \ln \frac{p_i}{a_{ij} p_j} - \frac{p_j}{p_i} + a_{ji} \right) = \omega \sum_{i=1}^n p_i \Leftrightarrow C(A, p) = \omega.$$

$\omega$  tehát az adott  $p$  vektorhoz tartozó, egyben optimális, célfüggvény-értéke a (K-L) feladatnak,  $\omega$  nemnegatív és 0 akkor és csak akkor, ha  $a_{ij} = p_i/p_j$  minden  $i, j$  indexpárra. Méri az  $A$  mátrix és a  $p$  vektor által meghatározott  $B$  mátrix Kullback-Leibler eltérését. De vegyük észre azt is, hogy az  $A$  mátrix

reciprok volta miatt

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \ln \frac{p_i}{a_{ij} p_j} - \frac{p_j}{p_i} + a_{ji} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( a_{ji} - \frac{p_j}{p_i} \right) = n\omega,$$

vagyis  $\omega$  az átlaga az  $A$  mátrix illetve a  $B$  mátrix elemei összegeinek különbségének, ilyen értelemben is méri az  $A$  mátrix  $B$ -től való eltérését. Foglaljuk ezt össze:

**1. Következmény.**  $A$  (K-T) feladat egyetlen  $(p^0, \omega^0)$  megoldására fennáll, hogy

$$\omega^0 = \min_{p \in P, p \in R_{++}^n} C(A, p) = C(A, p^0), \quad \omega^0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( a_{ij} - \frac{p_i^0}{p_j^0} \right).$$

A stacionárius pont probléma alábbi vizsgálatával és átalakításával az a célunk, hogy a (K-L) feladat megoldására módszert mutassunk be a (K-T) feladat megoldása révén. Az egyenletrendszert alakítsuk át. Először írjuk fel mindkét oldalt logaritmusfüggvény formájában:

$$(K-T) \quad \begin{aligned} & \sum_{j=1}^n p_j = 1, \quad p \in R_{++}^n \\ & \ln \left( p_i^n \cdot \prod_{j=1}^n a_{ji} e^{a_{ji}} \cdot \prod_{j=1}^n \frac{1}{p_j} e^{-p_j/p_i} \right) = \ln e^\omega, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy a logaritmus szigorúan növekvő függvény, ezért az  $i$ -edik egyenletben a két oldal egyenlő, ha az argumentumok egyenlők:

$$\prod_{j=1}^n a_{ji} e^{a_{ji}} = e^\omega \cdot \prod_{j=1}^n p_j \cdot \frac{1}{p_i^n} e^{1/p_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Osszuk el az első egyenlet két oldalát a második,  $\dots$ ,  $n$ -edik egyenlet megfelelő oldalaival! Az osztás elvégezhető, mert a szorzatok minden tényezője pozitív. Az alábbi ekvivalens feladathoz jutunk:

$$(K-T) \quad \begin{aligned} & \sum_j p_j = 1, \quad p \in R_{++}^n, \\ & \frac{1}{p_i^n} e^{1/p_i} = \frac{\prod_j a_{ji} e^{a_{ji}}}{\prod_j a_{j1} e^{a_{j1}}} \cdot \frac{1}{p_1^n} e^{1/p_1}, \quad i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Az  $i = 1$  eset azonosság. Könnyen látható, hogy

- $f(x) = \frac{1}{x^n} e^{1/x}$  a pozitív félegyenesen értelmezett pozitív, szigorúan csökkenő, differenciálható konvex függvény,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ;

- $f^{-1}(y)$  a pozitív félegyenesen értelmezett pozitív, szigorúan csökkenő, differenciálható konvex függvény,  $\lim_{y \rightarrow 0} f^{-1}(y) = +\infty$ ,  $\lim_{y \rightarrow +\infty} f^{-1}(y) = 0$ ;
- $p_i = f^{-1}(C_i f(p_1))$ , ahol  $C_i = (\prod_{j=1}^n a_{ji} e^{a_{ji}}) / (\prod_{j=1}^n a_{j1} e^{a_{j1}})$ ,  $i = 2, \dots, n$ ;
- $f^{-1}(C_i f(p_1))$  a pozitív félegyenesen értelmezett pozitív, szigorúan növekvő, differenciálható függvény,  $\lim_{p_1 \rightarrow 0} f^{-1}(C_i f(p_1)) = 0$ ,  $\lim_{p_1 \rightarrow +\infty} f^{-1}(C_i f(p_1)) = +\infty$ ,  $(f^{-1})'(C_i f(p_1)) > 0$  ( $p_1 > 0$ ).

A (K-T) feladat így a

$$g(p_1) = \sum_{i=1}^n f^{-1}(C_i f(p_1)) = 1$$

egyenlet formájában írható fel, ahol  $C_1 = 1$ . A fentiek szerint  $g(p_1)$  a pozitív félegyenesen értelmezett pozitív, szigorúan növekvő, differenciálható függvény,  $\lim_{p_1 \rightarrow 0} g(p_1) = 0$ ,  $\lim_{p_1 \rightarrow +\infty} g(p_1) = +\infty$ ,  $g'(p_1) > 0$ , ( $p_1 > 0$ ).

A  $g$  függvény jó tulajdonságai miatt az egyenlet megoldására alkalmazhatók ismert numerikus módszerek: a biztosan konvergens intervallumfelező módszer és a húrmódszer, valamint a jó kezdőpontok választása esetén hatékonyabb szelő módszer, akár egyszerű Excel programként is. A szelő módszerrel való megoldás menetét bemutatjuk:

- Kiindulásként válasszunk két pozitív  $p_1^1, p_1^2$  értéket, amelyekre  $g(p_1^1) \leq 1$ ,  $g(p_1^2) \geq 1$ . Ha valamelyikre egyenlőség teljesül, akkor az eljárás véget ér. Különben: legyen  $k = 3$ , folytassuk az eljárást a b. lépéssel.
- Határozzuk meg  $p_1^k$ -t a következő módon:

$$p_1^k = p_1^{k-1} - \frac{g(p_1^{k-1}) - 1}{g(p_1^{k-1}) - g(p_1^{k-2})} (p_1^{k-1} - p_1^{k-2}).$$

- Ha  $g(p_1^k) = 1$ , akkor az eljárás véget ér. Különben: legyen  $k = k + 1$ , folytassuk az eljárást a b. lépéssel.

(A szóban forgó egyenletek kielégítését a szokásoknak megfelelő „elég nagy pontossággal” követeljük meg. Hogy alkalmanként milyen pontosságot célszerű elérni, erre itt nem térünk ki. Az egyenlet megoldására az Excel solver is használható természetesen, de előfordul, hogy egy egyszerű solver nem talál megoldást, mert a kiszámítandó prioritások 0-hoz közeli értékek és ez kilendítheti a közelítő eljárást a menetéből.)

## 6 A (K-L) feladat nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix esetén

A Kullback-Leibler relatív entrópia eltérésfüggvény ez esetben kevesebb tagot tartalmaz. Legyenek az  $A$  mátrix megadott (kitöltött) elemeihez tartozó

index-halmazok soronként a következők:  $\Gamma_i = \{j : a_{ij} > 0, (i, j) \text{ kitöltött}\}$ . Nyilvánvaló, a páros összehasonlítás mátrix pozitív reciprok volta miatt, hogy  $j \in \Gamma_i$  akkor és csak akkor, ha  $i \in \Gamma_j$ . Ekkor a (K-L) feladat, az eltérésfüggvény gradiense és a feladathoz tartozó Kuhn-Tucker stacionárius feladat az alábbi lesz:

$$(K-L-1) \quad C(A, p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \Gamma_i} \left( p_i \ln \frac{p_i}{a_{ij} p_j} + a_{ij} p_j - p_i \right) \rightarrow \min$$

$$p \in P = \{ p \in R_+^n : \sum_{j=1}^n p_j = 1 \}, \quad p \in R_{++}^n.$$

$$(K-T-1) \quad \frac{\partial C(A, p)}{\partial p_i} = \sum_{j \in \Gamma_i} \left( \ln \frac{p_i}{a_{ij} p_j} - \frac{p_j}{p_i} + a_{ji} \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad p \in R_{++}^n,$$

$$\sum_{j \in \Gamma_i} \left( \ln \frac{p_i}{a_{ij} p_j} - \frac{p_j}{p_i} + a_{ji} \right) = \omega, \quad i = 1, \dots, n.$$

(A fenti szummákban a megfelelő tag 0 értékű, ha  $\Gamma_i$  üres.) A nem teljesen kitöltött  $A$  mátrixot *összefüggőnek* nevezzük, ha bárhogyan is választjuk az  $\{1, 2, \dots, n\}$  indexhalmaz egy  $I$  valódi részhalmazát, az  $\bigcup_{i \in I} \{j : j \in \Gamma_i\}$  halmaz bővebb, mint az  $I$  halmaz:  $\exists k \in \bigcup_{i \in I} \{j : j \in \Gamma_i\}$ , hogy  $k$  nem eleme az  $I$  halmaznak. Ez másként azt jelenti, hogy  $A$  nem összefüggő, ha a sorokat és oszlopokat (az alternatívákat) összehangolt módon átrendezhetjük úgy, hogy az eredményül kapott mátrix dekomponált: a kitöltött elemek első csoportja a mátrix bal felső  $k_1$  sorában és oszlopában helyezkedik el, a maradék pedig a  $k_1 + 1$ -edik, ...,  $n$ -edik sorban és oszlopban,  $k_1 < n$ . A kitöltött és nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix gráf reprezentációja segítségével az összefüggőséget is jól lehet szemléltetni, erről ld. például Bozóki-Fülöp-Rónyai cikkét [2010].

Nem teljesen kitöltött  $A$  mátrix esetében a (K-L-1) feladat konvexitására nem támaszkodhatunk. Támaszkodhatunk azonban arra az észrevételre, hogy  $C(A, p)$  értéke nem változik, ha adott  $p > 0$  prioritásvektor mellett a mátrix hiányzó elemeit kitöltjük a  $\frac{p_i}{p_j}$  értékekkel. Jelölje  $A(p)$  azt a –teljesen kitöltött– mátrixot, amelynek elemei a következők:

$$a_{ij}(p) = \begin{cases} a_{ij}, & \text{ha } j \in \Gamma_i \\ \frac{p_i}{p_j} & \text{különben.} \end{cases}$$

Világos, hogy  $C(A, p) = C(A(p), p)$ . A (K-L) problémát tehát nem teljesen kitöltött  $A$  páros összehasonlítás mátrix esetén a következőképpen írjuk fel:

$$(K-L-1) \quad C(A, p) = C(A(p), p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \Gamma_i} \left( p_i \ln \frac{p_i}{a_{ij} p_j} + a_{ij} p_j - p_i \right) \rightarrow \min$$

$$p \in P, \quad p \in R_{++}^n.$$

Vizsgáljuk a célfüggvény értékét. Legyen adott a  $p^1 \in R_{++}^n$  és legyen  $p^2 = \arg \min_{p \in P} C(A(p^1), p)$ . A 3. Állítás értelmében  $p^2$  létezik és pozitív. Nyilvánvaló, hogy  $C(A(p^1), p) > C(A(p^1), p^2)$  minden  $p^2$ -től különböző  $p > 0$  vektor esetén,  $p^1$ -t is beleértve, ha  $p^1 \neq p^2$ , vagyis  $C(A(p^1), p^1) > C(A(p^1), p^2)$ . Vegyük észre másfelől, hogy  $C(A(p^1), p^1) = \min_{p \in P} C(A(p), p^1)$ , a 4. Állítás szerint. Ha tehát a (K-L-1) feladatnak van  $\hat{p} > 0$  optimális megoldása, azaz

$$C(A(\hat{p}), \hat{p}) = \min_{q \in P} \min_{p \in P} C(A(p), q) ,$$

akkor a  $\hat{p}$  pontra fennáll, hogy

$$(*) \quad C(A(p), \hat{p}) \geq C(A(\hat{p}), \hat{p}) \quad \text{és} \quad C(A(\hat{p}), q) > C(A(\hat{p}), \hat{p}) \\ \text{minden } p \in P, q \in P, q \neq \hat{p} \text{ esetén .}$$

A (\*) tulajdonság tehát maga után vonja, hogy  $\hat{p}$  fixpontja az alábbi leképezésnek:

$$f(p) : P \rightarrow P, \quad f(p) = \arg \min_{q \in P} C(A(p), q) .$$

Azt, hogy ha  $\hat{p}$  a (\*) tulajdonsággal rendelkezik, akkor optimális megoldása lenne a (K-L-1) feladatnak, vagyis hogy  $\hat{p}$  nem csak lokális, hanem globális minimumpont lenne, csak akkor állíthatnánk, ha a feladat konvexitását is belátnánk – erre ebben a dolgozatban nem kerül sor.

A továbbiakban nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix esetén olyan prioritásvektor keresünk – és ennek birtokában a feladatunkat megoldottnak tekintjük –, amely a (\*) tulajdonsággal rendelkezik. Ilyen prioritásvektor létezésére az alábbiakban konstruktív bizonyítást adunk.

**6. Állítás.** *Tegyük fel, hogy az A nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix összefüggő. Ekkor a (K-L-1) feladatnak van olyan pozitív megoldása, amelyre a (\*) tulajdonság teljesül.*

**BIZONYÍTÁS.** Induljunk ki tetszőleges pozitív  $p^0 \in P$  vektorból. Hozzuk létre a  $p^k$  sorozatot, ennek a  $k = 1, 2, \dots$  elemét az alábbi módon:

Vizsgáljuk meg először, hogy  $p^{k-1}$  rendelkezik-e a (\*) tulajdonsággal. *Ha igen*, készen vagyunk, az eljárás befejeződött. *Ha nem*, legyen  $p^k = \arg \min_{p \in P} C(A(p^{k-1}), p)$ . A 3. Állítás értelmében  $p^k$  létezik és pozitív. Az eljárást folytatjuk. Ha az eljárás véges lépésben befejeződik, akkor az állításban szereplő pontot létrehoztuk, a bizonyítás befejeződött. Ha nem, akkor egy végtelen sorozatot kapunk. Mivel a sorozat minden tagja a  $P$  korlátos zárt halmazból származik, ezért kiválasztható a  $\{p^k\}_{k=0,1,\dots}$  végtelen sorozatból egy konvergens  $\{p^{k_j}\}_{j=0,1,\dots}$  részsorozat. Jelölje  $e$  sorozat határértékét  $\hat{p}$ :

$$\hat{p} = \lim_{j \rightarrow \infty} p^{k_j} , \quad \hat{p} \in P .$$

A sorozat tagjaira fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\omega_{k_j-1} = C(A(p^{k_j-1}), p^{k_j}) \geq C(A(p^{k_j}), p^{k_j}) > C(A(p^{k_j}), p^{k_j+1}) = \omega_{k_j} .$$

Mivel  $\{\omega_{k_j}\}$  alulról korlátos pozitív csökkenő sorozat, ezért létezik a limesze:

$$\begin{aligned}\lim_{j \rightarrow \infty} \omega_{k_j} &= \lim_{j \rightarrow \infty} C(A(p^{k_j}), p^{k_j}) = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} C(A(p^{k_j-1}), p^{k_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} C(A(p^{k_j}), p^{k_j+1}) = \omega \geq 0.\end{aligned}$$

Ha  $\hat{p} > 0$ , akkor

$$\begin{aligned}\lim_{j \rightarrow \infty} C(A(p^{k_j}), p^{k_j}) &= \min_{p \in P} C(A(\hat{p}), p) = \\ &= \min_{p \in P} C(A(p), \hat{p}) = C(A(\hat{p}), \hat{p}) = \omega \geq 0,\end{aligned}$$

ekkor tehát  $\hat{p}$  rendelkezik a (\*) tulajdonsággal és az állítást bizonyítottuk. *Belátjuk még, hogy  $\hat{p} > 0$ .* Ez következik. Vegyük észre, hogy minden  $\delta > 0$  számhoz létezik olyan  $r$  index, hogy  $C(A(p^{k_j}), p^{k_j}) < \omega + \delta$ , ha  $j > r$ , mivel  $C(A(p), p)$  folytonos függvénye  $p$ -nek és  $C(A(p^{k_j}), p^{k_j})$  csökkenő sorozat, amely  $\omega \geq 0$  értékhez tart. Válasszunk  $\delta$ -t.

Vegyük észre, hogy  $\hat{p}_j > 0$  legalább egy indexre, mivel  $\sum_{j=1}^n \hat{p}_j = 1$ . Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy legalább egy  $i$  indexre  $\hat{p}_i = 0$ . Vegyük észre, hogy e feltevés mellett van olyan  $i_0, j_0$  indexpár – és ezt itt kiválasztjuk –, hogy  $\hat{p}_{i_0} = 0, \hat{p}_{j_0} > 0$  és az  $A$  mátrix  $(i_0, j_0)$ -adik helye ki van töltve. Ha ugyanis minden  $i$  indexre, amelyre  $\hat{p}_i = 0$  fennállna, hogy  $\hat{p}_j = 0$ , ha  $j \in \{j : j \in \Gamma_i\}$ , akkor az  $I = \{i : \hat{p}_i = 0\}$  indexhalmazra azt kapnánk, hogy  $I = \bigcup_{i \in I} \{j : j \in \Gamma_i\}$ , ellentmondásban azzal a feltevéssel, hogy  $A$  összefüggő. Írjuk fel  $C(A(p^{k_r}), p^{k_r})$  értékét:

$$\begin{aligned}C(A(p^{k_r}), p^{k_r}) &= \sum_{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \Gamma_i} \left( p_i^{k_r} \ln \frac{p_i^{k_r}}{a_{ij} p_j^{k_r}} + a_{ij} p_j^{k_r} - p_i^{k_r} \right) = \\ &= \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\}, j \in \Gamma_i \\ (i,j), (j,i) \neq (i_0, j_0)}} \left( p_i^{k_r} \ln \frac{p_i^{k_r}}{a_{ij} p_j^{k_r}} + a_{ij} p_j^{k_r} - p_i^{k_r} \right) + \\ &+ p_{i_0}^{k_r} \ln \frac{p_{i_0}^{k_r}}{a_{i_0 j_0} p_{j_0}^{k_r}} + a_{i_0 j_0} p_{j_0}^{k_r} - p_{i_0}^{k_r} + p_{j_0}^{k_r} \ln \frac{p_{j_0}^{k_r}}{a_{j_0 i_0} p_{i_0}^{k_r}} + a_{j_0 i_0} p_{i_0}^{k_r} - p_{j_0}^{k_r}.\end{aligned}$$

A szumma minden tagja nemnegatív, összegük és így tagjaik értéke is kisebb, mint  $\omega + \delta$ . Írjuk fel az összeg utolsó tagjára vonatkozó egyenlőtlenséget részletesebben:

$$p_{j_0}^{k_r} \ln p_{j_0}^{k_r} - p_{j_0}^{k_r} \ln a_{j_0 i_0} - p_{j_0}^{k_r} \ln p_{i_0}^{k_r} + a_{j_0 i_0} p_{i_0}^{k_r} - p_{j_0}^{k_r} < \omega + \delta.$$

De a bal oldalon lévő tagok közül  $-p_{j_0}^{k_r} \ln p_{i_0}^{k_r} \rightarrow +\infty$ , ha  $j \rightarrow +\infty$ , miközben a többi tag véges értékhez tart. Ellentmondásra jutottunk tehát azzal a feltevéssel, hogy a  $\hat{p}$  prioritásvektornak lehet 0 értékű eleme. Ezzel az állítást bizonyítottuk.  $\square$

A 6. Állításból és bizonyítása gondolatmenetéből következik, hogy a (K-T-1) feladatnak van megoldása, azt azonban nem zártuk ki, hogy egynél több megoldása is lenne. Bármely megoldására azonban fennáll a következő

**2. Következmény.** *A (K-T-1) feladat egy  $(p^0, \omega^0)$  megoldására fennáll, hogy*

$$\omega^0 = \min_{p \in P, p \in R_{++}^n} C(A(p^0), p) = C(A(p^0), p^0), \quad \omega^0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j \in \Gamma_i} \left( a_{ij} - \frac{p_i^0}{p_j^0} \right).$$

## 7 Numerikus vizsgálatok

Két klasszikus példát választottunk abból a célból, hogy az eredményeket más szerzők eredményeivel összevethessük. A teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix-szal kapcsolatos számításokat a „Távolság Philadelphiától” példával, a nem teljesen kitöltött esetben pedig a „A család házat vásárol” példával is illusztráljuk, mindkettő Saaty híres könyvéből [1980] származik.

### 7.1 „Távolság Philadelphiától”

Ebben a példában a döntéshozó hat várost hasonlított össze azoknak Philadelphiától való relatív távolságuk tekintetében. E városok (alternatívák) sorra: Kairó, Tokió, Chicago, San Francisco, London, Montreal. A mátrixnak elég lenne csak a jobb felső háromszögét feltüntetni, a bal alsó háromszög szükségképpen a reciprok értékeket tartalmazza:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 8 & 3 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & 9 & 3 & 3 & 9 \\ 1/8 & 1/9 & 1 & 1/6 & 1/5 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 6 & 1 & 1/3 & 6 \\ 1/3 & 1/3 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1/7 & 1/9 & 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1 \end{pmatrix}$$

Alább az első sorban a jelen dolgozatban leírt módszerrel kapott prioritásvektort, a második sorban pedig Saaty sajátérték módszerével kapott eredményt tüntettük fel. A harmadik sorban pedig az alternatívák sorrendjét, amely a két prioritásvektor esetében ugyanaz lett:

$$\begin{array}{cccccc} 0,24368 & 0,42483 & 0,03444 & 0,10662 & 0,14868 & 0,03176 \\ 0,26185 & 0,39749 & 0,03343 & 0,11639 & 0,16424 & 0,02660 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{array}$$

Ugyanezt a mátrixot nem teljesen kitöltötté alakítottuk Harker [1987b] példája nyomán. Kitöltöttek maradtak az (1,2), (1,3), (2,5), (3,6), (4,5) és (5,6) elemek, párjaik és a fődiagonális. Az így kapott prioritásvektort alább a dolgozatban leírt módszerrel az első, illetve Harker módszerével a második sorban tüntettük fel, a harmadikban pedig ismét az alternatívák sorrendjét, amely a két vektor esetében ismét ugyanaz lett:

$$\begin{array}{cccccc} 0,1859 & 0,5371 & 0,0261 & 0,0570 & 0,1704 & 0,0235 \\ 0,2339 & 0,4612 & 0,0382 & 0,0659 & 0,1734 & 0,0273 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{array}$$



Megjegyezzük, hogy  $C(A, p)$  optimális értéke 0,442755 a teljesen kitöltött mátrix esetében, és  $C(A(p), p)$  értéke 0,015089, amikor  $p = (0,1859; 0,5371; 0,0261; 0,0570; 0,1704; 0,0235)$ . Ezeket az értékeket az inkonzisztencia mértékének tekintjük, és amint vártuk, lényegesen kisebb a hiányos elemeket tartalmazó mátrix esetében.

## 7.2 „A család házat vásárol”

Az eredeti mátrix Saaty könyvében teljesen kitöltött, itt arra a nem teljesen kitöltött változatára vonatkozó számítási eredményeket mutatjuk be, amelyet Bozóki, Fülöp és Rónyai használt [2010]. Ezt a nem teljesen kitöltött mátrixot az alábbi táblázat tartalmazza, ha a kivastagított elemeket elhagyjuk. A mátrix sorai és oszlopai által képviselt szempontok sorra a következők voltak: méret, közlekedés, szomszédság, kor, a kert, korszerűség, állapot, ár.

A táblázatot kitöltöttük a számításunk eredményeként kapott  $p = (0,1439; 0,0695; 0,1063; 0,0318; 0,0242; 0,0525; 0,0657; 0,5061)$  prioritásvektor segítségével, a hiányzó elemeket pótoltuk tehát a kivastagított értékekkel.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 & 6 & 6 & 0,3333 & 0,25 \\ 0,2 & 1 & \mathbf{0,6539} & 5 & \mathbf{2,8754} & 3 & \mathbf{1,0588} & 0,1429 \\ 0,3333 & \mathbf{1,5293} & 1 & \mathbf{3,3451} & 3 & \mathbf{2,0264} & 6 & \mathbf{0,2101} \\ 0,1429 & 0,2 & \mathbf{0,2989} & 1 & \mathbf{1,3146} & 0,25 & \mathbf{0,4841} & 0,125 \\ 0,1667 & \mathbf{0,3478} & 0,3333 & \mathbf{0,7607} & 1 & \mathbf{0,4608} & 0,2 & \mathbf{0,0478} \\ 0,1667 & 0,3333 & \mathbf{0,4935} & 4 & \mathbf{2,1701} & 1 & \mathbf{0,7991} & 0,1667 \\ 3 & \mathbf{0,9445} & 0,1667 & \mathbf{2,0658} & 5 & \mathbf{1,2514} & 1 & \mathbf{0,1297} \\ 4 & 7 & \mathbf{4,7602} & 8 & \mathbf{20,9332} & 6 & \mathbf{7,7081} & 1 \end{pmatrix}$$

Az említett szerzők két módszer segítségével határozták meg a hiányzó elemek értékét. Az első a sajátérték módszer, a második az LLSM – a logaritmikus legkisebb négyzetek módszere – kiterjesztése nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixok esetére. A két eredmény – mind a prioritásvektor, mind a hiányzó elemek értékei tekintetében lényegesen eltér. Az általunk kapott eredmény az LLSM segítségével kapott eredményhez közelebb áll, a kapott prioritásvektorok nem azonosak természetesen, de az egyes alternatívák általuk meghatározott sorrendjei is inkább csak a kis prioritású alternatívák esetében cserélődnek fel. A tanulság, ha egyáltalán van, talán az lehet, hogy érdemes több módszert alkalmazni és a konkrét alkalmazás illetve a konkrét páros összehasonlítás mátrix ismeretében további elemzéseket végezni az egyes alternatívák fontosságát illetően.

## 8 Összefoglalás

A dolgozatban a döntéelméletben fontos szerepet játszó páros összehasonlítás mátrix prioritásvektorának meghatározására új megközelítést alkalmaztunk: az  $A$  páros összehasonlítás mátrix és a prioritásvektor által definiált  $B$  konzisztens mátrix közötti eltérést a Kullback-Leibler relatív entrópia-függvény

segítségével mértük. Ezen eltérés minimalizálása teljesen kitöltött mátrix esetében konvex programozási feladathoz vezetett, nem teljesen kitöltött mátrix esetében pedig egy fixpont problémához. A Kullback-Leibler eltérésfüggvényt minimalizáló prioritásvektor egyben azzal a tulajdonsággal is rendelkezik, hogy az  $A$  mátrix elemeinek összege és a  $B$  mátrix elemeinek összege közötti különbség éppen az eltérésfüggvény minimumának az  $n$ -szerese, ahol  $n$  a feladat mérete. Így az eltérésfüggvény minimumának értéke két szempontból is lehet alkalmas az  $A$  mátrix inkonzisztenciájának a mérésére. A feladat vizsgálata során alkalmazott bizonyítások egy része konstruktív volt, egyben eljárást adott a prioritásvektor kiszámítására. Nyitva maradt jó néhány kérdés, amelyek további elemzést igényelnek, pl. a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix esetében a 6. Állítás bizonyításában szereplő sorozat – és nem csak a részsorozat – konvergenciájának a vizsgálata. Érdekesnek látszik egy kísérlet a Burg entrópia mint eltérésfüggvény alkalmazására is.

## Irodalom

1. Bozóki S., Fülöp J. Poesz A. (2011). On pairwise comparison matrices that can be made consistent by the modification of a few elements, *Central European Journal of Operations Research* 19, 157–175.
2. Bozóki, S., Fülöp, J., Rónyai, L. (2010). On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices, *Mathematical and Computer Modelling* 52, 318–333.
3. Bregman, L. (1967). The relaxation method of finding the common points of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming, *USSR Comput. Math. and Math Phys.* 7, 200–217.
4. Choo, E. and Wedley, W. (2004). A Common framework for deriving preference values from pairwise comparison matrices, *Computers and Operations Research* 31, 893–908.
5. Csató László (2012). Ranking by pairwise comparisons for Swiss-system tournaments, *Central European Journal of Operations Research*, published first online: DOI 10.1007/s10100-012-0261-8.
6. Csiszár, I. (1967). Information type measures of differences of probability distributions and indirect observations, *Studia Sci. Math. Hungar.* 2, 299–318.
7. Farkas, A., Lancaster, P. and P. Rózsa (2003). Consistency adjustments for pairwise comparison matrices, *Numerical Linear Algebra with Applications*, 10, 689–700.
8. Fedrizzi, M., S. Giove(2007). Incomplete pairwise comparison and consistency optimization *European Journal of Operational Research* 183, 303–313
9. Gass, S. I. and T. Rapcsák (2004). Singular value decomposition in AHP, *European Journal of Operational Research* 154, 573–584.
10. Harker, P. T. (1987a). Derivatives of the Perron root of a positive reciprocal matrix: with application to the Analytic Hierarchy Process, *Applied Mathematical Computation* 22, 217–232.
11. Harker, P. T. (1987b). Incomplete pairwise comparisons in the analytic hierarchy process, *Mathematical Modelling*, 9, 837–848.

12. Ishizaka, A., A. Labib (2011). Review of the main developments in the Analytic Hierarchy Process, *Expert Systems with Applications* 38(11), 14336–14345.
13. Iusem, A. N., Svaiter, B. F. & Teboulle M. (1994). Entropy-like proximal methods in convex programming. *Math. of Operations Research* 19, 790–814.
14. Kéri Gerzson (2005). Kritériumok páros összehasonlítás mátrixokra, *Sigma* 36, 139–148.
15. Kiwiel, K. C. (1997). Proximal minimization methods with generalized Bregman functions. *SIAM J. Control and Optimization* 35, 1142–1168.
16. Krovák, J. (1987). Ranking alternatives – comparison of different methods based on binary comparison matrices, *European Journal of Operational Research* 32, 86–95.
17. Mangasarian, O. L. (1969). *Nonlinear programming*. McGraw-Hill Book Company, New York.
18. Saaty, T. (1980). *The Analytic Hierarchy Process*. New York: McGraw-Hill.
19. Saaty, T. (2003). Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary? *European Journal of Operational Research*, 145, 85–91.
20. Temesi József (2011). Pairwise comparison matrices and the error-free property of the decision maker, *Central European Journal of Operations Research*, Vol 19, No 2, 239–249.

APPLYING THE KULLBACK-LEIBLER RELATIVE ENTROPY FUNCTION  
FOR DETERMINING PRIORITIES FOR THE PAIRWISE COMPARISON  
MATRIX

In this paper we apply a new approach for determining a priority vector for the pairwise comparison matrix which plays an important role in Decision Theory. The divergence between the pairwise comparison matrix  $A$  and the consistent matrix  $B$  defined by the priority vector is measured with the help of the Kullback-Leibler relative entropy function. The minimization of this divergence leads to a convex program in case of a complete matrix, leads to a fixed-point problem in case of an incomplete matrix. The priority vector minimizing the divergence also has the property that the difference of the sums of elements of the matrix  $A$  and the matrix  $B$  is  $n$  times the minimum of the divergence function where  $n$  is the dimension of the problem. Thus we developed two reasons for considering the value of the minimum of the divergence as a measure of inconsistency of the matrix  $A$ .



MARTINGÁLMÉRTÉKEK ÉS A VÁRHATÓ  
DISZKONTÁLT JELENÉRTÉK SZABÁLY<sup>1</sup>

MEDVEGYEV PÉTER

*Budapesti Corvinus Egyetem*

A dolgozatban a legegyszerűbb kérdést feszegetjük: Hogyan kell az árakat meghatározni véletlen jövőbeli kifizetések esetén. A tárgyalás némiképpen absztrakt, de a funkcionálanalízis néhány közismert tételén kívül semmilyen más mélyebb matematikai területre nem kell hivatkozni. A dolgozat kérdése, hogy miként indokolható a várható jelenérték szabálya, vagyis hogy minden jövőbeli kifizetés jelen időpontban érvényes ára a jövőbeli kifizetés diszkontált várható értéke. A dologban az egyetlen csavar az, hogy a várható értékhez tartozó valószínűségi mértékről nem tudunk semmit. Csak annyit tudunk, hogy létezik a matematikai pénzügyek legtöbbször hivatkozott fogalma, a misztikus  $\mathbf{Q}$  mérték. A dolgozat megírásának legfontosabb indoka az volt, hogy megpróbáltam kiiktatni a megengedett portfólió fogalmát a származtatott termékek árazásának elméletéből. Miként közismert, a származtatott termékek árazásának elmélete a fedezés fogalmára épül. De milyen módon lehet fedezni? Diszkrét és véges időhorizonton a fedező portfóliónak egyedül önfinanszírozónak kell lenni. Az önfinanszírozás ilyenkor megadott definíciója igen egyszerű és meggyőző [7]. Jóval nagyobb problémát jelent azonban a folytonos időhorizont esete. Ha eltekintünk is attól, hogy lehetetlen a fedező portfólióban a súlyokat folytonosan változtatni két további probléma marad: Egyrészt az önfinanszírozás definíciójában szereplő késleltetés, nevezetesen a  $t$  és a  $t + 1$  időpontok szerepeltetése folytonos időhorizonton matematikailag nem értelmezhető, másrészt, és ez a fontosabb, a duplázási stratégia által definiált mindig létező arbitrázs lehetőség kiiktatása miatt be kell vezetni a megengedett portfóliókat, amely fogalomra a véges időpontot tartalmazó modellek esetén, miként említettem, nincsen szükség. Az első probléma megkerülését avval szokás indokolni, vagy inkább szőnyeg alá söpörni, hogy az Itô-kalkulus integrálfogalma valamiképpen tartalmazza az önfinanszírozásban szereplő időpontkésleltetést. Hogy ez mennyire helyes, vagy helytelen, nem érdemes feszegetni, ugyanis jóval nagyobb gondot jelent a megengedett portfóliók bevezetése. Az irodalomban két megközelítés létezik: Az elsőben feltesszük, hogy a megengedett portfólió alulról korlátos [1,2,3,6,16]. Ennek kétségtelen előnye, hogy viszonylag egyszerűen interpretálható, illetve emlékeztet a tényleges pénzügyi gyakorlatra: Adott valamilyen kezdőösszeg, amiből gazdálkodni kell, és amikor ez a kezdőlimit elfogy, akkor a portfóliót le kell zárni. Ugyanakkor evvel azt érezzük el, hogy az eladás, illetve a vétel nem lesz azonosan megengedett, vagyis a fedező portfóliók halmaza nem lesz lineáris tér, hanem kúp lesz, így a származtatott termékek árazásában kulcs

<sup>1</sup>Beérkezett: 2013. május 26. E-mail: medvegyev@uni-corvinus.hu.

szerepet játszó gondolat, miszerint a vevők és az eladók egyszerre vannak jelen, elvész, és a vételi és az eladási oldalon más és más gondolatmenetet kell az ár indoklásakor alkalmazni. A másik megoldás szerint pedig a megengedett portfóliók azok a portfóliók, amelyekre a portfólió értéke a kockázatmentes árrendszer esetén martingál lesz [7,14]. A kérdés jogos: Miért is? Nem éppen a martingálmértéket akarjuk bevezetni? Mi van akkor, ha több martingálmérték van? Akkor melyik szerint kell a fedező portfóliónak martingálnak lenni? Erre mintha nem lenne válasz. Kétségtelen, hogy a megengedett portfólió ezen definíciója helyreállítja a fedező portfóliók azon tulajdonságát, hogy a vevők és az eladók szempontjából a helyzetet azonosan kezeli, de a korrekció durván matematikai, technikai jellegű és véleményem szerint nagyon kilóg a nevezetes lóláb.

## 1 Bevezetés

A pénzügyi elmélet legfontosabb, sőt talán egyedüli eszköze a várható jelenérték szabály [4,5,9,13,17,18]. E rendkívül praktikus és látszólag igen egyszerű szabály szerint egy jövőben esedékes kifizetésnek két tényezőt kell figyelembe venni: Az időtávot, illetve a kifizetés bizonytalanságát. Az időhorizonttól való függést a diszkonttényezővel szokás figyelembe venni. A jövőben biztosan kifizetett összeg értéke a jelenben kevesebb, vagy legalábbis nem több, mint a jövőben kapott érték. Hogy mennyivel kevesebb, az a piaci szereplők idővel kapcsolatos preferenciáinak a függvénye. A jelen és a jövő közötti transzformációt megadó szorzószám közönséges árként viselkedik, és elvileg semmiben nem különbözik két egyszerre megvásárolható termék cserearányától. A kifizetés bizonytalansága hasonlóan működik. A módosító érték a bizonytalansággal kapcsolatos preferenciák által meghatározott kereslet és kínálat eredője. Talán az egyetlen eltérés az, hogy a bizonytalanság fogalma nehezebben ragadható meg.

A dolgozatban vizsgált kérdés a következő: Ha  $\pi(\xi)$  jelöli a  $\xi$  jövőbeli véletlen kifizetés jelen időpontban érvényes árát, akkor milyen tulajdonságokkal, illetve reprezentációval rendelkezik a  $\pi$  függvény? Az árazó függvény alapvető tulajdonsága a linearitás. Bár ez nem teljességgel nyilvánvaló, mégis a pénzügyi modellekben mindig evvel a hallgatólagos feltétellel élünk. További kézenfekvő tulajdonságnak tűnik a  $\pi$  nem negativitása, vagyis ha  $\xi \geq 0$ , akkor  $\pi(\xi) \geq 0$ . Azonban ez a két feltétel egyszerre minden további megkötés nélkül általában nem teljesülhet.

**1. Példa.** *A valószínűségi változók  $L^0$  térén általában nincs a triviálistól különböző nem negatív lineáris funkcionál.*

Jelölje  $L^0$  a  $[0, 1]$  szakaszon mérhető függvények Lebesgue-mérték szerinti ekvivalenciaosztályait. Az  $L^0$  térén a topológiát a sztochasztikus konvergenciával szokás definiálni, ugyanakkor vegyük észre, hogy a lineáris funkcionáloktól a folytonosságot nem követeljük meg. Megjegyezzük, hogy a  $K \stackrel{\circ}{=} \{\xi \geq 0\}$  függvények olyan kúpot alkotnak, amely zárt a sztochasztikus konvergenciában, de a kúpnak a sztochasztikus konvergencia által generált

topológiában nincsen belső pontja, így a végtelen dimenziós szeparációs tétel, a Hahn–Banach-tétel, nem alkalmazható. Tegyük fel, hogy egy alkalmas  $\Lambda$  lineáris funkcionálra  $\Lambda(\xi) \geq 0$ , ha  $\xi \geq 0$ , és egy alkalmas  $\xi_0 \geq 0$  függvényre  $\alpha \doteq \Lambda(\xi_0) > 0$ . Nyilvánvalóan a  $\Lambda$  monoton, vagyis ha  $\xi \leq \eta$ , akkor  $\Lambda(\xi) \leq \Lambda(\eta)$ , ugyanis  $\Lambda(\eta) - \Lambda(\xi) = \Lambda(\eta - \xi) \geq 0$ . Ekkor a  $\xi_0 \chi_{[0, 1/2]}$  és a  $\xi_0 \chi_{(1/2, 1]}$  függvények összege  $\xi_0$ , amiből a kettő közül az egyikre a  $\Lambda$  értéke  $\geq \alpha/2$ . Jelölje  $\xi_1$  az így kapott függvény négyszeresét. Világos, hogy  $\xi_1 \geq 0$ , és  $\Lambda(\xi_1) \geq 2\alpha$ . Felezzük meg az intervallumot és ismételjük meg az eljárást a  $\xi_1$ -re, stb. Az így kapott  $(\xi_n)$  sorozatra az  $\eta \doteq \sup_n \xi_n \in L^0$  függvény véges, ugyanis legfeljebb egyetlen olyan pont van, ahol a  $(\xi_n)$  sorozat tagjai egy indextől már nem nullák. Mivel  $\xi_n \leq \eta$ , ezért a  $\Lambda$  monotonitása miatt  $2^n \alpha \leq \Lambda(\xi_n) \leq \Lambda(\eta)$ , amiből  $\Lambda(\eta) = \infty$ , ami lehetetlen, ugyanis a lineáris funkcionálok értéke definíció szerint véges.  $\square$

**2. Példa.** *A valószínűségi változók  $L^0$  terén nincsen folytonos lineáris funkcionál.*

Az előző példa egyszerű módosításával azonnal látható, hogy tetszőleges olyan  $\xi_0$  esetén, amelyre  $\Lambda(\xi_0) \doteq \alpha > 0$ ,  $\xi_n \xrightarrow{p} 0$ , és  $\Lambda(\xi_n) \rightarrow \infty$ , amiből a  $\Lambda$  nem lehet folytonos a sztochasztikus konvergenciában, vagyis az  $L^0$  téren nem adható meg  $\Lambda \neq 0$  a sztochasztikus konvergenciában folytonos lineáris funkcionál.  $\square$

Az  $L^0$  tér a sztochasztikus konvergenciával egy teljes metrizálható lineáris tér. A metrikát az  $\|\xi\|_0 \doteq \mathbf{E}(|\xi| \wedge 1)$  képlettel definiálhatjuk. Nyilvánvalóan  $\|\xi + \eta\|_0 \leq \|\xi\|_0 + \|\eta\|_0$ . A két példát a következő egyszerű észrevétellel kapcsolhatjuk össze:

**3. Állítás.** *Legyen  $L \subseteq L^0$  egy lineáris tér, és tegyük fel, hogy ha  $\xi \in L$ , akkor  $|\xi| \in L$ . Tegyük fel, hogy az  $L$ -en adott egy  $\|\xi\|$  függvény, amelyre*

1.  $\|\xi\| \geq 0$  és  $\|\xi\| = 0$  pontosan akkor, ha  $\xi = 0$ .
2.  $\|\xi\| = \|-\xi\|$ .
3.  $\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$ .

*Ha a  $d(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|$  távolságra nézve az  $L$  teljes metrikus tér, akkor az  $L$  téren értelmezett minden nem negatív lineáris funkcionál folytonos.*

**Bizonyítás.** Legyen  $\Lambda$  az  $L$  téren értelmezett nem negatív lineáris funkcionál, és legyen  $(\xi_n)$  egy nullához konvergáló sorozat. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy  $\|\xi_n\| \rightarrow 0$ . A linearitás és a nem negativitás miatt  $|\Lambda(\xi_n)| \leq \Lambda(|\xi_n|)$ . Elegendő tehát belátni, hogy  $\Lambda(|\xi_n|) \rightarrow 0$ . Feltehető tehát, hogy a  $\xi_n$  nem negatív. Elegendő belátni, hogy minden  $(\xi_n)$  sorozatnak van egy  $(\xi_{n_k})$  részsorozata, amelyre  $\Lambda(\xi_{n_k}) \rightarrow 0$ . Ha  $\|\xi_{n_k}\| \leq 2^{-k}$ , akkor a  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{n_k}$  sor szeletei Cauchy-sorozatot alkotnak, ugyanis ha  $M > N$ , akkor

$$\left\| \sum_{k=1}^M \xi_{n_k} - \sum_{k=1}^N \xi_{n_k} \right\| = \left\| \sum_{k=N+1}^M \xi_{n_k} \right\| \leq \sum_{k=N+1}^M \|\xi_{n_k}\| = \sum_{k=N+1}^M 2^{-k} \rightarrow 0.$$

Az  $L$  feltételezett teljessége miatt a sor konvergens. Legyen a sor összege  $\xi_\infty$ . Mivel a  $\Lambda$  nem negatív és  $\xi_{n_k} \geq 0$ , ezért

$$\sum_{k=1}^N \Lambda(\xi_{n_k}) \leq \Lambda(\xi_\infty) < \infty .$$

Mivel ez minden  $N$ -re igaz, ezért a  $\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda(\xi_{n_k})$  sor is konvergens, következésképpen  $\Lambda(\xi_{n_k}) \rightarrow 0$ .  $\square$

Az idáig tett megfontolásokból evidens, hogy ahhoz, hogy egy értelmes pénzügyi elméletet tudjunk felépíteni, meg kell követelni, hogy a  $\pi$  értelmezési tartománya elég szűk legyen. Legegyszerűbben akkor járunk el, ha feltesszük, hogy a  $\pi$  árazó függvény  $L$  értelmezési tartománya egy alkalmas  $1 \leq p < \infty$  kitevővel egy  $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  tér<sup>2</sup>. Egy megjegyzés erejéig érdemes utalni azonban arra, hogy bár a feltétel igen egyszerű, mégsem problémamentes, mert a  $L^p$  tér nem invariáns a matematikai pénzügyekben alapvető szerepet játszó mértékcsereére. Ugyanakkor a két kézenfekvő alternatíva, az  $L^0$  és az  $L^\infty$  terek, bár invariánsak az ekvivalens mértékcsereére, egyikük sem megfelelő, ugyanis miként láttuk az  $L^0$  térben nincsenek folytonos lineáris funkcionálok, az  $L^\infty$  térben pedig bizonyos értelemben túl sok is van belőlük, mivel miként ismert az  $L^\infty$  terekben vannak olyan folytonos lineáris funkcionálok is, amelyek nem mértékkel reprezentálhatóak. További probléma forrása, hogy az  $L = L^p$  feltétel hallgatólagosan megköveteli egy  $\mathbf{P}$  valószínűségi mérték létét. Ennek szokásos interpretációja, hogy adott egy statisztikai valószínűségi mező, és feltételezzük, hogy az árfolyamok alakulása a klasszikus valószínűség-számítási modelleknek megfelelően alakul, ami azonban csak részben tekinthető helyes feltételnek, ugyanis a pénzügyek elvileg, vagy inkább remélhetőleg nem egy szerencsejáték<sup>3</sup>.

Az  $L^p$  terekben minden folytonos lineáris funkcionál integrálként reprezentálható, így az  $L = L^p$  feltétel legfőbb oka/következménye az alábbi egyszerű észrevétel:

**4. Lemma.** *Létezik, mégpedig egyetlen olyan, a  $\mathbf{P}$ -mértékre abszolút folytonos  $\mu$  mérték, amelyre  $\pi(\xi) = \int_{\Omega} \xi d\mu$ .*

Mivel a  $\pi$  nem negatív, ezért a  $\mu$  valódi mérték. Amikor a  $\pi$  értelmezési tartományáról, az  $L$ -ről megköveteltük, hogy lineáris teret alkosson, akkor hallgatólagosan megköveteltük, hogy az  $L$  elemei már eleve diszkontálva vannak, ugyanis ellenkező esetben nem lehetne őket pénzügyileg értelmes módon összeadni. Egy további triviális megkötés/feltétel, hogy elvárjuk, hogy az 1 konstans kifizetés eleme legyen a lehetséges kifizetések  $L$  alterének és

$$1 = \pi(1) = \int_{\Omega} 1 d\mu ,$$

<sup>2</sup>Általában  $p = 2$ , de időnként a  $p = 1$  esettel is találkozhatunk.

<sup>3</sup>Ezzel kizárjuk a bizonytalanságot a pénzügyi modellezésből és kockázat létezését tesszük hallgatólagosan fel. [17]



vagyis a  $\mu$  valószínűségi mérték. A matematikai pénzügyek szokásos jelölését használva a  $\mu$  reprezentáló mértéket  $\mathbf{Q}$ -val fogjuk jelölni. Érdekes nyomatékosan hangsúlyozni, hogy az  $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  és az  $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{Q})$  terek nem azonosak. A  $\pi$  értelmezési tartománya továbbra is az  $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  tér. Hangsúlyozni kell, hogy nem állítjuk, hogy a  $\mathbf{P}$  és a  $\mathbf{Q}$  ekvivalensek, vagyis hogy a  $\mathbf{P}$  és a  $\mathbf{Q}$  alatti nullmértékű halmazok egybeesnek. Ennek megköveteléséhez szükségünk lenne arra, hogy a  $\pi$  szigorúan monoton növekedő legyen, vagyis hogy minden  $\mathbf{P}$  szerint nem nulla, nem negatív változó ára pozitív legyen. Ezt azonban nem követeljük meg. Mivel a  $\pi$  árfüggvényt reprezentáló mértékek a  $\mathbf{P}$ -re nézve abszolút folytonosak, ezt hallgatólagosan, minden további említés nélkül, mindig meg fogjuk követelni.

A megadott matematikai és közgazdasági megkötések együttesét a következő állításban foglalhatjuk össze:

**5. Tétel** (Várható jelenérték szabály). *A megadott feltételek esetén érvényes a várható jelenérték szabálya, vagyis tetszőleges  $H$  jövőbeli kifizetés jelenbeli  $\pi(H)$  árára érvényes a*

$$\pi(H) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\bar{H})$$

reprezentáció, ahol  $\bar{H}$  a  $H$  diszkontált értéke és  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$  a  $\mathbf{Q}$  valószínűségi mérték szerint vett várható érték operátora.

Érdekes felhívni a figyelmet arra, hogy a tétel meglehetősen semmitmondó, ugyanis nem tartalmaz semmilyen útmutatást arra, hogy hogyan kell a  $\mathbf{Q}$  mértéket egy modellben felírni, vagy a modell paraméterei alapján meghatározni.

## 2 Martingálok és a várható jelenérték szabály

A várható jelenérték szabálynak van egy távolról sem triviális következménye. Jelölje  $\mathbf{Q}$  azt a mértéket, amelyet a várható jelenérték szabályban használni kell. A várható jelenérték szabály pontosan azt állítja, hogy ilyen  $\mathbf{Q}$  mérték létezik. Legyen  $S$  valamilyen kereskedett termék<sup>4</sup> árfolyamát megadó sztochasztikus folyamat. Kézenfekvő kérdés, hogy az  $S$  milyen típusú folyamatot alkot a  $\mathbf{Q}$  mérték alatt?

Természetesen különböző  $t$  időpontokban az  $S$  folyamat értéke különböző termék. Kézenfekvő megkövetelni, hogy nem csak fix időpontokban számolhatjuk ki az  $S$  értékét. Ha a  $\tau$  időpont véletlen, akkor jelölje  $S(\tau)$  azt a változót, amely éppen az  $S$  értékét adja meg a  $\tau$  (véletlen) időpontban. Ha  $\tau$  egy véges értékeket felvevő megállási idő, akkor az  $S(\tau)$  természetesen szintén egy önálló pénzügyi termék. Az  $S$  termék kereskedett, ami definíció szerint azt jelenti, hogy a  $t = 0$  időpontban bármely fix, vagy az aktuális kimeneteltől függő  $\tau$  időpontban esedékes értéke eladható, vagy megvehető. Jelölje  $R$  a diszkontálásra használt folyamatot és jelölje  $\bar{S} \stackrel{\circ}{=} S/R$  a diszkontált folyamatot. Tekintsünk két időpontot: legyenek ezek  $t_1$  és  $t_2$ . Az  $S(t_1)$  és

<sup>4</sup>Hogy mit tekintünk kereskedett terméknek, az a konkrét felépítéstől függ. Később a fogalom pontosabban definiálva lesz, ezen a ponton a fogalom még szándékosan definiálatlan.

az  $S(t_2)$  két különböző határidős termék, amelyek  $\pi$  ára a várható jelenérték szabály miatt a  $t = 0$  időpontban

$$\pi(S(t_1)) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\bar{S}(t_1)), \quad \pi(S(t_2)) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\bar{S}(t_2)) ,$$

ahol a  $\mathbf{Q}$  felső index a várható érték során használt mértékre utal. Mi a kapcsolat a két ár között? Megmutatjuk, hogy  $\pi(S(t_1)) = \pi(S(t_2))$  [9]. Ehhez elegendő megmutatni, hogy a közös érték éppen a kereskedett termék  $S_0$ -lal jelölt  $t = 0$  időpontban érvényes aktuális ára. Ennek oka nagyon egyszerű. A pénzügyi termékek, szemben a hagyományos termékekkel, költségmentesen tárolhatóak, ugyanis az időből származó értékvesztést már a diszkontáláskor figyelembe vettük. A  $t_k$  időpontban esedékes határidős kifizetéshez az ingyenes tárolás feltétele miatt két eltérő módon is hozzájuthatunk. Vagy a  $t = 0$  időpontban  $S_0$ -ért megvesszük a terméket és kivárjuk a  $t_k$  időpontot, vagy a  $t = 0$  időpontban  $\pi(S(t_k))$ -ért megvesszük a  $t_k$  időpontban való „hozzáférés” jogát. Mivel mind a két esetben a  $t_k$  időpontban azonos értékünk lesz, ezért a kifizetett vételáraknak a  $t = 0$  időpontban is meg kell egyezniük. Például ha  $S_0 < \pi(S(t_k))$ , akkor a határidős terméket eladva, majd a kapott összegből a terméket magát megvéve, majd költségmentesen tartva a  $t_k$  időpontig biztos profithoz juthatunk, annak ellenére, hogy a portfólió értéke a  $t_k$  időpontban nulla. Mivel ezt bármilyen nagyságrendben megtehetjük, végtelen profitra tehetünk szert, amit definíció szerint kizárunk<sup>5</sup>. Némiképpen másképpen fogalmazva, ha feltesszük, hogy a bármely jövőben esedékes nulla kifizetés jelenbeli ára is nulla, valamint megköveteljük, hogy a  $\pi$  árazó függvény lineáris legyen, akkor a különböző időpontokra vonatkozó határidős termékek jelenben esedékes ára meg kell hogy egyezzen. Következésképpen,

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\bar{S}(t_1)) = \pi(S(t_1)) = S_0 = \pi(S(t_2)) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\bar{S}(t_2)) .$$

Mivel a  $t_1, t_2$  időpontok lehetnek megállási idők is, ezért a megállási opciókról szóló tétel alapján igaz a következő állítás:

**6. Tétel** (Kereskedett termékek martingálmértéke). *Ha az  $S$  termék kereskedett, és a  $\mathbf{Q}$  mérték esetén érvényes a várható jelenérték szabály, akkor a diszkontált árfolyamokból álló  $\bar{S}$  folyamat martingál a  $\mathbf{Q}$  mérték alatt.*

Vegyük észre, hogy a bizonyításhoz a várható jelenérték szabályon kívül csak azt használtuk, hogy egy kereskedett termék bármely jövőbeli időpontra vonatkozó határidős kifizetésének jelenlegi ára független attól, hogy melyik jövőbeli időpontról van szó. Ennek oka az, hogy a modell feltételezése szerint minden pénzügyi termék költségmentesen tárolható, illetve, ugyancsak definíció szerint, a biztos végtelen profitot kizárjuk. Érdemes felfigyelni azonban arra is, hogy hallgatólagosan feltettük, hogy a piac igen fejlett: Tetszőleges

<sup>5</sup>Vegyük észre, hogy a gondolatmenet a matematikai pénzügyekben központi szerepet játszó nincsen arbitrázs feltétel egy igen enyhe verziója. Vegyük azt is észre, hogy a gondolatmenetben kulcs szerepe volt annak, hogy mind a két irányban alkalmazhattuk. Ugyanakkor, mivel expliciten nem hivatkoztunk sem a lehetséges portfóliók halmazára, sem az arbitrázs lehetetlenségére, a korábban említett technikai nehézségeket kizártuk, mivel az arbitrázs lehetőségét csak a legegyszerűbb esetben követeltük meg.

megállási idő esetén a megállási időben lehívható határidős terméknek van piaca, következésképpen van ára.

**7. Definíció.** A  $\mathbf{Q}$  mértéket az  $S$  kereskedett termék martingálmértékének mondjuk, ha az  $\bar{S}$  diszkontált folyamat martingál a  $\mathbf{Q}$  alatt.

A martingálmértékekkel kapcsolatos legfontosabb kérdés továbbra is a következő: Ha adott az  $\bar{S}$  folyamat, miként, és milyen  $\xi$  diszkontált kifizetésekre határozhatjuk meg a  $\pi$  függvényt? Természetesen ha egyetlen olyan  $\mathbf{Q}$  mérték van, amely esetén az  $\bar{S}$  martingál és a  $\xi$  kifizetésre érvényes a diszkontált jelenérték szabály, akkor a  $\pi$  függvény értelemszerűen a  $\pi(\xi) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\bar{\xi})$  alakot ölti. Ha azonban több martingálmérték is van, akkor nyilvánvalóan csak az

$$\inf_{\mathbf{Q} \in \mathcal{M}(\bar{S})} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\bar{\xi}) \leq \pi(\xi) \leq \sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{M}(\bar{S})} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\bar{\xi})$$

egyenlőtlenség írható fel, ahol az  $\mathcal{M}(\bar{S})$  az  $\bar{S}$  diszkontált árfolyam martingálmértékeinek halmaza, ahol értelemszerűen martingálmértéken az olyan mértékeket értjük, amely alatt az  $\bar{S}$  martingál. Vagyis a diszkontált jelenérték szabállyal kapcsolatos további fontos kérdés a következő: Mikor létezik egyetlen martingálmérték? Az ezt biztosító feltételekre mint teljességi feltétel szokás hivatkozni. Hangsúlyozni kell, hogy a teljesség problémája abból ered, hogy a  $\pi$  értelmezési tartományát megadó  $L = L^p$  térnek az  $\bar{S}(\tau)$  alakú megállított változók által generált lineáris tér esetlegesen csak egy valódi altere, így bár a  $\pi$  függvényt reprezentáló  $\mathbf{Q}$  ezen az alteren adott, de több olyan mérték is létezhet, amely leszűkítése erre az alterre a  $\mathbf{Q}$ , így az alterre való leszűkítésből a  $\pi$  nem rekonstruálható.

**8. Példa.** A Black–Scholes modell martingálmértéke.

A matematikai pénzügyek kedvenc modellje az úgynevezett Black–Scholes modell. Erről elegendő annyit megjegyezni, hogy a modellben két eszköz van, a diszkontálásra használt kötvény, amely árfolyamának alakulását a  $B(t) = B_0 \exp(rt)$  folyamat írja le, illetve az  $S(t) = S_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma w(t))$  árfolyammal rendelkező részvény. A modellben az  $r, \mu, \sigma, B_0$  és az  $S_0$  előre adott konstansok és a részvény árfolyamát megadó folyamat képletében a  $w$  egy Wiener-folyamatot jelöl. A diszkontált folyamat értelemszerűen

$$\bar{S}(t) = \frac{S(t)}{B(t)} = \frac{S_0}{B_0} \exp\left(\left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma w(t)\right).$$

Mivel a képletben szerepel egy Wiener-folyamat, ezért létezik az  $S(t)$  alakulását megadó valamilyen  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  valószínűségi mező. Az  $\bar{S}(t)$  eloszlása lognormális, és a lognormális valószínűségi változók várható értékére vonatkozó képlet alapján

$$\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\bar{S}(t)) = \frac{S_0}{B_0} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\exp(N((\mu - r - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma\sqrt{t}))) = \frac{S_0}{B_0} \exp((\mu - r)t).$$

Ha  $\mu \neq r$ , akkor a diszkontált részvényárfolyam várható értéke nem konstans, így az  $\bar{S}$  nem martingál, következésképpen a  $w$  Wiener-folyamat mögötti

valószínűségi mezőhöz tartozó  $\mathbf{P}$  valószínűségi mérték a  $\pi$  ár funkcionál szempontjából nem releváns.

A Black–Scholes modellel kapcsolatos legfontosabb matematikai kérdés a következő: Létezik-e, mégpedig egyetlen olyan  $\mathbf{Q}$  mérték, amely esetén az  $\bar{S}$  martingál? A létezéssel kapcsolatos kérdésre a választ az úgynevezett Girszanov-formula [7,12] tartalmazza, de a legfontosabb gondolatok a Girszanov-formula nélkül is megérthetőek: Egyrészt megmutatható, hogy nincs olyan  $\mathbf{Q}$  mérték, amely alatt a diszkontált árfolyam a teljes  $[0, \infty)$  időtartományon martingál lesz. Éppen ezért a Black–Scholes modellben fel kell tenni, hogy az időhorizont egy véges  $[0, T]$  időintervallum. Vezessük be a

$$\theta \stackrel{\circ}{=} \frac{\mu - r}{\sigma}$$

jelölést és legyen

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \stackrel{\circ}{=} \exp\left(-\theta w(T) - \frac{1}{2}\theta^2 T\right).$$

Ismételten a lognormális eloszlás várható értékének képlete alapján

$$\mathbf{E}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2 T + \frac{1}{2}\theta^2 T\right) = 1,$$

vagyis a  $\mathbf{Q}$  szintén valószínűségi mérték. Mivel a  $w$  független növekményű, ezért

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &\stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ &= \exp\left(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right) \mathbf{E}\left(\exp(-\theta(w(T) - w(t))) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ &= \exp\left(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right) \mathbf{E}\left(\exp(-\theta(w(T) - w(t)))\right) = \\ &= \exp\left(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right) \exp\left(\frac{1}{2}\theta^2(T - t)\right) = \\ &= \exp\left(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right), \end{aligned}$$

vagyis a

$$\Lambda(t) \stackrel{\circ}{=} \exp\left(-\theta w(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)$$

folyamat martingál. Ez másképpen a feltételes várható érték definíciója alapján azt jelenti, hogy az  $\mathcal{F}_t$   $\sigma$ -algebrán a  $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P}$  Radon–Nikodym derivált éppen a  $\Lambda(t)$ , ugyanis ha  $F \in \mathcal{F}_t$ , akkor

$$\mathbf{Q}(F) = \int_F \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} d\mathbf{P} = \int_F \mathbf{E}\left(\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \mid \mathcal{F}_t\right) d\mathbf{P} = \int_F \Lambda(t) d\mathbf{P}.$$

Ha  $t \leq T$ , akkor minden  $F \in \mathcal{F}_t$  esetén

$$\begin{aligned} \int_F \bar{S}(T) d\mathbf{Q} &= \int_F \bar{S}(T) \Lambda(T) d\mathbf{P} = \int_F \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\bar{S}(T) \Lambda(T) \mid \mathcal{F}_t) d\mathbf{P} = \\ &= \int_F \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\bar{S}(T) \Lambda(T) \mid \mathcal{F}_t) \Lambda^{-1}(t) d\mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Ez a reláció éppen a Bayes-formula speciális esete. Ebből következően

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\bar{S}(T) \mid \mathcal{F}_t) &= \mathbf{E}^{\mathbf{P}}(\bar{S}(T)\Lambda(T) \mid \mathcal{F}_t)\Lambda^{-1}(t) = \\ &= \bar{S}(t) \frac{\Lambda(t)}{\Lambda(t)} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\frac{\bar{S}(T)}{\bar{S}(t)} \frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)} \mid \mathcal{F}_t\right) = \\ &= \bar{S}(t) \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\frac{\bar{S}(T)}{\bar{S}(t)} \frac{\Lambda(T)}{\Lambda(t)} \mid \mathcal{F}_t\right) = \bar{S}(t), \end{aligned}$$

ugyanis az  $\bar{S}$  és a  $\Lambda$  exponenciális alapjából evidens, hogy a feltételes várható érték mögötti kifejezések a  $w(T) - w(t)$  függvényei, és mivel a  $w$  független növekményű, ezért a feltételes várható kiszámolásakor a feltétel elhagyható, és ha  $s \stackrel{\circ}{=} T - t$ , akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}\left(\exp\left(\left(\mu - r - \frac{\sigma^2 + \theta^2}{2}\right)s + (\sigma - \theta)w(s)\right)\right) &= \\ = \exp\left(\left(\mu - r - \frac{\sigma^2 + \theta^2}{2}\right)s + \frac{1}{2}(\sigma - \theta)^2s\right) &= \\ = \exp\left(\left(\mu - r - \frac{\sigma^2 + \theta^2}{2}\right)s + \frac{1}{2}(\sigma - \theta)^2s\right) &= 1. \end{aligned}$$

Ebből következően az  $\bar{S}$  martingál a  $\mathbf{Q}$  alatt. □

Miként megjegyeztük, a  $\mathbf{Q}$  martingálmérték megtalálása csak fél siker, mert nem tudjuk, hogy a martingálmérték egyértelmű-e vagy sem. Általában a matematikai pénzügyek irodalmában a martingálmérték létezése matematikailag egyszerűbb és kézenfekvőbb feltételnek tűnik. Sokkal kevesebbet tudunk a teljességről, vagyis arról, hogy mikor lesz a martingálmérték egyértelmű. Tegyük fel, hogy sikerült találnunk egy martingálmértéket. Milyen termékeket tudunk segítségével beárazni? Tegyük fel, hogy az  $\bar{S}_0$  érték ismert. Ekkor a martingálmérték tulajdonság miatt az  $\bar{S}(\tau)$  változók értéke is ismert és miként megjegyeztük  $\pi(\bar{S}(\tau)) = \pi(\bar{S}(0)) = \bar{S}(0)$ . Mivel a  $\pi$  lineáris funkcionál, ezért az összes  $\xi \stackrel{\circ}{=} c_0 + \sum_k c_k (\bar{S}(\tau_k) - \bar{S}(\tau_{k-1}))$  alakú kifejezés ára is ismert, nevezetesen a kifejezés ára éppen  $\pi(\xi) = c_0$ , ugyanis a második összeg ára a  $\pi$  linearitása miatt nulla. Éppen a martingál tulajdonság miatt, ha  $\tau_k > \tau_{k-1}$  és a  $c_k$  nem konstans, hanem egy  $\theta_k \mathcal{F}_{\tau_{k-1}}$  mérhető, korlátos valószínűségi változó, akkor a martingál tulajdonság miatt, tetszőleges martingálmérték esetén

$$\begin{aligned} \pi(\theta_k(\bar{S}(\tau_k) - \bar{S}(\tau_{k-1}))) &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\theta_k(\bar{S}(\tau_k) - \bar{S}(\tau_{k-1}))) = \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\theta_k(\bar{S}(\tau_k) - \bar{S}(\tau_{k-1}))) \mid \mathcal{F}_{\tau_{k-1}})) = \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\theta_k \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}((\bar{S}(\tau_k) - \bar{S}(\tau_{k-1}))) \mid \mathcal{F}_{\tau_{k-1}})) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\theta_k \cdot 0) = 0. \end{aligned}$$

A sztochasztikus analízis irodalmában az ilyen alakú kifejezéseket egyszerű integrandusoknak szokás mondani. Ebből következően az egyszerű integrandusként előálló valószínűségi változók mindegyikére a  $\pi$  árfüggvény értéke nulla. Mivel a  $\pi$  folytonos az  $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  tér normájában, ezért az egyszerű

integrandusok összegeként előálló valószínűségi változók  $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  normában vett határértékeinek ára is nulla. Az egyszerű integrandusok összegeként előálló valószínűségi változók sztochasztikus konvergenciában vett határértékeit szokás sztochasztikus integrálnak mondani. Mivel a Csebisev-egyenlőtlenség miatt az  $L^p$ -konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, ezért azt mondhatjuk, hogy az  $\int_0^T \theta(s) d\bar{S}$  alakú sztochasztikus integrálként előálló valószínűségi változók egy részhalmazának  $\pi$  ára nulla. A sztochasztikus analízisben [6,12] részletesen tárgyalásra kerül, hogy milyen alakú folyamatok esetén biztosítható a sztochasztikus integrál létezése, ugyanakkor jóval kevesebbet tudunk arról, hogy milyen további megkötésekkel biztosítható, hogy ne csak a sztochasztikus konvergenciában, hanem erősebb értelemben is, vagyis például az  $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  térben is konvergáljon az integrál. Az ezt biztosító alkalmas feltételek esetén érvényes a következő tétel:

**9. Tétel** (Derivatív árazás alaptétele). *Ha valamely a  $T$  időszakban esedékes  $H_T$  kifizetés  $\bar{H}_T$  diszkontált értéke előáll*

$$\bar{H}_T = \lambda + \int_0^T \theta(s) d\bar{S} \quad (1)$$

*alakban, ahol az integrál a  $\pi$  folytonosságát biztosító  $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  térben konvergens, akkor*

$$\pi(H_T) = \pi(\lambda \cdot 1) + \pi\left(\int_0^T \theta(s) d\bar{S}\right) = \lambda\pi(1) + 0 = \lambda.$$

A tételben szereplő (1) összefüggés szokásos közgazdasági megfogalmazása az, hogy a  $H_T$  kifizetést sikerült önfinanszírozó módon lefedezni. A tétel szerint az önfinanszírozó módon fedezett pénzügyi tranzakciók jelen pillanatban érvényes ára éppen az induló befektetés költségével azonos. A matematikai pénzügyek nem elhanyagolható technikai problémái részben abból erednek, hogy miközben a sztochasztikus integrálás természetes matematikai élettere az  $L^0$  tér, addig a  $\pi$  árazó függvények természetes élettere az  $L^p$  tér. Az ebből eredő konfliktus számos nehéz órát okozott és valószínűleg fog is még okozni a területen tevékenykedő kutatóknak, és úgy tűnik, matematikailag nem igen, vagy csak nagyon nehezen járható [1,2,3].

További kérdés lehet, hogy miként lehet a  $\lambda$  értéket kifejezni a  $\bar{H}_T$  és a  $\mathbf{Q}$  segítségével, ahol  $\mathbf{Q}$  az  $\bar{S}$  egy tetszőleges martingálmértéke. Ehhez elegendő lenne azt biztosítani, hogy a sztochasztikus integrál egy tetszőleges  $\mathbf{Q}$  martingálmérték szerinti várható értéke nulla legyen, vagyis hogy az integrál martingál legyen a  $\mathbf{Q}$  alatt. Ez a sztochasztikus integrálás másik nehéz technikai jellegű kérdésével függ össze, amely szerint egy martingál szerint vett sztochasztikus integrál általában csak lokális martingál és nem valódi martingál. Ha azonban a martingálmérték egyértelmű, és a sztochasztikus integrál az  $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  térben is konvergens, akkor ez a probléma nem lép fel, ugyanis ilyenkor

$$\pi\left(\int_0^T \theta(s) d\bar{S}\right) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\int_0^T \theta(s) d\bar{S}\right) = 0,$$

következésképpen a nevezetes  $\pi(H_T) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\overline{H}_T)$  árazó képlet, vagyis a diszkontált jelenérték szabály, ilyenkor teljesül. Ha azonban a martingálmérték nem egyértelmű, akkor mivel nincsen semmilyen garancia arra, hogy a sztochasztikus integrál a  $\mathbf{Q}$  alatt nem valódi lokális martingál, az integrál várható értéke a  $\mathbf{Q}$  alatt nem feltétlenül lesz nulla.

De ezzel nincsen vége a technikai jellegű problémáknak. Miként dönthető el egy a  $T$  időszakban esedékes  $\overline{H}_T$  kifizetésről hogy előállítható-e megadott (1) alakban? Elegendő-e ehhez az, hogy a  $H_T$  mérhető legyen a  $S$  folyamat által generált filtrációra nézve? Az ezt garantáló tételeket szokás integrál-reprezentációs tételnek mondani. Általában viszonylag enyhe feltételek mellett biztosítható, hogy valamely  $\overline{H}_T$  rendelkezzen a kívánt (1) előállítással. Ugyanakkor a sztochasztikus integrálok konvergenciája csak sztochasztikus konvergenciában teljesül, és mikor biztosítható az integrálok  $L^p$  normában való konvergenciája? Erre általában nehéz bámit mondani.

**10. Példa.** *Európai call opciók árazása a Black–Scholes modellben.*

A matematikai pénzügyek felvirágozása nagyrészt a következő problémából származik: Legyen adva egy  $S$  részvény. Mi lesz a  $T$  időpontban esedékes  $H_T \stackrel{\circ}{=} (S(T) - K)^+$  kifizetés  $t = 0$  időpontban érvényes ára. Tegyük fel, hogy az  $S$  alakulását a Black–Scholes modell írja le, és tegyük fel, hogy létezik a  $\pi$  árazó függvény. Természetesen meg kell mondani, hogy mi lesz a  $\pi$  árazó függvény  $L$  értelmezési tartománya. A Black–Scholes modellben hallgatólagosan azt tételezzük fel, hogy az  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  mező éppen az  $S$  definíciójában szereplő  $w$  Wiener-folyamat által generált filtráció a  $T$  időpontig bezárólag, vagyis  $\mathcal{A} = \sigma\{w(t) \mid t \leq T\}$ , és például  $L = L^2$ , vagyis az  $L$  a szórással rendelkező változókból áll. A négyzetesen integrálhatóság feltételének nincs jelentősége, de a mérhetőség megkötése alapvető. Megmutatjuk, hogy ezen az elegendően szűk  $(\Omega, \mathcal{A})$  mérhető téren a martingálmérték egyértelmű. Ebből következőleg, mivel a  $H_T$  mérhető, és többek között van szórása, ezért  $\pi(H_T) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\overline{H}_T)$ . A martingálmérték egyértelműségét a már említett integrál-reprezentációs tétellel lehet megmutatni. E szerint a tétel szerint, ha  $\xi$  négyzetesen integrálható, és mérhető a  $\sigma\{w(t) \mid t \leq T\}$   $\sigma$ -algebrára nézve, akkor előállítható sztochasztikus integrálként.

$$\overline{H}_T = \lambda + \int_0^T X dw ,$$

mégpedig oly módon, hogy a sztochasztikus integrál martingál<sup>6</sup>. Ugyanakkor ez sajnos nekünk nem elegendő, ugyanis nem a  $w$ , hanem az  $\overline{S}$  szerint vett integrálként való előállításra van szükségünk. Ahhoz, hogy ezt meg tudjuk tenni, meg kell majd mutatni, hogy alkalmas  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{Q})$  martingálmérték alatt egy a másik  $\tilde{w}$  módon jelölt  $\mathbf{Q}$  mérték alatti Wiener-folyamattal  $d\overline{S} = \sigma \overline{S} d\tilde{w}$ . Érdeemes hangsúlyozni, hogy a  $\tilde{w}$ -ra való áttéréskor ugyancsak biztosítani

<sup>6</sup>Több különböző integrál-reprezentációs tétel is igazolható. A gondolatmenet lényege, hogy az előállításban szereplő sztochasztikus integrál valódi martingál, nem csak lokális martingál.

kell, hogy a  $\tilde{w}$  által generált  $\sigma$ -algebra azonos legyen a  $w$  által generált  $\sigma$ -algebrával. A sztochasztikus integrálokra vonatkozó asszociativitási szabály alapján minden, a  $\mathbf{Q}$  mérték szerint négyzetesen integrálható  $\xi$  változóra, felhasználva, hogy  $\bar{S} > 0$

$$\xi = \lambda + \int_0^T X d\tilde{w} = \lambda + \int_0^T \frac{X}{\sigma \bar{S}} \sigma \bar{S} d\tilde{w} = \lambda + \int_0^T \frac{X}{\sigma \bar{S}} d\bar{S} \stackrel{\circ}{=} \lambda + \int_0^T \theta d\bar{S},$$

vagyis a  $\xi$  reprezentálható önfinanszírozó portfólióval. Mivel a  $\xi$  négyzetesen integrálható, az integrálreprezentációs tétel biztosítja, hogy a sztochasztikus integrál martingál legyen. Ha most a  $\xi$  korlátos, akkor az  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\xi | \mathcal{F}_t)$  martingál korlátos, így az  $\int_0^t \theta d\bar{S} = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\int_0^T \theta d\bar{S} | \mathcal{F}_t)$  folyamat szintén korlátos. Ha most  $\mathbf{R}$  egy másik martingálmérték, és  $\chi_A$  egy tetszőleges  $A \in \mathcal{A}$  halmaz karakterisztikus függvénye, akkor az integrál előállításban szereplő integrál olyan lokális martingál az  $\mathbf{R}$  alatt, amely korlátos, ezért az  $\mathbf{R}$  szerint is martingál. Az, hogy a sztochasztikus integrál az  $\mathbf{R}$  alatt lokális martingál, abból következik, hogy egyrészt a mértékcsere során a sztochasztikus integrálok nem változnak, másrészt az  $\bar{S}$ , a feltétel szerint, az  $\mathbf{R}$  alatt is martingál, és a martingálok szerint vett sztochasztikus integrálok lokális martingálok. Ebből

$$\mathbf{Q}(A) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\left(\lambda + \int_0^T \theta d\bar{S}\right) = \lambda = \mathbf{E}^{\mathbf{R}}\left(\lambda + \int_0^T \theta d\bar{S}\right) = \mathbf{R}(A)$$

minden  $A \in \mathcal{A}$  esetén. Így tehát a martingálmérték az  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -algebrán egyértelmű. Egyúttal azt is igazoltuk, hogy nincs a  $\mathbf{Q}$  mértéken kívül olyan másik mérték, amely alatt az  $\bar{S}$  esetleg lokális martingál lesz, vagyis a Black–Scholes modellben az alapul vett Wiener-folyamat által generált  $\sigma$ -algebrán nem csak a martingálmérték, hanem a lokális martingálmérték is egyértelmű.  $\square$

### 11. Példa. Amerikai opciók árazása.

Emlékeztetünk, hogy amerikai opción olyan terméket értünk, amely kifizetésének időpontját a termék birtokosa határozza meg. Például az amerikai put opciók esetén az opció birtokosa által megválasztható  $\tau$  időpontban a termék értéke  $(K - S(\tau))^+$ , így az opció birtokosa ezt az összeget kapja meg. Mivel a lehívás időpontja utólag nem határozható meg, a  $\tau$  megállási idő. Amerikai opciók esetén tehát nem egy valószínűségi változó a kifizetés, így közvetlenül a  $\pi$  függvény nem alkalmazható. Amerikai opciók árának meghatározásakor abból szokás kiindulni, hogy az eladó a  $H(\tau)$  alakú változók közötti választás lehetőségét adja el, ahol  $H$  egy folyamat. Mivel a vevő a  $H(\tau)$  változók közül bármelyiket választhatja, így kézenfekvő, ha árként az eladó a  $\pi(H(\tau))$  lehetséges árak szuprémumát jelöli meg. Ha van  $\mathbf{Q}$  egyértelmű martingál mérték, akkor az ár  $\sup_{\tau} \pi(H(\tau)) = \sup_{\tau} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\bar{H}(\tau))$ . Ha van olyan  $\tau^*$  optimális lehívási időpont, amelyre

$$\sup_{\tau} \pi(H(\tau)) = \sup_{\tau} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\bar{H}(\tau)) = \max_{\tau} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\bar{H}(\tau)) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\bar{H}(\tau^*)),$$

akkor a  $\pi(H(\tau^*))$  a vevő által is elfogadható, ugyanis nem fog szisztematikusan veszíteni.  $\square$



## Irodalom

1. Badics, T. 'Az arbitrázs preferenciákkal történő karakterizációjáról', *Közgazdasági Szemle*, 2011/ szeptember, 727–742.
2. Badics, R. 'Arbitrázs, kockázattal szembeni attitűd, és az eszközárzás alaptétele', *Hitelintézetek Szemle*, 4:325–335, 2011.
3. Badics T. Medvegyev P. 'A pénzügyi eszközök árazásának alaptétele, lokálisan korlátos szemimartingál árfolyamok esetén', *Sigma* 40:89–136, 2009.
4. Björg, T. *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
5. Cochrane, J. H. *Asset Pricing*, Princeton University Press, Princeton, 2001
6. Delbaen F. and Schachermayer W. *The Mathematics of Arbitrage*, Springer, Berlin, 2005.
7. Elliott R. J. and Kopp P. E. *Mathematics of Financial Markets*, Second Edition, Springer, Berlin 2005.
8. Hansen, L. P., Richard, S. F. 'The Role of Conditioning Information in Deducing Testable Restrictions Implied by Dynamic Asset Pricing Models', *Econometrica* 55:587–614, 1987.
9. Hull, J. C. *Options, Futures, and Other Derivatives*, Third Edition, Prentice Hall International, Inc., London, 1997.
10. Jeanblanc, M, Yor, M. and Chesney, M, *Mathematical Methods of Financial Markets*, Springer, 2009.
11. Karatzas, I. Shreve, S. E. *Methods of Mathematical Finance*, Springer, Berlin, 1998.
12. Medvegyev, P. *Stochastic Integration Theory*, Oxford University Press, Oxford, 2007.
13. Medvegyev, P. – Száz, J. *A meglepetések jellege a pénzügyi piacokon*, Bankárképző Központ, Budapest, 2010.
14. Musiela, M. – Rutkowski, M. *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, Berlin, 1998.
15. Shreve S. E. *Stochastic Calculus for finance I, II*, Springer, Berlin, 2004
16. Shiryaev, A. N., *Essentials of Stochastic Finance, Facts, Models, Theory*, World Scientific, Singapore, 1999.
17. Száz, J. 'Valószínűség, esély, relatív súlyok – Opciók és reálopciók', *Hitelintézetek Szemle* 4:336–348, 2011.
18. Száz, J. *Pénzügyi termékek áralakulása*, Jet Set Tipográfiai Műhely Kft., Budapest, 2009.

### MARTINGALE MEASURES AND THE LAW OF THE DISCOUNTED PRESENT VALUE

In the article the author discusses some problems of the existence of the martingale measure. In continuous time models one should restrict the set of self financing portfolios and introduce the concept of the admissible portfolios. But to define the admissible portfolios one should either define them under the martingale measure or to turn the set of admissible portfolios to a cone which makes the interpretation of the pricing formula difficult.



## INTERNETES TERMÉKKRITIKÁK HASZNOSSÁGÁNAK MEGÁLLAPÍTÁSA FELÜGYELT GÉPI TANULÁSSAL<sup>1</sup>

KOVÁCS BALÁZS – KRUSZLICZ FERENC – TORJAI LÁSZLÓ  
*PTE KTK – BDE Research Kft.*

Az elmúlt évek során az Internet a vállalati marketing funkció számára is az egyik legfontosabb információforrássá nőtte ki magát. Ennek megfelelően egyre több kutatás foglalkozik az internetes felhasználók által generált dokumentumok hasznosítási lehetőségével is. A termékkritikákban (reviews, comments) rejlő információ kinyerését célzó kutatási irányok egyike, az ún. koncepció kinyerés (concept extraction), ami többek közt a termékekre vonatkozó fogyasztói ítéleteket tárja fel és elemzi. A vizsgálat fókusza lehet a felhasználói hozzászólások tartalma, de azok minősége, hasznossága is. Cikkünkben áttekintjük a termékkritika-hasznosság fogalmához kapcsolódó különböző értelmezési megközelítéseket. Célunk, hogy a termékkritikák hasznosságának automatikus megállapításához dolgozzunk ki egy mesterséges neurális hálózatot és egy Support Vector Machine-t alkalmazó felügyelt tanulási eljárást, melyben különböző szövegjellemző halmazokat használunk a tanítás során.

### 1 Bevezetés

Az internetes technológiákra épülő üzleti megoldások terjedésével rohamosan nő az olyan típusú weblapok száma, ahol egy termékről leírhatjuk tapasztalatainkat, véleményünket vagy valamilyen skálán minősíthetjük azt. Lehet ez egy webáruház, egy fórum vagy akár egy elektronikus szaklap is. Az ilyen típusú, online felhasználók által írt véleményeket digitális szájreklámnak/szóbeszédnek (word of mouth) tekinthetjük (Dellarocas, 2003), amik jelentős befolyással bírnak a vásárlási döntésekre, és így az értékesítési eredményekre is (Duan és Whinston, 2008). Zhu és Zhang (2010) azt találták, hogy az internethasználók 24%-a tájékozódik online termékkommentekből, mielőtt offline vásárol. Ugyanakkor nehezíti az információgyűjtést, hogy az említett termékvélemények szétszórtan és rosszul strukturáltan jelennek meg a világhálón, ráadásul egy átlagos felhasználó nehézségekbe ütközhet, ha a dokumentumokban található információk hitelességét akarja megítélni.

A termékvélemény-keresők a fenti problémára kínálnak megoldást: a potenciális vásárlók információgyűjtési tevékenységét hivatottak leegyszerűsíteni és hatékonyabbá tenni. Mindezt azzal érik el, hogy

---

<sup>1</sup>Jelen tanulmány a „TÁMOP-4.2.2.C-11/1/KONV-2012-0005, Jól-lét az információs társadalomban” pályázati projekt támogatásával készült. Kovács Balázs kutatómunkáját részben a Felkai András ösztöndíj tette lehetővé, melyet a Citibank kezdeményezésére az Alapítvány a Pénzügyi Kultúra Fejlesztéséért hozott létre. Beérkezett: 2012. november 23. E-mail: kovacsbal@ktk.pte.hu, kruszlic@ktk.pte.hu, torjai.laszlo@bde.hu.

- a termékvéleményekkel kapcsolatos információkat kinyerik a weblapokról,
- feldolgozzák, rendszerezik, értékelik azokat, valamint
- megfelelő felületet biztosítanak az eredmények lekérdezéséhez és megjelenítéséhez.

Ezen megoldások alkalmazhatósága azonban túlmutat a potenciális vásárlók információéhségének kielégítésén. Üzleti szervezetek számára az egyik legkézenfekvőbb felhasználási terület a vevőelégedettség-vizsgálat, amit az érzelmi tájolás elemzés (sentiment orientation analysis) segítségével lehet elvégezni (Li és Wu, 2010). Ehhez az egyes kritikákban megfogalmazott véleményeket valamilyen minőségi skálán (például jó-semleges-rossz vélemény a termékről) kell ábrázolni. Az adott termékre vonatkozó érzelmi tájolások megfelelő összegzésével az individuális fogyasztók véleményét aggregált vásárlói preferenciává alakíthatjuk át (Decker és Trusov, 2010). Amennyiben a felhasználók regisztrálva közölnek véleményeket, úgy az összegyűjtött ügyféladatbázist felhasználva személyre szabott reklámok készíthetők és juttathatók el a címzettekhez (Cheung és sztsai, 2003). Hasonló megközelítés alkalmazható az ügyfélszolgálatokra beérkező üzenetek (ügyfélpanaszok, elismerések stb.) elemzése kapcsán is (Burk, 2007; Coussement és Van den Poel, 2008).

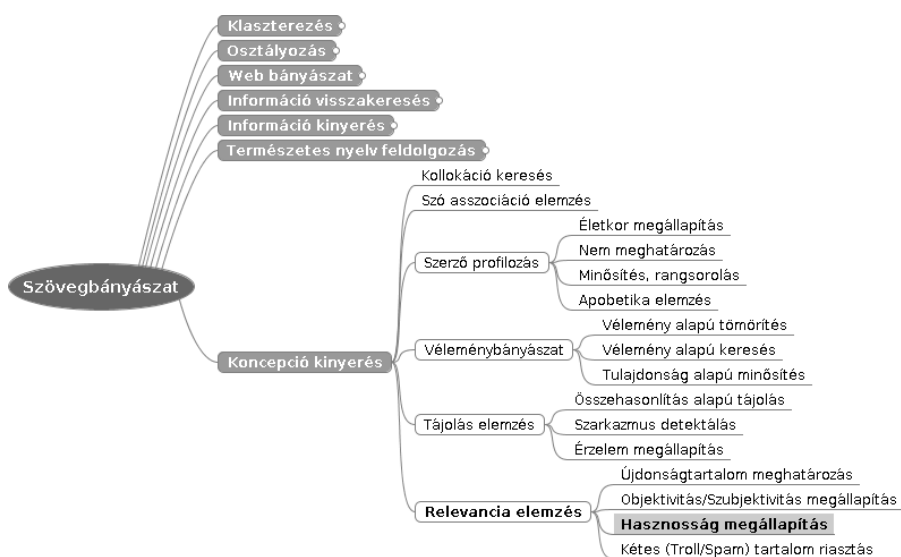
A kutatások egy másik iránya nem a hozzászólásokban található vélemények érzelmi tájolasát elemzi, hanem a bejegyzés minőségét, információtartalmát, hitelességét. A továbbiakban összefoglalóan a hozzászólások hasznosságaként hivatkozunk e kategóriákra. Ezen elemzések elvégzését több dolog is motiválhatja:

- Gyakorlatilag lehetetlen feladat egy potenciális vásárló számára, hogy az összes releváns hozzászólást elolvassa, főként olyan népszerű termékek esetén, melyekről felhasználók ezrei mondják el saját véleményüket. Csak a leghasznosabb hozzászólásokat kell megjeleníteni számára.
- A termékkommentek szerzői vagy a megjelenítő weblapok különböző „hitelességi szinten” helyezkedhetnek el, születnek hozzászólások félrevezetési céllal és találkozhatunk spamekkel is (Duan és Zirn, 2012; Xie és sztsai, 2012).
- Az aggregált vásárlói preferencia felmérésénél a különböző információ-tartalmú, minőségű vagy korú bejegyzéseket más-más súllyal érdemes figyelembe venni.
- Stb.

A termék kritikákat közlő weboldalak egy része lehetőséget ad arra, hogy a felhasználók értékeljék az általuk olvasott hozzászólások hasznosságát. Az Amazon.com-on például arra az eldöntendő kérdésre kell választ adniuk az olvasóknak, hogy hasznosnak találták-e a kritikát (Was this review helpful to you?). Az így kapott eredményeket fel lehet használni a fenti célokra,

de számos esetben félrevezető lehet ezek alkalmazása: a bejegyzések jelentős százalékára például nem, vagy alig érkezik visszajelzés, ami – függetlenül a hozzászólás valódi hasznosságától – csökkenti annak esélyét, hogy újabb felhasználók olvassák és értékeljék azt (Kim és sztsai, 2006; O’Mahony és Smyth, 2010) (ezen problémáról bővebb leírást adunk a következő szakaszban). Nehézséget okozhat az is, hogy különböző forrásból származó hozzászólások más módszerrel és olvasói bázis által kerülnek értékelésre, így a nyert mutatók nem összehasonlíthatók. Ezen korlátok motiválták a hozzászólások hasznosságának automatikus (gépi) meghatározására irányuló törekvéseket.

Az 1. ábra a szövegbányászati, azon belül pedig a koncepció kinyerési kutatások egy lehetséges kategorizálását mutatja.



1. ábra. A „hasznosság megállapítás” helye a szövegbányászati kutatásokban

Tanulmányunk célja, hogy egy olyan gépi tanuláson alapuló eljárást dolgozzunk ki, melynek segítségével automatizálni lehet a termékekre vonatkozó internetes hozzászólások hasznosságának megállapítását. Az eljárás kidolgozásához magyar nyelvű, mobiltelefonokra adott kommentek 1000 elemű korpuszát használtuk fel.

Cikkünk második szakaszában röviden összefoglaljuk, hogy a nemzetközi irodalomban milyen megközelítések és megoldások születtek a kommentek hasznosságának értékelésére. A harmadik szakaszban sorra vesszük azon szövegjellemzőket, melyek felhasználhatók a hozzászólások hasznosságának becsléséhez. A negyedik szakaszban szűkítjük ezen jellemzők körét, hogy használható méretű adathalmazzal hajthassuk végre a felügyelt tanítást. Az ötödik szakaszban bemutatjuk a felügyelt tanulási eljárást, a hatodik szakaszban pedig ismertetjük a tanulás eredményeit. A tanulmány végén összefoglaljuk elemzéseinket, és további kutatási lehetőségeket vázolunk fel.

## 2 Irodalmi áttekintés

Jelen szakaszban áttekintést adunk az irodalomban fellelhető azon eredményekről, melyek a termékkritikák hasznosságát értékelik.

Pan és Zhang (2011) olyan jellemzőket kerestek kutatásuk során, melyek érdemben befolyásolják a termékkritikák olvasók által észlelt hasznosságát (perceived review helpfulness/usefulness). Az Amazon.com oldalon fellelhető hozzászólásokat elemezték használati és élvezeti terméktípusok esetén, ahol az észlelt hasznosság értékét a felhasználói visszajelzésekből származtatták. Kvantitatív elemzésük során kimutatták, hogy a pozitív tartalmú és a hosszabb termékvéleményeket hasznosabbnak tartják a felhasználók, de a kapcsolat erőssége eltér terméktípusonként. Felhívják a figyelmet arra, hogy – a racionális magyarázatokon túl – ennek oka lehet egyrészt, hogy egy olvasó általában már rendelkezik vásárlási szándékkal a kritikák olvasása közben, így egy pozitív tartalmú véleményt megerősítésként él meg, másrészt – a kognitív disszonancia csökkentése érdekében – a hosszabb kritika elolvasása miatti nagyobb erőfeszítést magasabb észlelt hasznossági szinttel ellensúlyoz. A szerzők kvalitatív elemzésük során a termékvélemény írójának innováció-elfogadási szintjét is számszerűsítették, majd kimutatták, hogy a magas szinten állók (véleményvezérek) hozzászólásait hasznosabbnak vélik az olvasók, de a túlságosan innovatívak már olyan extrém véleménnyel bírnak, ami csökkenti kritikájuk elfogadottságát.

Az észlelt hasznosság (helpfulness) környezetfüggő jellegét emeli ki Danescu-Niculescu-Mizil és sztsai (2009) eredménye, akik azt találták, hogy az egyes hozzászólások észlelt hasznosságát a termékről elérhető többi kritika száma és minősége is befolyásolja: kevés elérhető komment esetén felértékelődik azok információtartalma és így hasznossága is.

Kim és sztsai (2006) az Amazon.com weboldalról gyűjtött termékkritikák hasznosságát (helpfulness) azok szövegjellemzői segítségével modellezték. Kutatásuk célja – a változók közötti összefüggések feltárásán túl – az volt, hogy képessé váljanak új hozzászólások hasznosságának automatikus becslésére. A szerzők a termékkritikákra adott olvasói szavazatokból (hasznos vs. nem hasznos) számolt aránnyal jellemezték a tanítóhalmaz hozzászólásait. Elemzésükben MP3 lejátszókra és digitális kamerákra koncentráltak, a hasznosságot pedig a következő szövegjellemzőkkel próbálták leírni:

- strukturális jellemzők (a hozzászólásban szereplő tokenek, mondatok száma, mondatok átlagos hossza, kérdő és felkiáltó mondatok aránya, kiemelések és sortörések száma stb.),
- lexikális jellemzők (tokenek és bigramok tf-idf értéke stb.),
- szintaktikai jellemzők (főnevek, igék és melléknevek aránya stb.),
- szemantikai jellemzők (termékjellemzőkre vonatkozó objektív adatok, pozitív és negatív értelmű szavak száma stb.),
- metaadat jellemzők (termékminősítő csillagok száma, az átlagértéktől való eltérés nagysága stb.).

Az SVM regresszió keretében lineáris, polinomiális, valamint radiális bázisfüggvényt is kipróbáltak, melyek közül az utóbbi teljesített legjobban. Az elemzés eredménye azt mutatta, hogy leginkább a strukturális (hozzászólás hossza) és a metaadat jellemzők határozták meg a hasznosságot.

Az a megoldás, hogy a hozzászólások hasznosságára érkező olvasói szavazatok kerüljenek felhasználásra a gépi tanulás során több kritikát is kapott. Cao és sztsai (2011) például azt vizsgálták, hogy milyen tényezők hatására kapnak egyes termékkritikák sok, míg mások kevés szavazatot (helpfulness és unhelpfulness szavazatok összege) akár olyan esetekben is, amikor ezen kritikák „objektív” hasznossága megegyezik. Adatforrásként a CNET Download.com oldalát használták fel, ahol szoftvertermékekhez kapcsolódó bejegyzések találhatók.

Elemzésük során három jellemzőcsoportot vizsgáltak:

- alapjellemzők: kritika megjelenésének időpontja, a termék értékelése stb.,
- stilisztikai jellemzők: mondatok hossza, használt szavak halmaza stb.,
- szemantikai jellemzők: több szavazatot kaphat-e például a „bölcsek befektetés ez a szoftver” kifejezés, mint az „ez egy jó szoftver”.

Elemzésük azt mutatja, hogy a kapott szavazatok száma jelentős szórással rendelkezik, és a szemantikai jellemzők bírnak a legnagyobb befolyással erre, ami eltér a korábbi tanulmányok által ezen jellemzőknek tulajdonított szereptől. Emellett azt találták, hogy az extrém vélemények több szavazatot vonzanak, mint a vegyes vagy semleges hozzászólások.

Az Amazon.com oldalán található szavazatok alkalmazásának első jelentős kritikáját Liu és sztsai (2007) fogalmazták meg. Kutatásuk célja az alacsony minőségű (low-quality) termékkritikák megtalálása volt annak érdekében, hogy az adott termékre vonatkozó véleményösszegzés során figyelmen kívül hagyhassák azokat. Elsőként azt állapították meg, hogy az Amazon.com oldalon alkalmazott – olvasói szavazatokra építő – értékelő módszer három tényező miatt is torzított eredményt ad:

- Az olvasók jobban szeretnek pozitív szavazatot (helpful) adni, így bizonyos hozzászólások 100%-ban hasznos címkét kapnak, miközben csak egy rövid értékelést adnak a termékről. („imbalance vote” torzítás)
- Nagyszámú korábbi szavazat túlzott mértékben kelti a felhasználókban azt a képzetet, hogy a termékkritika „hiteles”, függetlenül annak tényleges minőségétől. Ez tovább növeli a szavazatok számát, és csökkenti a szavazók objektivitását. („winner circle” torzítás)
- A termék piacra dobásának időpontjához közel megjelenő hozzászólások több szavazatot kapnak, mint a magasabb minőségű, de később megjelenő kritikák. („early bird” torzítás)

A fenti torzítások miatt a termék kritikák hasznosságának – a bináris SVM tanításához szükséges – címkézését manuálisan végezték el. Az automatikus értékeléshez specifikálták a hozzászólás-minőség (quality) mérésének sztenderd módját, melynek során három fő faktort azonosítottak. Az informativitást (informativeness) a mondatokra, szavakra és termékjellemzőkre vonatkozó mutatókkal mérték, mint például azok hossza, száma, előfordulásuk gyakorisága a szövegben és a címben. Az olvashatóságot (readability) a bekezdések számával, a bekezdések átlagos hosszával, valamint a szövegelválasztó jelek számával jellemezték. A szubjektivitást (subjectiveness) a pozitív, illetve negatív mondatok arányával, valamint a szubjektív (felhasználói véleményt tartalmazó) mondatok számával jellemezték. Eredményként azt kapták, hogy leginkább az informativitás jellemzők alapján lehet következtetni a kritikák minőségére, és a szubjektivitás faktor csak minimális mértékben járul hozzá a becslés pontosságának javulásához.

Chen és Tseng (2011) egy olyan módszert dolgoztak ki, mellyel a termék kritikák információminőségét (quality of information) értékelik. A hozzászólások jellemzőinek strukturálására egy – más területeken már sikeresen alkalmazott – információminőség (information quality – IQ) keretrendszert használtak fel, majd két különböző, többsztyályos SVM-mel (lineáris kernel mellett) értékelték azokat. A több weboldalról származó hozzászólásokat manuálisan sorolták a következő csoportokba: magas minőségű (high-quality), közepes minőségű (medium-quality), alacsony minőségű (low-quality), másolat (duplicate) és spam. Az IQ keretrendszer hierarchikus felépítésű, kilenc dimenzió mentén 51 mutatót alkalmaz a termék kritikák jellemzésére. A dimenziók az alábbiak:

- hihetőség (believability),
- véleménymentesség (objectivity – szubjektivitás ellentéte),
- elismertség (reputation – szerző elismertsége),
- relevancia (relevancy),
- időszerűség (timeliness),
- teljesség (completeness – termék teljes körű bemutatása),
- információmennyiség (appropriate amount of information),
- érthetőség (ease of understanding),
- tömörség (concise representation).

A 10-szeres keresztvalidáció során azt tapasztalták, hogy a véleménymentesség és az információmennyiség jellemzők bírnak a legnagyobb magyarázó erővel a hozzászólások osztályozása során.

Wu és sztsai (2010) olyan hozzászólás-jellemzőket kerestek, melyek segítségével kiválaszthatók a kétes termék kritikák (suspicious reviews). Ezek olyan bejegyzések, melyeket nem valós felhasználók, hanem például forgalmazók vagy azok versenytársai írtak azzal a céllal, hogy a valóságosnál jobb vagy éppen rosszabb fényben tüntessék fel a termékeket. A kutatás során a



szerzők a TripAdvisor oldalán található, szálláshelyekre vonatkozó kritikákat elemezték, és azt találták, hogy egy bejegyzés kétes jellegét az jelzi leginkább, ha az pozitív és rögtön egy negatív után következik.

A fent bemutatott megoldások alapvetően a termék kritikák szövegjellemzőit használták fel arra, hogy felügyelt tanulás segítségével modellezzék azok hasznosságát. Tsur és Rappoport (2009) egy merőben új technikával próbálták meg értékelni az online értékesített könyvekre vonatkozó hozzászólások hasznosságát (helpfulness), ahol akkor tekintettek egy bejegyzést hasznosnak, ha az támogatta az olvasó vásárlással kapcsolatos döntését. A probléma kezelésére fejlesztették ki a RevRank algoritmust. Elsőként a vizsgált termékről írt kritikákban azonosították a legfontosabb kifejezéseket, vagyis a nem túl gyakori, de az adott termékre vonatkozóan magas információtartalommal bíró szavakat, szóösszetételeket, majd ezek összegzéséből létrehoztak egy virtuális mag hozzászólást (virtual core review). A bejegyzések hasznosságának értékelése az „optimálisnak” tekinthető mag hozzászóláshoz mért hasonlóság alapján történik. Az eljárás nagy előnye az irodalomban található többi megoldáshoz képest, hogy teljes mértékben felügyelet, azaz manuális címkézés nélkül tud működni.

Lu és sztsai (2010) egy számottevően új elemet vontak be a hasznosság értékelésének módszertanába. A szövegjellemzők mellett a termék kritikák szerzőinek társas(ági) hálózatát (social network), mint környezeti információt is figyelembe vették a hozzászólások minőségének (quality) becslésekor. A következő két feltételezéssel éltek:

- A termékkritika minősége függ a szerző minőségétől.
- Egy szerző minősége függ a hálózatban vele kapcsolatban álló szerzők minőségétől, ugyanis a hálózati kapcsolatok egyfajta bizalmat, barátságot fejeznek ki.

Adatforrásként a Ciao UK1 oldal bejegyzéseit használták fel, ahol az olvasóknak lehetősége van a kritikák értékelésére, és arra is, hogy a számukra tetsző szerzőket hozzáadják saját bizalmi körükhöz (circle of trust). A csak szövegjellemzőket tartalmazó regressziós függvényt mint alapmodellt kiegészítették a társasági hálózatot figyelembe vevő változókkal, melynek eredményeként szignifikáns módon javult a modell becslési pontossága.

Az irodalmi összefoglaló végén két olyan cikket említünk meg, melyek nem termék kritikák, hanem más online dokumentumok kapcsán végeznek a fentiekhez hasonló elemzéseket.

Siersdorfer és sztsai (2010) dolgoztak ki elsőként automatikus osztályozó eljárást YouTube hozzászólások közösség általi elfogadására vonatkozóan (accepted or not accepted by the community). 67 000 YouTube videóra adott több mint hatmillió komment kapcsán vizsgálták, hogy van-e összefüggés azok elfogadottsága, a megjelenő tokenek gyakorisága, az olvasói szavazatok száma és a videó tartalmának kategóriája (zene, politika stb.) között.

Pon és sztsai (2011) célja egy olyan rendszer (iScore) felépítése volt, ami képes kiszűrni az olvasó számára érdektelen (uninteresting) híreket az interneten. Bár a termékekre vonatkozó kommentek és a hírek nem kezelhetők

azonos módszerrel, de az érdekesség-érdektelenség (interesting-uninteresting) koncepciójának bevezetése felhasználható a termékkritikák értékelése esetén is. A szerzők három relevancia kategóriát azonosítottak, melyek alapján érdekesnek (interesting) tekinthető egy cikk egy adott felhasználó számára. A kognitív relevancia (cognitive relevance) akkor teljesül, ha a hír informatív, újszerű és magas minőségű. A szituációs relevancia (situational relevance) feltétele, hogy támogassa a döntéshozatalt és csökkentse a bizonytalanságot, míg a motivációs relevanciához (motivational relevance) az szükséges, hogy illeszkedjen a felhasználó céljaihoz, szándékához. A fentiekből látszik, hogy az érdekesség fogalma sokkal komplexebb, mint egyszerűen a felhasználó érdeklődési területének való megfelelés.

Ahogy az irodalmi példákból is látszik, a „termékkritikák hasznossága” erősen szubjektív kategória. Függ a felhasználó céljától (például vásárlási döntés támogatása, általános információgyűjtés), és egyéb preferenciáitól, amik ráadásul változhatnak az idő múlásával (például változik a felhasználó tudásszintje a kritikák olvasása során). Elemzésünk során ezért egyetlen felhasználót kértünk meg arra, hogy értékelje a hozzászólásokat ötfokozatú Likert-skálán („Mennyire találtad hasznosnak a hozzászólást?”). Nem törekedtünk tehát a válaszadó céljainak, motivációinak előzetes feltárására, a hasznossági értékek az aktuális, egyéni preferenciákat tükrözik. Megjegyezzük, hogy a válaszadó (és általában a hasonló kérdésekre választ adó személy) nem feltétlenül tudja szétválasztani az egyéni hasznosságra vonatkozó és a hozzászólás információtartalmára (hasznosságpotenciál) vonatkozó értékelését.

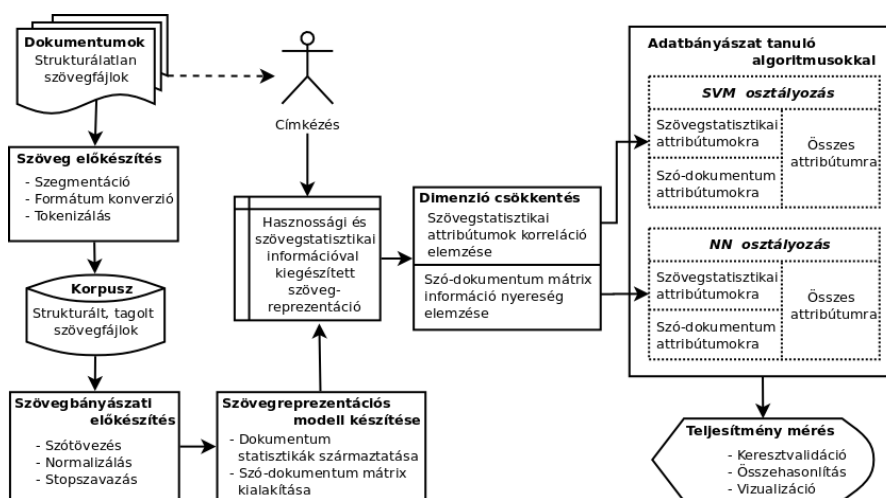
### 3 A kommentek előfeldolgozása és reprezentációs modelljei

Vizsgálataink során 1000 darab, mobiltelefonokkal kapcsolatos magyar nyelvű termékkritikát gyűjtöttünk össze különböző weboldalakról. A hozzászólásokat egy kísérleti alany manuális úton címkézte fel oly módon, hogy a következő egyszerű kérdésre kellett választ adnia: „Mennyire találtad hasznosnak a hozzászólást?”. Az ötfokozatú Likert-skálán kapott válaszokat ezután bináris mutatóvá konvertáltuk: a 4-es és 5-ös értékkel bíró hozzászólásokat „hasznos”-nak, az 1 és 3 közötti értékkel rendelkezőket pedig „nem hasznos”-nak tekintettük. Az alábbiakban – illusztrációként – bemutatunk egy hasznosnak és egy nem hasznos tekintett kommentet:

Egy hasznos hozzászólás: *„Igazi üzleti telefon. Hibátlan. Nagy adatmennyiségnél (500 sms-nél picit belassul) 3 évet használtam gond nélkül, most fater használja, 3 elő-és hátlap csere volt, 1 akksi eddig, és bírja. Jó akksi, memória kapacitás. Az árát még mindig tartja. (Nem az újkori árhoz képest, hanem amit kb. 3-4 éve ért el) egyszer pancsizott, az öreg beesett a stégről a vízbe. Szétkaptuk, kiszáradt, azóta eltelt 2 év. Működik. Előnyök: Ergonómia, tudás, memória. Hátrányok: Üzleti telefonként ugyan nem volt, de talán a kamera picit gyenge, amit soha nem használtam.”*

Egy nem hasznos hozzászólás: „Én most fogok kapni ilyet narancsban. Nagyon várom, szerintem nagyon jó. Semmi bajom vele, csak egy picit tu-cattelő”

A tanulási folyamat célja, hogy olyan – minden komment esetén számszerűsíthető – szövegjellemzőket találjunk, melyek kombinációja magyarázza a manuális címkézéssel nyert hasznossági értékeket. Ezen szövegjellemzők aztán felhasználhatók az előre nem címkézett kommentek hasznosságának automatikus megállapításához. A fenti cél elérésére kidolgozott eljárás lépéseit mutatja be a 2. ábra.



2. ábra. Kommentek hasznosságának automatikus megállapítására kidolgozott eljárás

A folyamat első lépéseként a rendelkezésre álló 1000 hozzászólás szövegének előfeldolgozását kellett elvégezni, hogy számszerűsítésre kerülhessenek a potenciális magyarázó mutatók. Mivel a termék kritikák gyűjtése során a különböző metaadatok (például szerző, dátum) csak részlegesen álltak rendelkezésre, valamint nem minden weblap ad lehetőség a kommentek formázására – és ha van is rá mód, akkor a gyorsaság miatt a felhasználók ritkán élnek ezzel a lehetőséggel –, ezért mind a metaadatok, mind a formázásban rejlő információkat figyelmen kívül hagytuk. A hasznosság manuális megállapításához és gépi becsléséhez mindössze a hozzászólások formázatlan szövegét használtuk fel. Ezen forrásból az alábbi szövegváltozatokat készítettük el, ahol a feldolgozottsági állapotok egymás után következnek és egymásra épülnek:

1. Nyers szöveg (az eredeti tartalom, változatlan HTML formátumban)
2. Folyó szöveg (a HTML tartalom egyszerű szöveges TXT formátumra alakítása)
3. Unikód szöveg (a folyó szöveg dokumentumainak egységes karakterkódolása)

4. Tokenizált szöveg (az unikód szöveg szó és írásjel blokkokra tagolása)
5. Szótövezett szöveg (a tokenizált szöveg szótövezett változata)
6. Normalizált szöveg (a szótövezett szöveg kisbetűsre alakítása és egyéb egységesítése)
7. Stopszavazott szöveg (a normalizált szöveg gyakori töltelék szavainak törlésével előállított szöveg)

Ezen transzformációk közül a karakterkódolás, a szótövezés és a stopszavazás csak nyelvfüggő módon és eszközökkel valósítható meg. Az utóbbi kettő végeredményét ráadásul erősen befolyásolja a tömörítési fok megválasztása, azaz az alkalmazott szótökeresés mélysége és a stopszó lista nagysága. Ezek a módszerek kizárólag a nyelvtani szabályok ismeretére építve nem is mindig egyértelműek, például az „almát” kifejezés szótöve a szöveggörnyezet-től függően „alma” de akár „alom” is lehet. Az előfeldolgozás eredményeként előfordult, hogy bizonyos kommentek túlzottan lerövidültek, kiürültek. Az így keletkező „üres” hozzászólások (az adathalmaz 10,29%-a) általában semmiféle hasznossággal nem rendelkeznek, így azokat kizártuk a további vizsgálatokból, hiszen csak „látszólag” javítanák az osztályozó módszerek pontosságát.

A hozzászólások jellemzéséhez alkalmazott mutatók értéke függ attól, hogy a szövegek mely feldolgozottsági állapotát használva számszerűsítjük azokat. Általános szabályként a mutatók értékét mindig abból a legmagasabb szinten feldolgozott szövegváltozathoz kalkuláltuk, ahol az még éppen értelmezhető volt. Például a kis és nagy betűk számát a normalizált változat előtti szótövezett változat alapján, míg az írásjelek számát az Unikód szövegváltozathoz állapítottuk meg.

Az irodalomkutatás alapján összegyűjtöttük, jelöléstechnikailag egységesítettük és csoportosítottuk azon szövegjellemzőket, melyeket idegen nyelvű szövegek esetében már felhasználtak a hasznosság gépi megállapításához. A kvantitatív mérőszámok jellegzetessége illetve forrása szerint az alábbi kategóriákat különítettük el.

1. Strukturális jellemzők: egy adott dokumentumhoz tartozó, annak értelmezése nélkül származtatható statisztikai mutatók (például NWRD – a szavak száma, DWRD – a különböző szavak száma).
2. Lexikális jellemzők: a dokumentumokat egy egységes gyűjtemény (korpusz) részének tekintve, a szövegelemek dokumentumok közötti megoszlásának mérőszámai (például UTDF – a szógyakoriságokat tartalmazó szó-dokumentum mátrix).
3. Szintaktikai jellemzők: a szövegek helyességének, a különféle nyelvtani szabályoknak való megfelelés és nyelvtani osztályokba való besorolások mutatói (például NSMD – mosolykódok (smiley-k) száma a dokumentumban).

4. Szemantikai jellemzők: a szavak és mondatok értelmezését is felhasználó mutatók. Jellegükénél fogva ezek a mutatók erősen függenek az olvasó szubjektumától is (például: LOPD – a dokumentum pozitív, negatív vagy semleges tájolása).

		Hasznos komment	Nem hasznos komment
<i>Strukturális jellemzők</i>			
Mondat jellemzők			
Mondatok száma a dokumentumban	nsnd	3	2
Átlagos mondat hossz szavakban mérve	aslw	27,33	8
Átlagos mondat hossz betűkben mérve	aslc	168	50
Szó jellemzők			
Szavak száma a dokumentumban (írásjel tokenek nélkül)	nwrđ	82	16
Szavak számának negyedik gyöke ( $n4wrđ = nwrđ^{1/4}$ )	n4wrđ	3,01	2
Különböző szavak száma a dokumentumban	dwrđ	63	16
A szöveg lexikális sűrűsége (dwrđ/nwrđ)	lxđn	0,77	1
Nagybetűvel kezdődő szavak száma a dokumentumban	nfcwd	9	1
A csupa nagybetűs szavak száma a dokumentumban	nacwd	5	0
Komplex (3 vagy több szótagú) szavak száma	ncwd	35	5
Komplex szavak részaránya (ncwd/nwrđ)	rcwd	0,43	0,31
Átlagos szóhossz karakterekben mérve	awlc	5,95	5,94
Átlagos szóhossz szótagokban mérve (nsyd/nwrđ)	awly	2,32	2,19
Szótag jellemzők			
Szótagok száma a dokumentumban	nsyd	190	35
Betű jellemzők			
Karakterek száma a dokumentumban	nchđ	504	100
Nagybetűk száma a dokumentumban	ncchđ	21	1
Nagybetűk aránya (ncchđ/nchđ)	rchđ	0,04	0,01
Kisbetűk száma a dokumentumban	nlchđ	462	93
Kisbetűk aránya (nlchđ/nchđ)	rlchđ	0,96	0,99
Nagybetű-kisbetű arány (ncchđ/nlchđ)	rlchđ	0,04	0,01
<i>Lexikális jellemzők</i>			
Unigram jellemzők			
Szógyakoriságokat tartalmazó szó-dokumentum mátrix	utdf		
<i>Szintaktikai jellemzők</i>			
Nyelvtani jellemzők			
Alfabetikus karakterek száma (ncchđ+nlchđ)	nachđ	483	94
Felkiáltójelek száma a dokumentumban	nemd	0	0
Kérdőjelek száma a dokumentumban	nqmd	0	0
Idézőjelek száma a dokumentumban	nqđd	0	0
Írásjelek száma a dokumentumban	npchđ	17	6
Számjegyek száma a dokumentumban	nmchđ	4	0
Mondatonkénti átlagos numerikus információ tartalom (rnchđ=nmchđ/nsnd)	rnchđ	1,33	0
Mosolykódok (smiley-k) száma a dokumentumban	nsmd	3	0
Helyesírási lag elfogadható szavak száma	nspwd	91	16
Helyesírási lag elfogadható szavak aránya (nspwd/nwrđ)	rspwd	1,11	1
<i>Szemantikai jellemzők</i>			
Tájolás			
A dokumentum pozitív, negatív vagy semleges tájolása	lopd	1	4

1. táblázat. A hasznosság megállapítására felhasználható attribútumok<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Fontos megemlíteni, hogy az UTDF indikátor – lévén egy mátrix – valójában nem egy, hanem az oszlopszámnak (a dokumentumokban előforduló különböző szavak száma) megfelelő számú mutatót jelöl. Hasonló mátrix készíthető a szópárok (BTDF) illetve szó-n-esek (NTDF) dokumentumbeli előfordulásáról is. A továbbiakban a szógyakorisági UTDF mutatókra a szakirodalomban jobban elterjedt szó-dokumentum mátrix (TDM) jelölést használjuk. Mivel a TDM mérete és jellege alapján is eltér a többi attribútumtól, ezért a későbbi elemzések során szeparáltan vizsgáljuk annak osztályozó erejét.

Bizonyos mutatók előállítása történhet egyszerű leszámolással, míg mások képzése komplexebb módszereket kíván meg, melyek lehetnek például

- skálatorzítás: az alapértékeket valamilyen függvény szerint transzformáljuk azért, hogy az alkalmazandó módszerekben a nagyságrendi eltérések ne okozzanak problémákat,
- aggregálás: egy mutatóhoz tartozó részsokaság numerikus jellemzése (például átlag, szórás),
- relativizálás: a mutató értékeit egy konstanshoz vagy másik mutatóhoz viszonyítjuk.

A szövegjellemzők mindegyike képezhető bekezdésekre vagy mondatokra is, de jól strukturált dokumentumok esetén akár más részegységek (például cím, bevezetés, törzs, összefoglaló) bontásában is. A lehetséges mutatók széles skálájából az *1. táblázatban* felsorolt indikátorok bizonyultak meghatározhatónak a rendelkezésre álló dokumentumok jellemzésére.

A számítások során, ha egy relativizált mutató esetében a nevező nulla volt, úgy a származtatott érték nem került definiálásra. A karakterek leszámolásakor a magyar nyelv kettős betűit (digráfok) két betűnek, de csak egy hangnak tekintettük. Amikor a szóismétlések összeszámlálására került sor, akkor azok kis- és nagybetűs írásmódjait nem különböztettük meg egymástól. Néhány speciális írásjel (például az aláhúzás vagy kötőjel) esetén azokat a nem szóalkotó betűk közé soroltuk.

A fent bemutatott és számszerűsített indikátorok körét több okból is érdemes szűkíteni. Először is, a dokumentumminta elemszámának jelentősen meg kell haladnia az indikátorok számát, ellenkező esetben ugyanis elkerülhetetlen az adatsorok egyedi felismerését eredményező túltanulás jelensége. Másodsor, a kevesebb indikátor előállítása jelentősen csökkenti az osztályozó algoritmusok futásidejét. Harmadszor, az adatok mögött zajló folyamatok felismerése, a lényegi jellemzők megragadása csökkenti az egyéb forrásból származó zajok hatását. A fentiek értelmében egyrészt elfogadható méretűre redukáltuk a TDM-et, másrészt megvizsgáltuk a többi attribútum (ezekre a későbbiekben statisztikai szövegjellemzőkként (STAT) hivatkozunk) között fennálló redundanciát, és meghatároztuk a tanuló algoritmusok futtatása során felhasználandó szűkített mutatóhalmazt. Elsőként ez utóbbi indikátor-szűkítési folyamatot mutatjuk be.

## 4 A statisztikai szövegjellemzők körének szűkítése

Guyon és Elisseeff (2003) munkája alapján ismert, hogy tökéletesen korrelált attribútumok esetén azok bármelyike ugyanazzal az osztályozó erővel bír, mint maga a teljesen korrelált halmaz, így a korrelációs osztályokból elegendő egyetlen tetszőleges attribútumot meghagyni a modellezés során. Nem tökéletes korreláció esetén azonban létezhetnek olyan mutatók, melyek

önmagukban nem hordoznak információt, de más attribútumokkal együtt jelentősen megnő az osztályozó képességük. Ennek megfelelően nagyon erős (anti)korreláció esetén már nem állítható biztonsággal, hogy bármelyik indikátor helyettesíthető lenne a többi segítségével, de a gyakorlatban ez mégis elfogadott kompromisszum. A fentiek alapján a dokumentumonként számszerűsített mutatók értékeire kiszámítottuk a Pearson-féle korrelációs mátrixot (3. ábra), melynek segítségével meghatároztuk az együttmozgó indikátorok halmazait (ld. később). A mátrix sorait és oszlopait úgy rendeztük, hogy az egymással nagyon erős (anti)korrelációt mutató indikátorok egymás mellé kerüljenek, a főátló mentén pedig bekereteztük az egy halmazba kerülő mutatók értékeit.

	lopd	nsnd	npchd	nwrđ	dwrđ	nsyd	nchđ	nlchđ	nachđ	ncwd	nspwd	n4wrđ	lxđn	rcwd	awly	aslw	asic	rspwd	...	
lopd	1	-0.13	-0.15	-0.14	-0.15	-0.14	-0.14	-0.13	-0.14	-0.14	-0.14	-0.16	0.1	-0.06	0	-0.05	-0.05	-0.11	...	
nsnd	-0.13	1	0.82	0.85	0.84	0.85	0.85	0.84	0.84	0.81	0.87	0.75	-0.56	0.11	0.11	-0.13	-0.1	0.33	...	
npchđ	-0.15	0.82	1	0.88	0.88	0.87	0.89	0.86	0.87	0.84	0.9	0.79	-0.57	0.12	0.11	0.09	0.14	0.39	...	
nwrđ	-0.14	0.85	0.88	1	0.99	0.99	0.99	0.98	0.99	0.95	0.99	0.91	-0.71	0.11	0.1	0.26	0.27	0.31	...	
dwrđ	-0.15	0.84	0.88	0.99	1	0.99	0.99	0.98	0.98	0.95	0.99	0.93	-0.68	0.12	0.11	0.27	0.28	0.33	...	
nsyd	-0.14	0.85	0.87	0.99	0.99	1	1	0.99	1	0.98	0.99	0.89	-0.68	0.18	0.18	0.24	0.27	0.32	...	
nchđ	-0.14	0.85	0.89	0.99	0.99	1	1	0.99	1	0.97	0.98	0.89	-0.68	0.16	0.17	0.23	0.29	0.32	...	
nlchđ	-0.13	0.84	0.86	0.98	0.98	0.99	0.99	1	0.99	0.97	0.98	0.89	-0.68	0.17	0.17	0.24	0.29	0.31	...	
nachđ	-0.14	0.84	0.87	0.99	0.98	1	1	0.99	1	0.97	0.98	0.89	-0.68	0.17	0.17	0.24	0.29	0.31	...	
ncwd	-0.14	0.81	0.84	0.95	0.95	0.98	0.97	0.97	0.97	1	0.95	0.85	-0.64	0.28	0.26	0.21	0.26	0.31	...	
nspwd	-0.14	0.87	0.9	0.99	0.99	0.99	0.98	0.98	0.98	0.95	1	0.9	-0.7	0.12	0.11	0.22	0.24	0.36	...	
n4wrđ	-0.16	0.75	0.79	0.91	0.93	0.89	0.89	0.89	0.89	0.85	0.9	1	-0.77	0.11	0.1	0.38	0.39	0.46	...	
lxđn	0.1	-0.56	-0.57	-0.71	-0.68	-0.68	-0.68	-0.68	-0.68	-0.64	-0.7	-0.77	1	-0.02	0.02	-0.33	-0.31	-0.29	...	
rcwd	-0.06	0.11	0.12	0.11	0.12	0.18	0.16	0.17	0.17	0.28	0.12	0.11	-0.02	1	0.81	-0.05	0.09	0.19	...	
awly	0	0.11	0.11	0.1	0.11	0.18	0.17	0.17	0.17	0.26	0.11	0.1	0.02	0.81	1	-0.06	0.1	0.19	...	
aslw	-0.05	-0.13	0.09	0.26	0.27	0.24	0.23	0.24	0.24	0.21	0.22	0.38	-0.33	-0.05	-0.06	1	0.94	0.05	...	
asic	-0.05	-0.1	0.14	0.27	0.28	0.27	0.29	0.29	0.29	0.26	0.24	0.39	-0.31	0.09	0.1	0.94	1	0.08	...	
rspwd	-0.11	0.33	0.39	0.31	0.33	0.32	0.32	0.31	0.31	0.31	0.36	0.46	-0.29	0.19	0.19	0.05	0.08	1	...	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	1	...

3. ábra. Attribútumok Pearson-féle korrelációs mátrixa

Az így nyert halmazokból már csak egy-egy mutatót érdemes a további elemzésekhez meghagyni. Ehhez többféle attribútum-sorrendező vagy attribútum kiválasztó módszert használtunk fel. Az előbbieket esetén a korrelációs halmazonként legmagasabb pontszámmal rendelkező mutató nyert egy szavazatot, míg az utóbbiak során a korrelációs halmazonként kiválasztott legelső elem. Az attribútum szűkítő módszerek (döntési bizottság tagjai) által leadott szavazatok összesítése után a korrelációs halmazonként legtöbb szavazatot nyert mutató került kiválasztásra.

A kiválasztó bizottság 11 tagját a Weka<sup>3</sup> nyílt forrású adatbányászati alkalmazás alábbi módszerei alkották (az első módszer attribútum kiválasztó, a többi attribútum sorrendező):

<sup>3</sup>www.cs.waikato.ac.nz/ml/weka

Módszer neve	Weka elnevezés
Correlation-based Feature Subset Evaluation	CfsSubsetEval
Consistency Attribute Subset Evaluation	ConsistencySubsetEval
Latent Semantic Analysis	LatentSemanticAnalysis*
Chi-squared Attribute Evaluation	ChiSquaredAttributeEval
Filtered Attribute Evaluation	FilteredAttributeEval
Gain Ratio Attribute Evaluation	GainRatioAttributeEval
Information Gain Attribute Evaluation	InfoGainAttributeEval
OneR Attribute Evaluation	OneRAttributeEval
Relief f Attribute Evaluation	ReliefFAttributeEval
Support Vector Machine Attribute Evaluation	SVMAttributeEval
Symmetrical Uncertainty Attribute Evaluation	SymmetricalUncertAttributeEval

2. táblázat. Attribútum-szortozó és kiválasztó módszerek a döntési bizottságban

A mutatónkénti szavazatok számát tartalmazza a 3. táblázat, ahol csillaggal jelöltük a korrelációs halmazonként legtöbb szavazatot szerzett statisztikai szövegjellemzőket.

Halmaz	Indikátor	Szavazat	Halmaz	Indikátor	Szavazat
1	nsnd	1	4	rspwd*	11
1	npchd	1	5	nqqd*	10
1	nwrđ	0	6	nfcwd*	7
1	n4wrđ	2	6	nacwd	2
1	dwrđ	1	6	ncchđ	2
1	nsyd	0	7	nsmd*	10
1	nchđ*	3	8	rnchđ*	9
1	nlchđ	0	9	rcchđ	3
1	nachđ	0	9	rlchđ*	6
1	ncwd	2	10	rlchđ*	9
1	nspwd	1	11	awlc*	9
1	lxđn	0	12	nemd*	9
2	rcwd*	6	13	nqmd*	9
2	awly	5	14	nnchđ*	10
3	aslw	2	15	lopđ*	9
3	aslc*	9			

3. táblázat. Az attribútumok által nyert szavazatok száma

A szavazás kapcsán érdemes megjegyezni, hogy annak eredményei alátámasztják Yang és Pedersen (1997) eredményeit, miszerint általában már az információnyereség (IG) és a khi-négyzet (CHI) alapú attribútum szortozó módszerek egyedüli alkalmazása is elegendően helyes kiválasztást ad. Az is biztató, hogy a későbbiekben az osztályozáshoz használandó SVM-re épülő kiválasztási módszer sem adott a közös döntéstől jelentősen eltérő eredményt, azaz az elhagyhatónak ítélt indikátorok ezen módszer szerint is kevés ad-dicionális információt hordoznak. A továbbiakban a TDM redukálásának folyamatát mutatjuk be.

## 5 TDM redukálása a vektortér-modellhez

A TDM alkalmazásának hátterében az a feltevés húzódik meg, hogy a kommentek hasznosságának megítélése során jelentős szerep juthat bizonyos in-



dikátor értékű szavaknak, amelyek a mondatban az alany, a tárgy vagy az állítmány szerepét töltik be. (Megjegyezzük, hogy az elemzések során a szavak mondatban betöltött szerepét nem vesszük figyelembe, mert e nélkül is kellő információt kapunk a probléma hatékony megoldásához.) A szavak attribútumként való figyelembe vételével a vektortér-modellben használt szó-dokumentum mátrixhoz jutunk (TDM), amely azonban a megfigyelésekhez képest aránytalanul sok dimenzióval rendelkezik. Ez a tény önmagában kedvezően hat a hasznos és haszontalan dokumentumok szeparálhatóságára, azonban fölösleges számolási kapacitásokat emészt fel, ezért kívánatos a mátrix méretének csökkentése. Ebben a szakaszban bemutatjuk, hogy milyen módszerrel csökkentettük a problémater dimenziójának számát, és hogyan állt elő a végső adatbázis, amelyen a szövegsztályozási algoritmusokat futtattuk.

A 4. táblázat mutatja be a TDM szerkezetét, melynek sorai képezik a dokumentumok reprezentációit a vektortér-modellben. Az oszlopok – a dokumentumvektorok dimenziói – pedig a korpuszban előforduló szavak, amelyeket nyelvtechnikai módszerekkel előzetesen redukáltunk, így az azonos szótővű szavakhoz azonos dimenzió tartozik (a szótővel azonosítjuk az oszlopokat). A vektorok koordinátái az 1. táblázatban látható reprezentációban megmutatják, hogy hányszor fordult elő az adott szótőnek valamilyen változata az adott dokumentumban.

Dokumentum	fog	kép	kér	mer	optika	szerinte	...
...	...	...	...	...	...	...	...
Egy hasznos hozzászólás	0	3	1	1	3	1	...
Egy nem hasznos hozzászólás	1	0	1	0	0	1	...
...	...	...	...	...	...	...	...

4. táblázat. Minta TDM mátrix a példa hozzászólások alapján

Az eredeti adatbázisban nyelvtechnikai dimenziócsökkentés (szótővezés, stopszavazás) után kb. 6500 kifejezés szerepelt. A szótár méretének további redukálását matematikai-statisztikai módszerekkel történő dimenziócsökkentés révén értük el. Jellemzőkinyerő módszereket (például látens szemantikus analízis – LSA) az elemzés során nem alkalmaztunk, mert a kinyert szintetikus jellemzők értelmezéséhez jelentősen el kellett volna vonatkoztatni az eredeti szavak jelentésétől. A jellemzőkiválasztó módszerek közül négyet vizsgáltunk meg, melyek

- a gyűjteménytámogatottság (collection frequency),
- a kölcsönös információ (MI/PMI, (pointwise) mutual information),
- az információnyereség (IG, information gain), és
- a khi-négyzet

mutatók. Ezen mutatók segítségével a szótár szavaihoz valós számokat rendelünk, melyekkel a szavak korpuszon belüli fontosságát mérjük. Az így becsült fontosság ismeretében hozhatunk döntést arról, hogy mely szavakat tartjuk meg a további elemzésekhez. Az alábbiakban a mutatók jelentéséről adunk részletesebb leírást.

*Alkalmazott jelölések*

$c_j$   $j$  kategória, ahol  $j \in \{h, n\}$ ,  $h$  a hasznos és  $n$  a nem hasznos kategória azonosítója

$t_k$  a  $k$ -adik szó tartalmazása

$\bar{t}_k$  a  $k$ -adik szó komplementere, azaz a  $k$ -adik szó nem tartalmazása

$n(c_j)$  a  $j$  kategóriába tartozó dokumentumok száma

$n(t_k)$  a  $k$ -adik szót tartalmazó dokumentumok száma

$n(t_k, c_j)$  a  $k$ -adik szót tartalmazó és a  $j$  kategóriába tartozó dokumentumok száma

$N$  a dokumentumok száma a korpuszon belül

$P(c_j)$  egy dokumentum  $j$  kategóriába esésének valószínűsége

$P(t_k)$  a  $k$ -adik szó felbukkanásának valószínűsége, a dokumentumgyakorisággal ( $d_f = n(t_k)/N$ ) becsülhető

$P(t_k, c_j)$  annak valószínűsége, hogy egy dokumentum tartalmazza a  $k$ -adik szót és  $j$  kategóriájú

A gyűjteménytámogatottság (collection frequency) lényegében a szó adott korpuszon belüli előfordulásainak számát jelenti.

A kölcsönös információ ((pointwise) mutual information) azt méri, hogy mennyi az adott szó adott kategóriában („hasznos” illetve „nem hasznos”) való előfordulásának tényleges és függetlenség esetén várható információtartalmának különbsége:

$$MI_k = \log \frac{P(t_k, c_h)}{P(t_k)P(c_h)}$$

Az információnyereség (information gain) ezzel szemben nem csak ezt a különbséget veszi figyelembe: a szónak, a szó hiányának, a kategóriának, valamint a kategória komplementerének Descartes-szorzataként előálló négy halmazra számolt különbség várható értékét adja meg:

$$IG_k = \sum_{j \in \{h, n\}} \sum_{t \in \{t_k, \bar{t}_k\}} P(t, c_j) \log \frac{P(t, c_j)}{P(t)P(c_j)}$$

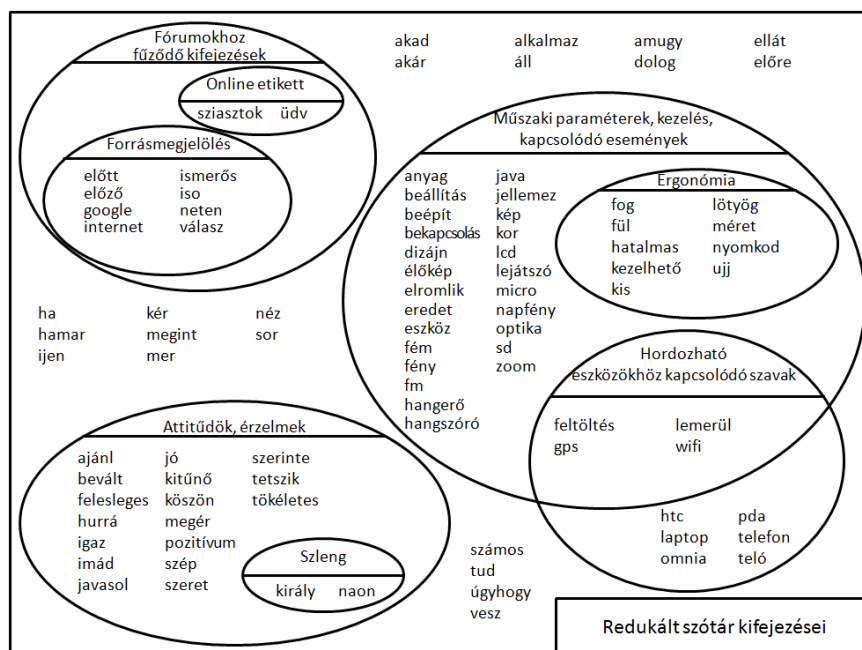
A khi-négyzet mutató is hasonló elven működik, hiszen ez is a szó-kategória halmazok Descartes-szorzatain belüli tényleges és függetlenség esetén várható közös előfordulási valószínűségekkel számol.

$$\chi_k^2 = \frac{N - (n(t_k, c_h)n(\bar{t}_k, c_n) - n(t_k, c_n)n(\bar{t}_k, c_h))^2}{n(c_h)n(c_n)n(t_k)n(\bar{t}_k)}.$$

Eredményeink szerint, a szavakra kiszámolt  $IG$  és a khi-négyzet mutatók a vizsgált korpuszon erősen korreláltak. A lineáris korrelációs együttható a két adatsor között 98,65% volt, ezért a továbbiakban a khi-négyzet mutatót nem vizsgáltuk külön. Az  $IG$  mutatóval pozitívan korrelált továbbá a

gyűjteménytámogatottság, 36,79%-os lineáris korrelációs együtthatóval. Az *MI* mutató értékei nem mutattak erős korrelációt sem az *IG* sem a gyűjteménytámogatottság adatsorával (a lineáris korrelációs együtthatók rendre -6,12% és -14,2%). A fenti mutatók közüli választás során szakirodalmi forrásokra támaszkodtunk.

Yang és Pedersen (1997) nyomán tudjuk, hogy a kölcsönös információn alapuló dimenzióredukció teljesítménye nem közelíti meg a legeredményesebb módszerek közé tartozó információnyereség mutatóét. Tekintve, hogy az *IG* mutató számítása során az *MI* értékét is figyelembe veszi, nem meglepő, hogy a kifinomultabb mutató jobb eredményre képes. A gyűjteménytámogatottság a legjobb teljesítményű nem felügyelt dimenzióredukciós módszerek közé tartozik (Garnes, 2009). Ez azt jelenti, hogy amennyiben nem áll rendelkezésre előzetesen felcímkézett adatbázis – és így nem használhatók a felügyelt módszerek, mint például az *IG*, akkor ezzel a módszerrel hatékonyan lehet csökkenteni a szótár méretét. Garnes (2009) vizsgálata során azonban az mutatkozott, hogy a gyűjteménytámogatottság alulmarad az információnyereség mutatóval szemben osztályozási feladatok pontosságának javítása szempontjából – összhangban azzal, amit Yang és Pedersen (1997) is állított, hogy az *IG* mutató az egyik leghatékonyabb az osztályozási problémák dimenziószámának csökkentésére. A korábbi kutatási eredmények áttekintése alapján tehát az információnyereség mutató bizonyult a legalkalmasabbnak a redukálható dimenziók kiválasztására, ezért mi is ezt alkalmaztuk.



4. ábra. A tanítási folyamatba bevont redukált szólista elemei

Kutatásunkban az  $IG$  mutató alapján rangsorolt szólista legkisebb értékű elemeit hagytuk el, 100 eleműre csökkentettük a szótár méretét (ezek egyfajta kategorizálását mutatja a 4. ábra).

Próbafuttatások során nem kaptunk jelentősen jobb eredményt a több szóból álló TDM-ek segítségével, az agresszívebb redukció viszont már jelentősen rontotta az eredményeket. Ennek oka nem csupán közvetlenül a dimenziószám csökkentése volt, hanem – abból következően – a nemnulla koordinátájú dokumentumok számának a csökkenése is. A TDM ritka mátrix, ezért várható, hogy a dimenziók számának csökkentése maga után vonja a nullvektorral jellemezhető dokumentumok számának növekedését. Mivel mind az ANN, mind az SVM szeparálósíkok révén osztályozza a dokumentumokat, ezért az origó – a határesetből eltekintve – csak az egyik osztálytérnek lehet eleme. Ha az origóban elhelyezkedő dokumentumokban az osztálycímkék koncentrációja alacsony – azaz a manuális osztályozással sok hasznosnak, de sok nem hasznosnak ítélt dokumentum is található köztük – akkor az origóban lévő elemeknek bármely osztályhoz rendelése magas hibát eredményezhet.

A részletes elemzés előtt, a fenti okok miatt megvizsgáltuk a mintában található azon dokumentumokat, amelyeknek reprezentációja nullvektor volt a redukált TDM-ben. Az eredetileg 991 dokumentumot tartalmazó gyűjteményből a jellemző-kiválasztás után 93 dokumentumvektornak minden koordinátája nulla volt. Ebben a 93 elemű részmintában 4 hasznos és 89 nem hasznos kommentet találtunk, ebből következik, hogy nem vétünk nagy hibát, ha nem hasznosnak ítéljük azokat a hozzászólásokat, amelyek nem tartalmaznak egyet sem a redukált szótár szavai közül. Ebből kifolyólag a nullvektorokat kizártuk a mintából, az osztályozó algoritmusok jóságát csak a többi dokumentumvektoron elért teljesítményre állapítottuk meg.

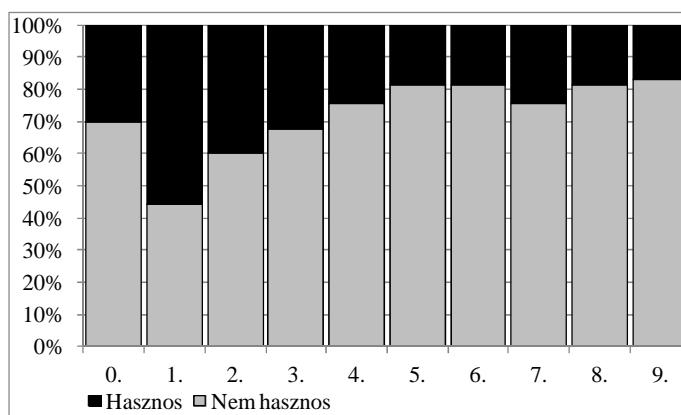
## 6 A felügyelt tanulás folyamata

Az attribútum szűkítési és TDM redukálási folyamat eredményeként egy 898 elemű dokumentumgyűjtemény állt elő. Ezt tíz, közel egyenlő méretű részhalmazra osztottuk, hogy rajtuk tízszeres keresztvalidációt hajtsunk végre. A tízszeres keresztvalidáció során tíz független futtatást végzünk, ahol az egyes futtatások során kilenc részhalmaz dokumentumai szolgálnak tanítómintaként, míg a maradék részhalmaz játssza a tesztminta szerepét. Az osztályozó módszerek jóságát a tesztmintákon elért találati aránnyal mérjük. Az angol kifejezéssel accuracy measure-nek nevezett mutatószám képlete a következő (Powers 2011):

$$\text{Accuracy} = \frac{\sum_{j \in \{h, n\}} n(\hat{c}_j, c_j)}{N},$$

ahol  $\hat{c}_j$  a dokumentumok becsült kategóriáját jelöli ( $\hat{c}_h$  a hasznos,  $\hat{c}_n$  a nem hasznos becsült kategória jele),  $n(\hat{c}_j, c_j)$  pedig a manuálisan  $j$  kategóriába ( $c_j$ ) sorolt és  $j$  kategóriájúnak is becsült ( $\hat{c}_j$ ) dokumentumok száma. A számláló tehát azon dokumentumok számát adja meg, melyek manuális és gépi címkéje (kategóriába sorolása) megegyezik.

Az 5. ábrán látható a – manuális címkézés szerint – hasznos és nem hasznos dokumentumok megoszlása az egyes részhalmazokban, amelyeket 0-tól 9-ig számoztunk. Mint látható, egyedül az 1. tesztmintában haladta meg a hasznos dokumentumok aránya az 50%-ot (a redukált korpuszon belül a hasznosnak ítélt dokumentumok aránya 28%).



5. ábra. A hasznos és nem hasznos dokumentumok megoszlása az egyes részmintákban

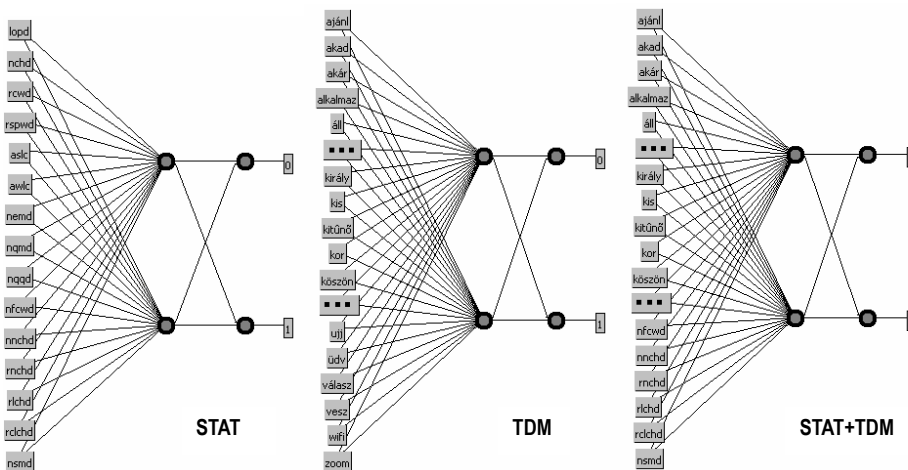
A hasznosság automatikus megállapításához két módszert alkalmaztunk: mesterséges neurális hálózatot (Artificial Neural Network – ANN) és Support Vector Machine-t (SVM). A felügyelt tanítást mindkét módszer esetén három verzióban hajtottuk végre:

- csak a TDM-en kívüli, szűkített attribútum halmaz, tehát a statisztikai szövegjellemzők (STAT),
- csak a redukált szó-dokumentum mátrix (TDM), valamint
- a két halmaz uniójának (TDM+STAT) felhasználásával.

A neurális hálózatok topológiájáról elmondhatjuk, hogy kismértékben eltérnek egymástól a három verzióban, viszont az összehasonlíthatóság érdekében csak a feltétlenül szükséges módosítási lehetőségekkel élünk. A modellezéshez a Weka 3.6 szoftver MultiLayer Perceptron (MLP) nevű eszközét használtuk.

Mindhárom többrétegű perceptron topológia egy input rétegből, egy rejtett rétegből és egy output rétegből áll. Az input réteg a STAT inputhalmaz esetében 15 neuronos, tehát megegyezik a statisztikai szövegjellemzők számával. A TDM inputhalmazhoz tartozó topológia esetén – a magyarázó attribútumok számának megfelelően – 100, míg a TDM+STAT inputhalmaz esetén 115 neuron széles az input réteg. Az input neuronok aktivációs függvénye a szokásos lineáris jelzési függvény. A rejtett réteg mindhárom esetben két neuron széles, és szigmoid jelzési függvényekkel rendelkezik. A rejtett réteg szélességét nincs értelme MLP topológia esetén alacsonyabbra állítani, mivel 1 rejtett neuron esetén a Perceptron topológiával ekvivalens modellt kapunk. Két rejtett neuron viszont már nem csak lineáris szeparációkra

ad lehetőséget: az OR, AND és NOT műveletek mellett az XOR kapcsolat modellezésére is képessé teszi a hálózatot. A kettőnél több rejtett neuronnal rendelkező hálózatok pontosságát is megvizsgáltuk, de azok nem adtak jobb becslést a kategóriák címkeire. Ez alól nem volt kivétel az input- és output neuronok számán alapuló hüvelykujj szabály által javasolt neuronszám sem. Hasonlóképpen, a mélyebb topológiák sem eredményezték a pontosság jelentős javulását, tehát nem alkalmaztunk egynél több rejtett réteget. Az output réteg tulajdonságai igazodnak a becslendő változó lehetséges értékeinek számához, tehát mindhárom esetben két output neuronra van szükség – egyik a hasznos kategóriához, másik a nem hasznos kategóriához. Az output jelzési függvények szigmoid típusúak. A három réteg között teljes előrecsatolást létesítettünk, ahogy a Multilayer Perceptron topológiánál szokás. A hálózat szinaptikus súlyait backpropagation algoritmussal állítottuk be, 500 epochos tanulás során. A tanuláshoz 0,3-as tanulási rátát és 0,2-es momentum paramétert használtunk. Ezek az értékek alapbeállítások a Weka 3.6-ban, és a további, nem említett paramétereket is a szoftver által ajánlott értéken hagytuk. A három topológia sematikus illusztrációi láthatók a 6. ábrán.



6. ábra. A mesterséges neurális hálózatok topológiája

A Support Vector Machine alkalmazásához a Weka 3.6 szoftver libSVM modulját használtuk. Mindhárom attribútumhalmaz esetén  $\nu$ -SVM (Chen és sztsai (2005)) tanulási módszert és radiális bázis kernel függvényt használtunk. A három verzióban rács-keresési (grid search) algoritmust alkalmazva határoztuk meg  $\gamma$  és  $\nu$  azon értékeit, melyek mellett a legjobb becslési eredményeket nyertük (5. táblázat). A többi paraméter értékét alapbeállításon hagytuk.

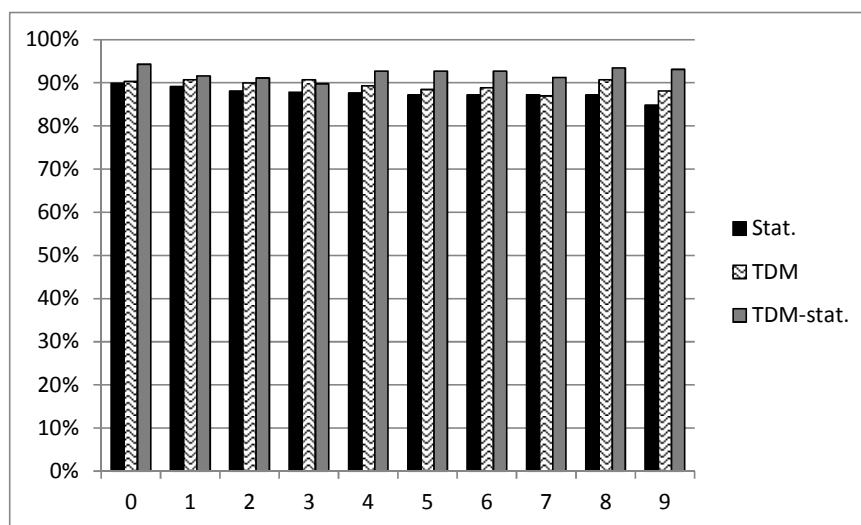
Attribútumok köre	$\gamma$	$\nu$
TDM	0,04	0,028
STAT	0,0001	0,3
TDM + STAT	0,0001	0,3

5. táblázat.  $\gamma$  és  $\nu$  értékei az SVM különböző verzióiban

## 7 A tanulás eredményességének elemzése

Ebben a szakaszban bemutatjuk, hogy milyen pontossággal állapítják meg a hozzászólások hasznosságát a vizsgált módszerek a különböző attribútumhalmazok esetén. A mesterséges neurális hálózattal osztályozott korpusz esetén kiszámított pontosság mutatók (accuracy measure) értékei a 7. és 8. ábrán láthatók. A tízszeres keresztvalidáció tíz tanulási futtatásának jelölése az aktuális tesztminta sorszámaival egyezik meg, azaz a diagram „0” jelzésű oszlopai azt az esetet mutatják, amikor a tesztmintát a 0. sorszámu, míg a tanítómintát az 1-9. sorszámu részhalmazok alkották.

A 7. ábrán a tanítómintán történt tanulás jósága látható. A tíz tanítómintán hasonló sorrendben követték egymást a háromféle attribútumhalmaz esetén számított pontossági mutatók. A legjobb eredményt a 3-as jelű futtatás kivételével mindig a kombinált attribútumhalmazhoz (TDM+STAT) tartozó osztályozás adta, általában 90% feletti értékekkel. Ezt követte a csupán a TDM információit használó címkézés, azonban ennek pontossága már nem mindenhol érte el a 90%-ot. Az előbbiekből pedig az következik, hogy a tanítómintákon a leggyengébb eredményt a tisztán szövegstatistikai attribútumokon (STAT) alapuló klasszifikáció szolgáltatta, melynek pontossága csupán egy esetben érte el a 90%-ot. Az oszlopdiagramhoz tartozó számadatokat a Függelék tartalmazza.

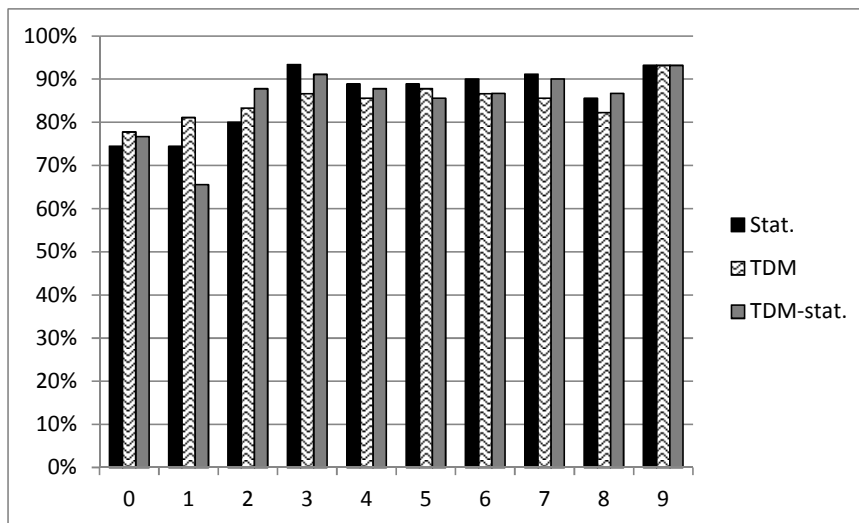


7. ábra. Az ANN által elért pontossági értékek a tanítómintákon

Minél magasabb dimenziójú térben szeretnénk pontokat elhatárolni egymástól, annál kevésbé kell nemlineáris szeparációkhoz folyamodnunk, így a többrétegű perceptron topológia súlyparaméterei gyorsabban konvergálnak. Mivel a három inputminta közül a szövegstatistikai jellemzők vannak a legkevesebben (15), ezért várható volt, hogy ebben a térben nehezebben szeparál az ANN. A 100, attribútumként szolgáló szóval kibővített input-adathalmaz

(TDM+STAT) viszont – a várakozásoknak megfelelően – a legjobban szétválasztható input-teret szolgáltatta.

Az 8. ábra a tesztmintákon történő osztályozás pontosságát mutatja. Azt láthatjuk, hogy a tesztmintákon jelentősen romlott a pontosság, és a korábbi sorrendet sem őrizték meg a modellek. Meglepő módon a 90%-os határt most a STAT halmazt használó modell érte el a leggyakrabban, a kombinált (TDM+STAT) inputhalmaz alapján történő klasszifikációhoz képest eggyel többször.

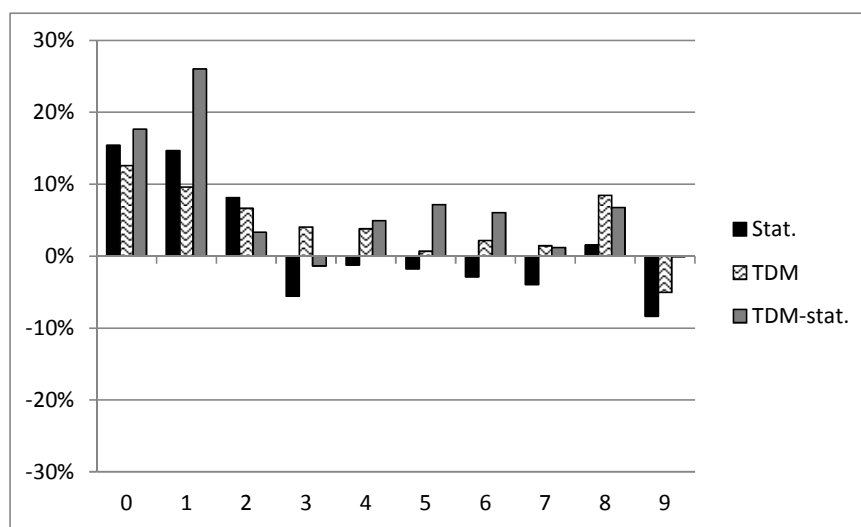


8. ábra. Az ANN által elért pontossági értékek a tesztmintákon

Árnyaltabb képet kaphatunk a bekövetkezett változásokról, ha megvizsgáljuk a tanítómintákra és a tesztmintákra számított pontosság mutatók különbségét (9. ábra).

Az ábra alapján elmondható, hogy a „0”, „1”, „2” és „8” jelű tesztminták esetén mindegyik módszer jelentősen rosszabb teszteredményeket szolgáltatott a tanítómintákra számítottnál. Ez a pontosság mutatók pozitív előjelű különbségéből látszik, ami azt jelenti, hogy a tanítómintán magasabb pontosságarányt sikerült elérni, mint a tesztmintán. A többi tesztmintán viszont a kizárólag szövegstatistikai attribútumokon (STAT) végzett osztályozás még pontosabbnak is mutatkozik a tanítómintához képest. Mivel a tanítóminta segítségével lettek beállítva a neurális hálózatok paraméterei, ráadásul az összesített négyzetes hiba lokális minimuma közelében, ezért egy ettől a tanítómintától eltérő adathalmaz esetén nem várható jelentősen jobb eredmény. Megfigyelhető továbbá, hogy a két másik input-adathalmazra épülő modell közül csak egy-egy esetben kaptunk a tanítómintánál jobb pontosságmutatót a hozzá tartozó tesztmintán. A pontos adatok a Függelékben megtekinthetők.

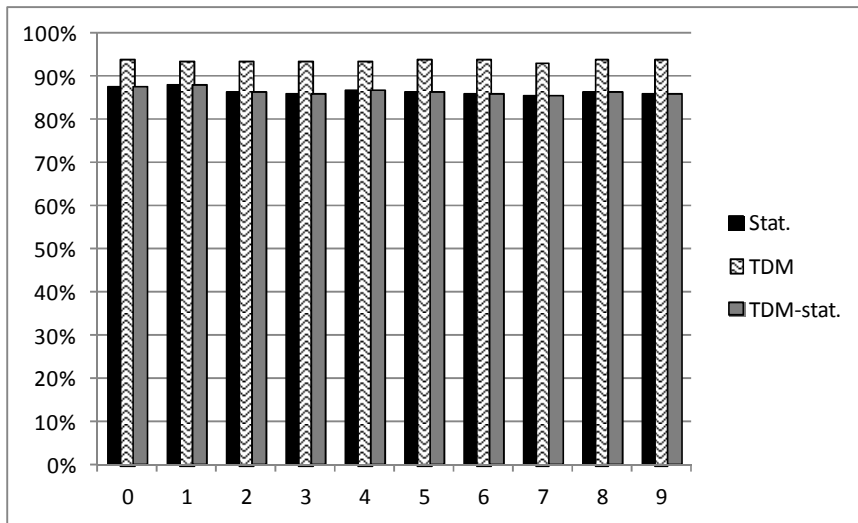




9. ábra. Az ANN által osztályozott tanító- és tesztminták pontossági értékének különbsége

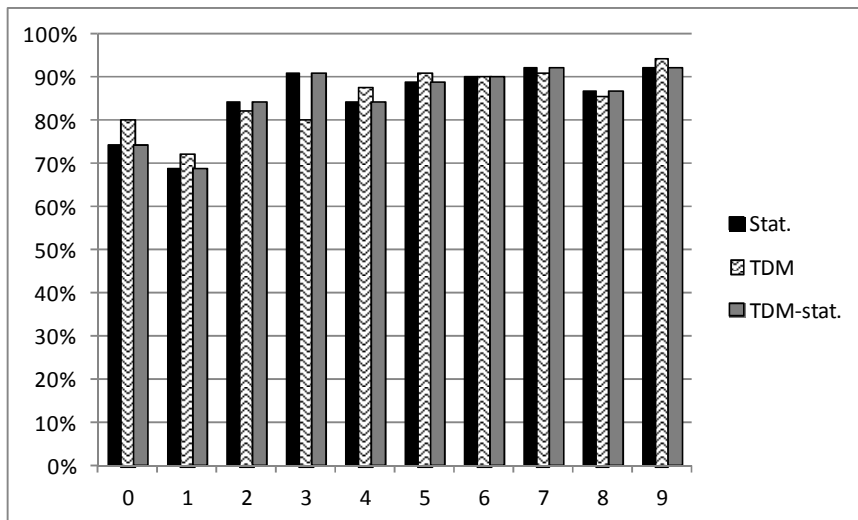
A fentiek arra engednek következtetni, hogy a magas dimenziójú terekben a hálózatok olyan szeparációkat létesítenek, amelyek a tanítómintában meglévő – csupán az adott mintára jellemző – térrészek felismerését teszik lehetővé, és ez a tesztmintákon hibás szeparációkhoz vezet. Ezt nevezzük a neurális hálózat túltanulásának is. A kis dimenziójú döntési terekben tehát sokkal jobb általánosító-képességű modelleket kaphatunk, feltéve, hogy megfelelő információt szolgáltatnak ezek a dimenziók. (Így például hiába próbálkoznánk a TDM dimenzióinak további csökkentésével, mert az már jelentős információvesztéshez vezetne.)

Az SVM módszerrel elvégzett tanítás pontosság mutató értékei láthatók a 10. és 11. ábrán. A részminták jelölései megegyeznek az ANN eredményeinek bemutatásakor alkalmazottal. A 10. ábrán a tanítómintára való rátanulás jó-sága látható. Mind a tíz tanítómintán a TDM attribútumhalmaz segítségével érte el a legnagyobb pontossági értéket az SVM algoritmus, minden esetben 90% fölötti pontossággal. A STAT, illetve a TDM+STAT attribútumhalmazon minden esetben 90% alatt maradt (86-88%) a pontosság. További érdekesség, hogy az utóbbi két attribútumhalmaz esetén pontosan ugyanazokat az eredményeket kaptuk. Ennek magyarázata az lehet, hogy a kommentek hasznosságát elsősorban a komment szerkezete befolyásolja, és csak másod-sorban a kulcsszavak: a STAT dimenziók nagyobb súlyt kapnak a szeparálási-  
kok illesztésében, és ezek a szeparációk a TDM dimenziók mentén is pontosan bontják szét a megfigyeléseket hasznos és nem hasznos dokumentumokra. Az oszlopdiagramhoz tartozó számadatokat a Függelék tartalmazza.



10. ábra. Az SVM által elért pontossági értékek a tanítómintákon

A 11. ábra a tesztmintákon történő SVM-osztályozás pontosságát mutatja. Azt láthatjuk, hogy a tesztmintákon elért pontosság szórása nagyobb a tíz tesztminta esetén, mint a hozzájuk tartozó tanítómintáknál. A 90%-os pontosságot ritkán érte el a TDM terében osztályozó SVM, viszont a másik két attribútumhalmaz – a tanítómintákkal ellentétben – több tesztmintán is meghaladta ezt a szintet.

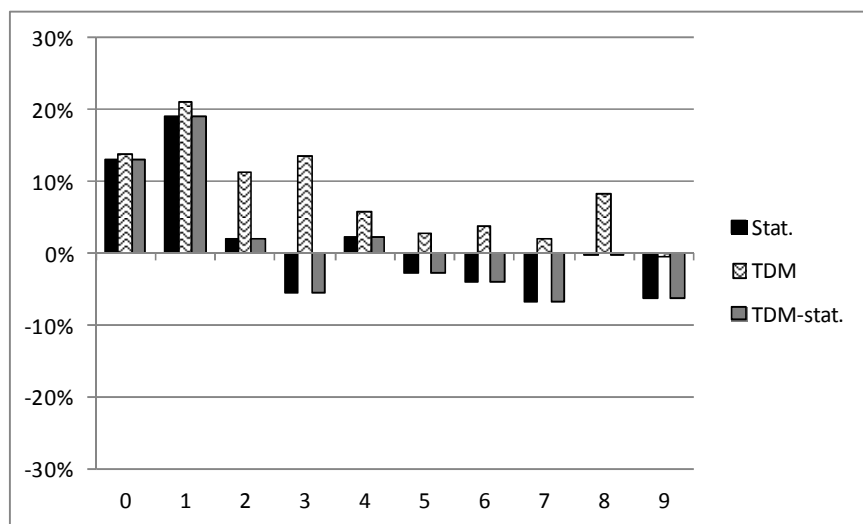


11. ábra. Az SVM által elért pontossági értékek a tesztmintákon

A Weka adatbányászati alkalmazás – ahogy korábban láttuk – lehetőséget nyújt arra, hogy sorrendbe állítsuk az attribútumokat aszerint, hogy azok

egy SVM során milyen osztályozó erővel bírnak. A korábban kiválasztott STAT attribútumok közül a karakterek száma (nchd), a nagybetűvel kezdődő szavak száma (nfcwd) és a helyesírásilag elfogadható szavak aránya (rspwd) jellemzők kerültek az első, míg az átlagos szóhossz (awlc), az idézőjelek száma (nqqd) és a smiley-k száma (nsmd) attribútumok az utolsó három helyre. A TDM elemei kapcsán – nem meglepő módon – a műszaki paraméterekkel kapcsolatos szavak kerültek nagyobb arányban a lista elejére. Az együttes attribútumhalmazra végzett sorbarendezés kapcsán azt a megállapítást tehetjük, hogy egyik jellemzőtípus sem dominálja a másikat, az abszolút első helyre pedig a karakterek száma attribútum került. Megjegyezzük, hogy ilyen sorbarendezést a mesterséges neurális hálózat esetén nem tudunk adni.

Vizsgáljuk meg az SVM esetén is a tanítómintákra és a tesztmintákra számított pontosság mutatók különbségét (12. ábra).



12. ábra. Az SVM által osztályozott tanító- és tesztminták pontossági értékének különbsége

Az ANN vizsgálatánál leírtakhoz hasonlóan a pontosság mutatók pozitív előjelű különbsége azt jelenti, hogy a tanítómintán magasabb pontosságarányt sikerült elérni, mint a tesztmintán. A 12. ábra alapján elmondható, hogy a „0”, „1”, „2” és „4” jelű tesztminták esetén mindegyik módszer rosszabb teszteredményeket szolgáltatott a tanítómintákra számítottnál. A többi tesztmintán viszont a STAT és TDM+STAT attribútumokon végzett osztályozás pontosabbnak (vagy legalább ugyanolyan pontosnak) mutatkozott, mint a tanítómintákon végrehajtott. A pontos adatok a Függelékben megtekinthetők.

A fent nyert eredmények megítéléséhez segítséget nyújt, ha felidézzük, hogy a megfigyeléseknek kb. 28 százaléka bizonyult hasznosnak a manuális címkézés után. Ezt kihasználva konstruálhatunk olyan triviális modellt, amely kb. 72%-os találati arányt képes elérni úgy, hogy minden dokumentum esetén a „nem hasznos” címkét alkalmazza. Ebben az esetben az összes

nem hasznos dokumentumot helyesen becsülnénk, de lemondanánk a 28%-nyi hasznos hozzászólás elkülönítéséről. Az általunk használt modellek kevésbé biztosan címkézik a nem hasznos hozzászólásokat, cserében viszont a hasznos hozzászólások egy jelentős részét felismerik. A teszteken elért 80-90% közötti pontosság abból tevődik össze, hogy egyrészt a triviális modell által a hasznos dokumentumok osztályozása kapcsán elkövetett 28%-nyi hibát az ANN és az SVM 10% alá szorította, másrészt a hibásan osztályozott negatív dokumentumok aránya 0%-ról kb. 5%-ra emelkedett átlagosan.

## 8 Összefoglalás

Cikkünkben ismertettük, hogy az irodalomban miként értelmezik a termékekre vonatkozó internetes hozzászólások hasznosságát, valamint hogy milyen szövegjellemzőkkel modellezik azt. Az irodalmi tapasztalatokat is felhasználva mutattunk be egy mesterséges neurális hálózatra (ANN) és egy support vector machine-re (SVM) épülő módszert, amikkel lehetőség nyílik a hozzászólások hasznosságának automatikus megállapítására.

A kapott eredmények azt mutatják, hogy a TDM attribútumok mentén mind az ANN, mind az SVM szeparáló módszerek nagy pontosságot (accuracy) képesek elérni a tanítómintán, azonban a független tesztmintákon számottevően gyengébb eredményt produkálnak. Ezzel ellentétben, a statisztikai szövegjellemzők (STAT) segítségével végzett osztályozás esetén, a tesztmintán történő validáció során még pontosságjavulást is ki tudtunk mutatni a tanítómintán elért értékekhez képest. Az ANN és SVM módszerek egymáshoz hasonló eredményeket szolgáltatnak, ezért azokat egyformán alkalmasnak tartjuk a szövegosztályozási feladat elvégzésére.

Mindeközben azt is megfigyelhettük, hogy a statisztikai szövegjellemzők (STAT) osztályozásra való alkalmasságuk szerint jól meghatározott csoportokba (strukturális, nyelvtani, tájolás stb.) rendelhetők. Ezek közül nyelvfüggetlen módon egyedül a strukturális attribútumok kezelhetők, de a többi jellemző értékének meghatározásához sem alkalmaztunk speciális nyelvészeti eszközöket. Ilyen módszerek felhasználásával bizonyos attribútumok precízebb tartalmat kaphatnak, ami jelentősen javíthatja az osztályozás pontosságát.

A kidolgozott eljárás korlátai között elsőként azt említhetjük, hogy módszerünk statikus korpuszon alapul. A korpusz változása megkövetelheti a teljes újrafuttatást, egyes paraméterek ismételt kalibrálását. Amíg az SVM esetén az attribútumok sorbarendezhetőek osztályozó erejük szerint, addig az alkalmazott mesterséges neurális hálózat kapcsán semmilyen elképzeléssel nem rendelkezünk a jellemzők osztályozáshoz való hozzájárulásáról. Ennek legfőbb oka az, hogy a nem lineáris topológia nem támogatja az optimális paraméterekből történő információkinyerést. Tanulmányunk meghatározó részét tette ki az attribútumok kiválasztására vonatkozó rész, aminek folyamata teljes mértékben az aktuális korpusz jellemzőin alapult: az attribútumok optimális részhalmozásának meghatározására nem rendelkezünk általános módszerrel, ennek kidolgozása további kutatási irányt jelöl ki.

További fejlesztési lehetőségként merül fel a hozzászólások gyűjtése során megszerezhető metaadatok felhasználása (például szerző, tetszés index), de egyéb attribútumokkal is bővíthető a magyarázó változók köre. Érdekes kérdésként merül fel a kommentek manuális címkézési módszerének módosítása, ugyanis több megkérdezett bevonása lehetővé tenné a szubjektum szerepének mélyebb vizsgálatát.

## Függelék

A 7. szakaszban bemutatott ábrákhoz tartozó pontos szám adatok az alábbiakban olvashatók:

	ANN pontossági értékek, %			SVM pontossági értékek, %		
	STAT	TDM	TDM+STAT	STAT	TDM	TDM+STAT
Tanítóminta						
0	89,85	90,35	94,31	87,50	93,94	87,50
1	89,11	90,72	91,58	87,87	93,44	87,87
2	88,12	89,98	91,09	86,39	93,56	86,39
3	87,75	90,72	89,73	85,77	93,56	85,77
4	87,62	89,36	92,70	86,63	93,56	86,63
5	87,13	88,49	92,70	86,26	93,94	86,26
6	87,13	88,86	92,70	86,01	93,81	86,01
7	87,13	87,00	91,21	85,52	93,32	85,52
8	87,13	90,70	93,44	86,39	93,81	86,39
9	84,81	88,15	93,09	85,93	93,83	85,93
Tesztminta						
0	74,44	77,78	76,67	74,44	80,00	74,44
1	74,44	81,11	65,56	68,89	72,22	68,89
2	80,00	83,33	87,78	84,44	82,22	84,44
3	93,33	86,67	91,11	91,11	80,00	91,11
4	88,89	85,56	87,78	84,44	87,78	84,44
5	88,89	87,78	85,56	88,89	91,11	88,89
6	90,00	86,67	86,67	90,00	90,00	90,00
7	91,11	85,56	90,00	92,22	91,11	92,22
8	85,56	82,22	86,67	86,67	85,56	86,67
9	93,18	93,18	93,18	92,05	94,32	92,05
Különbség						
0	15,41	12,57	17,64	13,06	13,94	13,06
1	14,66	9,61	26,03	18,98	21,22	18,98
2	8,12	6,64	3,31	1,94	11,34	1,94
3	-5,59	4,05	-1,38	-5,34	13,56	-5,34
4	-1,27	3,80	4,92	2,19	5,79	2,19
5	-1,76	0,71	7,14	-2,63	2,82	-2,63
6	-2,87	2,19	6,03	-3,99	3,81	-3,99
7	-3,98	1,45	1,21	-6,70	2,21	-6,70
8	1,57	8,48	6,77	-0,28	8,26	-0,28
9	-8,37	-5,03	-0,10	-6,12	-0,49	-6,12

## Irodalom

1. Burk, S. (2007): An automated scoring system for measuring email emotion. *Marketing Bulletin*, 18, 1–12.
2. Cao, Q., Duan, W., Gan, Q. (2011): Exploring determinants of voting for the „helpfulness” of online user reviews: A text mining approach. *Decision Support Systems*, 50 (2), 511–521.
3. Chen, C. C., Tseng Y. (2011): Quality evaluation of product reviews using an information quality framework. *Decision Support Systems*, 50 (4), 755–768.
4. Chen, P., Lin, C., Schölkopf, B. (2005): A tutorial on n-support vector machines. *Applied Stochastic Models In Business and Industry*, 21, 111–136.
5. Cheung, K., Kwok, J. T., Law, M. H., Tsui, K. (2003): Mining customer product ratings for personalized marketing. *Decision Support Systems*, 35 (2), 231–243.
6. Coussement, K., Van den Poel, D. (2008): Improving customer complaint management by automatic email classification using linguistic style features as predictors. *Decision Support Systems*, 44 (4), 870–882.
7. Danescu-Niculescu-Mizil, C., Kossinets, G., Kleinberg, J., Lee, L. (2009). How opinions are received by online communities: a case study on amazon.com helpfulness votes. *WWW '09 Proceedings of the 18th international conference on World Wide Web*, 141–150.
8. Decker, R., Trusov, M. (2010): Estimating aggregate consumer preferences from online product reviews. *International Journal of Research in Marketing*, 27, 293–307.
9. Dellarocas, C. (2003): The digitization of word of mouth: promise and challenges of online feedback mechanisms. *Management Science*, 49 (10), 1407–24.
10. Duan, H., Zirn, C. (2012): Can we identify manipulative behavior and the corresponding suspects on review websites using supervised learning?, In *Proceedings of NordSec'12*, Berlin, Heidelberg.
11. Duan, W., Gu, B., Whinston, A. B. (2008): The dynamics of online word-of-mouth and product sales – an empirical investigation of the movie industry. *Journal of Retailing*, 84 (2), 233–242.
12. Garnes, Ø. L. (2009): Feature selection for text categorisation, master’s thesis, Norwegian University of Science and Technology, <http://ntnu.diva-portal.org/smash/get/diva2:347827/FULLTEXT01>, Letöltve: 2011.12.13.
13. Guyon, I., Elisseeff, A. (2003): An introduction to variable and feature selection. *Journal of Machine Learning Research*, 3, 1157–1182.
14. Kim, S., Pantel, P., Chklovski, T., Pennacchiotti, M. (2006): Automatically assessing review helpfulness. *Proceedings of Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing*, 423–430.
15. Li, N., Wu, D. D. (2010): Using text mining and sentiment analysis for online forums hotspot detection and forecast. *Decision Support Systems*, 48, 354–368.
16. Liu, J., Cao, Y., Lin, C., Huang, Y., Zhou, M. (2007): Low-quality product review detection in opinion summarization. *Proceedings of the 2007 Joint Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing and Computational Natural Language Learning (EMNLP-CoNLL)*, 334–342.
17. Lu, Y., Tsaparas, P., Ntoulas, A., Polanyi, L. (2010): Exploiting social context for review quality prediction. *WWW '10 Proceedings of the 19th international conference on World Wide Web*, 691–700.

18. O'Mahony, M. P., Smyth, B. (2010): Using readability tests to predict helpful product reviews. In *Proceedings of RIAO'2010*, 164–167.
19. Pan, Y., Zhang, J. Q. (2011): Born unequal: a study of the helpfulness of user-generated product reviews. *Journal of Retailing*, 87 (4), 598–612.
20. Pon, R. K., Cárdenas, A. F., Buttler, D. J., Critchlow, T. J. (2011): Measuring the interestingness of articles in a limited user environment. *Information Processing and Management*, 47, 97–116.
21. Powers, D. M. W. (2011): Evaluation: from precision, recall and F-factor to ROC, informedness, markedness & correlation. *Journal of Machine Learning Technologies*, 2 (1), 37–63.
22. Siersdorfer, S., Chelaru, S., Nejdil, W., Pedro, J. S. (2010): How useful are your comments?: analyzing and predicting youtube comments and comment ratings. *WWW '10 Proceedings of the 19th international conference on World Wide Web*, 891–900.
23. Tsur, O., Rappoport, A. (2009): RevRank: A fully unsupervised algorithm for selecting the most helpful book reviews. *Proceedings of the Third International ICWSM Conference*, 154–161.
24. Wu, G., Greene, D., Cunningham, P. (2010): Merging multiple criteria to identify suspicious reviews. In *Proceedings of RecSys'2010*, 241–244.
25. Xie, S., Wang, G., Lin, S., Yu, P. S. (2012): Review spam detection via temporal pattern discovery, In *Proceedings of the 18th ACM SIGKDD*, New York, 823–831.
26. Yang, Y., Pedersen, J. O. (1997): A comparative study on feature selection in text categorization. *CML '97: Proceedings of the Fourteenth International Conference on Machine Learning*, 412–420.
27. Zhu, F., Zhang, X. M. (2010): Impact of online consumer reviews on sales: The moderating role of product and consumer characteristics. *Journal of Marketing*, 74 (2), 133–148.

#### ASSESSING THE HELPFULNESS OF ONLINE PRODUCT REVIEWS WITH SUPERVISED MACHINE LEARNING TECHNIQUES

In recent years Internet became a major source of information for the corporate marketing function. More and more articles study the opportunities to utilize user-generated web documents. Concept Extraction (Concept Mining) is a potential research direction of extracting information from customer reviews on products. Concept Extraction explores and analyzes customers' opinions on products and focuses on the content, quality or helpfulness of their reviews. In this paper, first we collect and systematize the different approaches of customer review helpfulness, then we present an Artificial Neural Network (ANN) and a Support Vector Machine (SVM) supervised learning method based on three different sets of text features to automatically determine the helpfulness of customer reviews.





## MÁTRIX-ALAPÚ, STRATÉGIAI PROJEKTTERVEZÉSI ELJÁRÁSOK<sup>1</sup>

KOSZTYÁN ZSOLT TIBOR

*Pannon Egyetem, Kvantitatív Módszerek Tanszék*

A hálós projekttervezési eljárások mellett, főleg stratégiai döntések támogatására mátrix-alapú projekttervezési módszereket is használhatunk. Ekkor lehetőségünk van az egyes tevékenységek végrehajtásának fontosságát vagy éppen megvalósítási valószínűségét is jellemezni. Ezáltal lehetőség van egy-egy projektváltozat megvalósítási valószínűségét is meghatározni, illetve a projekttervetek fontosságuk alapján sorrendbe rakni. Itt a legnagyobb kihívást a lehetséges projektváltozatok, illetve projektstruktúrák gyors meghatározása, különböző szempontok szerinti sorrendbe rakása jelenti. Ez a tanulmány e probléma vizsgálatával foglalkozik. Gyors eljárásokat javasolunk, mellyel sorrendbe rakhatók a lehetséges projektváltozatok megvalósítási fontosság, idő, költség- vagy éppen erőforrás-igényeik szerint. A menedzsment kiválaszthatja, hogy egy adott költség-, idő- és erőforrás-igény esetén mely projektek valósíthatók meg. Egy ilyen eljárás alapja lehet egy projektszakértői rendszernek, amely a projektmenedzsment stratégiai döntéseit segítheti. A tanulmány végén a módszereket gyakorlati példán is teszteljük.

*Kulcsszavak:* projekttervezési módszerek, stratégiai döntéstámogatás, szakértői rendszerek.

### 1 Bevezetés

A projekttervezés során leggyakrabban alkalmazott hálótervezési módszerek [1,2,3], Gantt-diagramok [4], ciklogramok [5] elsősorban a tervezési folyamat operatív fázisát segítik [6]. Egy projektterv esetén képesek vagyunk e módszerekkel és az ezekre épülő költség- és erőforrás-tervezési eljárásokkal [7] meghatározni a projekt időtartamát, költségigényét, erőforrás-szükségletét. Azonban olyan kérdések megválaszolásában, ahol döntenünk kell, mely tevékenységet, részprojektet valósítjuk meg, milyen sorrendben végezzük el a tevékenységeket, ha arra több mód is kínálkozik, már nem adnak segítséget ezek az eljárások. Ebben az esetben mátrixos projekttervezési módszereket [8,9] alkalmazhatunk. Ekkor azonban a legnagyobb problémát a lehetséges projekttervek meghatározása illetve azok valamilyen szempont szerinti rendezése, rangsorolása jelenti. Mindezidáig a legtöbb problémára nem létezett gyors egzakt megoldás. A most következő tanulmányban olyan módszereket mutatok be, melyekkel lehetőség van a legrövidebb, legkevésbé költséges, vagy

---

<sup>1</sup>Beérkezett: 2013. március 20. E-mail: [kzst@gtk.uni-pannon.hu](mailto:kzst@gtk.uni-pannon.hu).

éppen a legfontosabb projektváltozat kiválasztására. A módszer alkalmazása során figyelembe vesszük a felállított költség-, idő- és erőforráskorlátokat is.

## 2 Irodalmi áttekintés – mátrixos és hálós tervezési eljárások összehasonlítása

A hálótervezési módszerek mellett elsősorban termékfejlesztési [10] és szoftverfejlesztési [11] projektek kezelésénél egy másik eljárás-család is előtérbe került, amelyeket összefoglalóan mátrixos tervezési eljárásoknak nevezünk.

Mivel a projekthálókat reprezentáló gráfokhoz megadhatók a gráfok szomszédsági mátrixa, első ránézésre azt gondolhatnánk, hogy a tekintett eljárások csak a megjelenítésben különböznek a hálótervezési eljárásoktól. Ugyanakkor a megjelenítésen kívül a két módszertant az is megkülönbözteti, hogy a kifejlesztett algoritmusok a hálón vagy a mátrixon végzik-e a műveleteket.

A mátrixos megjelenítés esetén a sorokban és az oszlopokban a tevékenységek, a cellákban pedig a tevékenységek közötti kapcsolatok jelennek meg. A mátrixos módszerek első változataiban, melyet Design Structure Matrix-nak, illetve Dependency Structure Matrix-nak (vagy röviden csak DSM-nek) neveztek [10,12] még a tevékenységek közötti kapcsolatokat szigorú rákövetkezési relációnak tekintették. Ugyanakkor az eljárások újra kiemelten foglalkoztak a körfolyamatok figyelembevételével, amik fokozatosan kikerültek a hagyományos projekttervezési módszertanok látóköréből. A DSM-módszer legegyszerűbb változata is már 3 alapkapsolatot kezel a tevékenységek között. Ezek a soros kapcsolatok, párhuzamos kapcsolatok, illetve az iteratív kapcsolatok. Bár az iteratív kapcsolatokkal, körfolyamatokkal már egy 1966-ban készült tanulmányban [13] foglalkoztak, ezek az eljárások a projektmenedzsment eszköztárába mégsem épültek be szervesen, pedig mind a termékfejlesztési, mind a karbantartási, mind pedig a szoftverfejlesztési projektek esetén időről-időre vissza kell térni egy korábbi fázisra.

Ezzel szemben a mátrixalapú megközelítés az iteratív kapcsolatok és a körök kezelésére különös figyelmet szentelt; mind a körök megtalálására, mind az esetleges feloldásukra külön tanulmányok készültek (lásd pl. Xiao et al, 2007 [14] partícionáló algoritmusát, amelyet e tanulmány is alkalmaz). Mátrix-alapú módszereket alkalmaztak ütemezésre [15,16], valamint erőforrás-korlátos projektütemezési problémák megoldására is [17]. A hagyományos mátrix-alapú módszerek hátránya azonban, hogy a Steward-féle bináris DSM csak szigorú megelőzési kapcsolatokat kezel (egy tevékenység vagy függ, vagy nem függ más tevékenységtől), nem nyújt további információt az interakció/kölcsönhatás/kapcsolat természetéről.

Későbbi kutatások [18,19] azonban rámutattak, hogy a mátrixban nem csak biztos (determinisztikus) kapcsolatok jelölésére van mód, lehetőség van a kapcsolaterősség mértékének jelölésére is. Ezt a módszert *numerikus DSM-módszernek* (NDSM) nevezik, az „X”-ek helyett számokat, vagy csak a bizonytalanság jelölése esetén „?”-jelet írunk. Az NDSM-módszer alkalmazása során megjeleníthetjük két tevékenység közötti függőség fokát. Ez lehetővé

teszi például egy visszacsatolási hurok valószínűségének megjelenítését, ezáltal prioritások képezhetők a fontos iterációk között a folyamat tervezésében (dsmweb.org). Ez a leírás tulajdonképpen kapcsolati szinten kezeli a rákövetkezési relációk közötti bizonytalanságot. Hogyan lehet a kapcsolatok bizonytalanságát felderíteni? E problémával is számos tanulmány foglalkozott: a tevékenységek függőségi viszonyát meghatározhatják korábbi projekt tapasztalatok [19], de akár szakértői vélemények is [20]. Ezekkel a területekkel részletesebben a következő fejezetekben is foglalkozni fogok.

Informatikai és innovációs projektek esetén nagyon gyakran előfordul, hogy egy tevékenységet akár egymás után sorosan, vagy akár párhuzamosan is végre lehet hajtani. E probléma modellezésére alkalmas a szintén mátrixalapú eljárás, melyet sztochasztikus hálótervezési eljárásnak (angolul: Stochastic Network Planning Method, rövidítve: SNPM) neveztek el [9], utalva arra, hogy eredményül több projekthálót is kaphatunk.

A két elgondolás között az a legfőbb különbség, hogy az SNPM segítségével meg is határozzuk a lehetséges projektstruktúrákat. Ha pl. két tevékenység sorosan és párhuzamosan is végrehajtható, akkor két lehetséges projektstruktúrát kell tekintenünk (az egyik esetben a tevékenységek sorosan, a másikban párhuzamosan hajtódnak végre). A bizonytalan kapcsolatok megvalósításához fontossági, pont- vagy szkorértéket rendelhetünk, illetve a bekövetkezésükhöz valószínűségi érték rendelhető. A bizonytalan kapcsolatok pontértékeiből azután a projektstruktúrákra vonatkozó pontértékek is számíthatók [9]. A módszer segítségével egy sztochasztikus hálótervből, amelyben tevékenységek között bizonytalan kapcsolatok is szerepelhetnek, determinisztikus projekttervek adhatók meg, amelyeket már hagyományos (mátrixos és/vagy hálós) projekttervezési eljárásokkal kezelhetünk, ütemezhetünk, alakíthatunk.

Már az NDSM-módszernél is utaltak arra, hogy a tevékenységek közötti függőségi fokokat valamiféleképpen osztályozzák [19]. A numerikus DSM értékei a diagonálison kívüli cellákban többek között a tevékenységek közötti függőségek relatív fontosságát is reprezentálhatják [18,21]. (Üres cella értéke nulla, amely azt mutatja, hogy a tevékenységek között nincsen függőség.) Ebben a modellben a diagonális értékek a tevékenység elvégzésének idejét mutathatják.

Az SNPM-módszerben is 0-val vagy üres cellával jelölhetjük, ha két tevékenység között *nincs* függőség. 1-essel, ha két tevékenység között *biztos* rákövetkezési reláció van. Ha két tevékenység között a kapcsolat erőssége 0 és 1 között van, akkor azt mondjuk, hogy a tevékenységek között *bizonytalan* kapcsolat áll fent.

Valószínűségi szinten akkor kezelhetjük a tevékenységek közötti kapcsolatot, ha a lehetséges (korábban már hasonló projekteknél megvalósított) technológiai sorrendekre vonatkozóan rendelkezésünkre áll valamilyen a priori információ (ebben az esetben objektív valószínűségekről beszélhetünk), illetve esetlegesen több szakértői vélemény alapján alakítottuk ki a lehetséges technológiai kapcsolatokat (ebben az esetben szubjektív valószínűségekkkel dolgozunk).

Ha nem a valószínűségi leírás mellett döntünk, akkor is beszélhetünk a tevékenységek közötti kapcsolat függőségi fokáról, amelyet a *kapcsolat erősségének* is nevezünk. **A** és **B** tevékenység közötti függőségi fok megmutatja, hogy mennyire fontos, hogy **A** tevékenységet **B** kövesse.

A kapcsolat erőssége és/vagy valószínűsége 0 és 1 között bármilyen értéket felvehet. Bár a bemutatandó módszer szempontjából hasonlóképpen kezelhetők azok a mátrixok, amelyeknél a diagonálison kívüli 0 és 1 közötti számok a kapcsolatok valószínűségét, illetve a kapcsolat erősségét jelölik, mivel tartalmilag mást jelentenek, megkülönböztetjük ezt a két esetet egymástól és másképpen is jelöljük majd őket.

Az SNPM-módszer továbbfejlesztett változatában, mely a *projekt szakértői mátrix* (angolul: Project Expert Matrix, rövidítve: PEM) nevet kapta [11,22], már nem csak a tevékenységek közötti kapcsolatok lehetnek bizonytalanok, sztochasztikusak, hanem a projektben végrehajtandó tevékenységek előfordulása is.

Ekkor is meghatározhatók a lehetséges projekttervek, csak ekkor két lépésben (lásd részletesen: [11]): Első lépésben meg kell határozni, hogy mely tevékenységeket hajtjuk végre. Ezek lesznek az ún. *projektváltozatok*, ahol a tevékenységek megvalósításának bizonytalansága azt jelenti, hogy dönthet úgy a projektvezetés, hogy a tevékenységet megvalósítja, illetve úgy is, hogy a tevékenységeket (kapcsolataikkal együtt) elhagyja a projekttervből. A projektváltozatok meghatározása után második lépésként SNPM-módszer segítségével már meghatározhatók a lehetséges projekttervek. A két lépés után determinisztikus projektterveket kapunk, amelyek már hagyományos projekttervező eszközökkel kezelhetők. A két lépés lehetne egy szakértői modul része, amennyiben létezne egy gyors algoritmus, amely egy ilyen szakértői mátrixból meghatározza a peremfeltételeknek megfelelő (adott idő-, költség- és erőforrás-igényeket nem túllépő) projekttervek közül valamilyen szempont – pl. bekövetkezési valószínűség/megvalósítási fontosság, átfutási idő, költség- és erőforrásigények – szerinti sorrendben legjobbnak értékelt projektváltozatokat. E tanulmány pontosan ilyen keretalgoritmust mutat be.

Nagyszámú projektváltozat és projektstruktúra esetén hagyományos hálótervezési eljárásokkal a fenti probléma nehezen kezelhető, hiszen az ábrázoláshoz vagy meg kell határozni az összes lehetséges változatot, melyeket megfelelő operátorokkal kell összekapcsolni (lásd: GERT=(Graphical Evaluation and Review Technique) módszer [13]), vagy be kell érniük a logikai tervezéssel, ahol szaggatott vonallal tudjuk jelezni a tevékenységek bizonytalanságát (PEG=Project Expert Graph [11]), illetve a tevékenységek közötti bizonytalan kapcsolatokat, de ütemezni nem tudunk a hálón.

Ugyanakkor mátrixos módszerekkel is kihívást jelentett a lehetséges projektváltozatok és az ezen belül lehetséges projektstruktúrák nagy számának kezelése. A korábban bemutatott PEM- [24] és SNPM-módszerek [9] csak az összes lehetséges projektváltozatot, illetve projektstruktúrát adták meg, mely sok bizonytalan tevékenység, illetve kapcsolat esetén nagyon sok lehetséges projekttervet eredményez. Tegyük fel például, hogy  $t$  darab bizonytalan tevékenység van a projekt szakértői mátrixban. Attól függően, hogy  $e$  tevékeny-

ségeket megvalósítjuk, vagy elhagyjuk, összesen  $2^t$  lehetséges projektváltozat létezik. Ami már önmagában is nagy szám, ugyanakkor a lehetséges projektváltozatokon belül még projektstruktúrákat is tekintenünk kell, amely  $k$  bizonytalan kapcsolat esetén szintén  $2^k$  lehetséges projektstruktúrát eredményez. Sokáig reménytelennek tűnt, hogy a nagyszámú projektváltozatokat, projektstruktúrákat adott szempontok szerint (idő-, költség-, erőforrasszükséglet, fontosság stb.) sorrendbe tudjuk rakni. Ezért legtöbb esetben genetikus algoritmusok segítségével lehetett adott célfüggvénynek megfelelő megoldásokat keresni [23,24,25].

Egyetlen esetben tudtunk eddig egzakt, mohó algoritmust adni a fenti problémára, nevezetesen, amikor a cél a legvalószínűbb projektterv megtalálása volt. A [11] tanulmányban bemutatott APS (Agile Project Scheduling) módszer azonban nem volt alkalmazható más célfüggvények (pl. lehető legkisebb átfutási idő, legkisebb projektköltség, legkisebb erőforrás-igény stb.) alkalmazása esetén. Adós maradt továbbá a körfolyamatok kezelésével. Ebben a tanulmányban egy keretalgoritmust olvashatunk, ahol többfajta célfüggvény (pl. legvalószínűbb/legfontosabb, legkisebb költségű/átfutási idejű/erőforrás-igényű projektterv megtalálása) és korlátozó feltétel (pl. idő/költség/erőforrás-korlát) is megadható. Kezelhetők és feloldhatók a körfolyamatok. Így az itt bemutatott módszerek alapját képezhetik egy projektszakértői rendszernek.

### 3 Lehetséges projekttervek rendezése

Mielőtt kiválasztanánk egy adott célfüggvény szerinti legjobb megoldást, a lehetséges projektváltozatokat, illetve projektstruktúrákat megvalósítási valószínűségük, fontosságuk, átfutási idejük, költség- és erőforrás-igényeik alapján pontoznunk kell. Ezeket az értékeket fogjuk a továbbiakban együttesen *szkóroknak*, vagy *pontértékeknek* nevezni. A következő alfejezetben azt fogom bemutatni, hogy hogyan lehet ezeket az értékeket kiszámítani, majd ezután megmutatom, hogy a pontértékeket felhasználva hogyan lehet megtalálni egy adott célfüggvényre nézve, adott korlátokat nem túllépő legjobb megoldást.

#### 3.1 Projektváltozatok, projektstruktúrák jellemzése

A pontértékek megállapításánál kulcsfontosságú lesz a bizonytalan tevékenység-előfordulások, illetve a bizonytalan kapcsolatok kezelése. Négyfajta pontértéket fogunk tekinteni. Ezekkel fogjuk tudni jellemezni a

1. Projektváltozat/projektstruktúra bizonytalanságát
  - a. Előfordulási valószínűségét
  - b. Megvalósítási fontosságát
2. Projektváltozat/projektstruktúra időigényét

3. Projektváltozat/projektstruktúra erőforrás-igényeit
4. Projektváltozat költségigényét

### 3.1.1 Bizonytalanság kezelése

Ahogy az korábban láthattuk, a projektszakértői mátrixban bizonytalan-ként tekinthetjük akár a tevékenységek előfordulását, akár a tevékenységek kapcsolatát is. A bizonytalanságot jellemezhetjük korábbi tapasztalatok alapján valószínűségekkel, de akár megvalósítási fontosságokkal is. Először feltételezzük, hogy korábbi tapasztalatok alapján ezek a bizonytalanságok valószínűségekként jellemezhetők. Ekkor feltételezhető, hogy egy  $i$ -edik tevékenység megvalósítási valószínűsége  $P_i$ -vel jellemezhető. Ekkor annak valószínűsége, hogy  $i$ -edik tevékenység nem valósul meg,  $1 - P_i$ . (Itt az egységesség érdekében a projektváltozatokra vonatkozó értékeket mindig nagy, míg a projektstruktúrákra vonatkozó értékeket (pl. valószínűség, fontosság, átfutási idő stb.) mindig kis betűvel jelöljük.) Ha feltételezzük, hogy a tevékenységek megvalósulási valószínűsége egymástól független, akkor egy  $t$  tevékenységet tartalmazó projektváltozat megvalósulási valószínűsége:  $P = \prod_{i=1}^t T_i$ , ahol  $T_i = P_i$ , ha  $i$ -edik tevékenységet megvalósítjuk, és  $T_i = Q_i = 1 - P_i$ , ha  $i$ -edik tevékenységet elhagyjuk a projektből. Ugyanígy meghatározhatók a projektstruktúrák megvalósulási valószínűsége is. Ha ugyanis egy  $i \rightarrow j$  tevékenység közötti reláció valószínűségét  $p_{i \rightarrow j}$ -vel jellemezzük, akkor  $1 - p_{i \rightarrow j}$ -vel jellemezhetjük annak valószínűségét, hogy a két tevékenység között nincs kapcsolat. A két tevékenység esetén ez azt jelenti, hogy a két tevékenység sorosan, vagy párhuzamosan hajtódik végre.

A lehetséges projektstruktúrák birtokában a menedzsment dönthet arról, hogy a tevékenységeket sorosan vagy párhuzamosan valósítsa meg. Soros végrehajtás esetén kevesebb lesz az átlagos erőforrásigényünk, viszont a projekt időtartama hosszabb lesz, mint a párhuzamos végrehajtás esetén.

A kapcsolatokat ezek alapján két csoportra oszthatjuk: biztos (determinisztikus, kötelező) kapcsolatokra, illetve bizonytalan (sztochasztikus, nem kötelező) kapcsolatokra.

Le kell azonban szögezni, hogy a mátrixos tervezés során nem csupán egy másikfajta ábrázolásról van szó. A kapcsolatoknak értéket adva a lehetséges projektstruktúrák sorrendbe rakhatók. Tegyük fel, hogy ebben a példában a kapcsolatokhoz rendelt értékek valószínűségek lesznek. Ekkor teljesül, hogy annak a valószínűsége, hogy **A** tevékenységet **B** követ,  $p_{A \rightarrow B}$ , akkor annak a valószínűsége, hogy **A** és **B** között nincs rákövetkezési reláció,  $1 - p_{A \rightarrow B}$ .

Ha a relációkhoz rendelhető valószínűség, akkor meghatározható a projektstruktúra valószínűsége is, amely a bizonytalan relációk megvalósításának és meg nem valósításának szorzata lesz.

Ha a kapcsolat erőssége nem valószínűséget, hanem a kapcsolat, mint előírás fontosságát jelöli, akkor a projektstruktúra fontosságának, mint a kapcsolaterősségek fontosságainak összegét lehet tekinteni.

Mivel nem mindegy, hogy hány kapcsolaterősséget adunk/szorzunk össze, így értelmezhető a projektstruktúra átlagos pontértéke, illetve korrigált átl-

gos pontértéke. A projektstruktúra átlagos pontértéke

- kiszámítható a kapcsolatok pontértékeinek *geometriai átlagából*, ha a kapcsolatok figyelembe vételét/elhagyását jellemző pontértékek valószínűségekként értelmezhetők (jelölése:  $\bar{p}$ );
- kiszámítható a kapcsolatok pontértékeinek *számtani átlagából*, ha a kapcsolatok figyelembe vételét/elhagyását jellemző pontértékek fontosságként értelmezhetők (jelölése:  $\bar{p}$ ).

Tekintsük az alábbi példát (1. táblázat), ahol **A**, **B** és **C** tevékenységet valósíthatunk meg. Legyen **A** tevékenység időtartama 5 hónap, **B** tevékenységé 4 hónap, míg **C** tevékenységé 3 hónap. Tegyük fel, hogy a kapcsolatok közötti pontértékek valószínűségekként értelmezhetők. Számítsuk ki a projektstruktúra előfordulási valószínűségét ( $p$ ) és átlagos pontértékét ( $\bar{p}$ )!

SNPM	Reprezentációs gráf	DSM	Projektstruktúra	$p$	$\bar{p}$	TPT																																
		<table border="1"> <tr><td>J</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr> <tr><td>A</td><td></td><td>X</td><td>X</td></tr> <tr><td>B</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	J	A	B	C	A		X	X	B				C					0,504	0,796	9																
J	A	B	C																																			
A		X	X																																			
B																																						
C																																						
		<table border="1"> <tr><td>J</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr> <tr><td>A</td><td></td><td></td><td>X</td></tr> <tr><td>B</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	J	A	B	C	A			X	B				C					0,216	0,600	8																
J	A	B	C																																			
A			X																																			
B																																						
C																																						
		<table border="1"> <tr><td>J</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr> <tr><td>A</td><td></td><td>X</td><td></td></tr> <tr><td>B</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	J	A	B	C	A		X		B				C					0,126	0,501	9																
J	A	B	C																																			
A		X																																				
B																																						
C																																						
		<table border="1"> <tr><td>J</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr> <tr><td>A</td><td></td><td>X</td><td>X</td></tr> <tr><td>B</td><td></td><td></td><td>X</td></tr> <tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	J	A	B	C	A		X	X	B			X	C					0,056	0,383	12																
J	A	B	C																																			
A		X	X																																			
B			X																																			
C																																						
<table border="1"> <tr><td>J</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr> <tr><td>A</td><td></td><td>0,7</td><td>0,8</td></tr> <tr><td>B</td><td></td><td></td><td>0,1</td></tr> <tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	J	A	B	C	A		0,7	0,8	B			0,1	C					<table border="1"> <tr><td>J</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr> <tr><td>A</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>B</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	J	A	B	C	A				B				C					0,054	0,378	5
J	A	B	C																																			
A		0,7	0,8																																			
B			0,1																																			
C																																						
J	A	B	C																																			
A																																						
B																																						
C																																						
		<table border="1"> <tr><td>J</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr> <tr><td>A</td><td></td><td></td><td>X</td></tr> <tr><td>B</td><td></td><td></td><td>X</td></tr> <tr><td>C</td><td></td><td></td><td>X</td></tr> </table>	J	A	B	C	A			X	B			X	C			X		0,024	0,288	8																
J	A	B	C																																			
A			X																																			
B			X																																			
C			X																																			
		<table border="1"> <tr><td>J</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr> <tr><td>A</td><td></td><td>X</td><td></td></tr> <tr><td>B</td><td></td><td></td><td>X</td></tr> <tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	J	A	B	C	A		X		B			X	C					0,014	0,241	12																
J	A	B	C																																			
A		X																																				
B			X																																			
C																																						
		<table border="1"> <tr><td>J</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr> <tr><td>A</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>B</td><td></td><td></td><td>X</td></tr> <tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>	J	A	B	C	A				B			X	C					0,006	0,182	7																
J	A	B	C																																			
A																																						
B			X																																			
C																																						

1. táblázat. 3 bizonytalan kapcsolatot tartalmazó SNPM-mátrix kiértékelése

A projektstruktúra valószínűsége a bizonytalan kapcsolatok valószínűségeinek szorzata lesz. Az első projektstruktúra esetén ez az érték:

$$p_1 = p_{A \rightarrow B} * p_{A \rightarrow C} * (1 - p_{B \rightarrow C}) = 0,7 * 0,8 * (1 - 0,1) = 0,504 ,$$

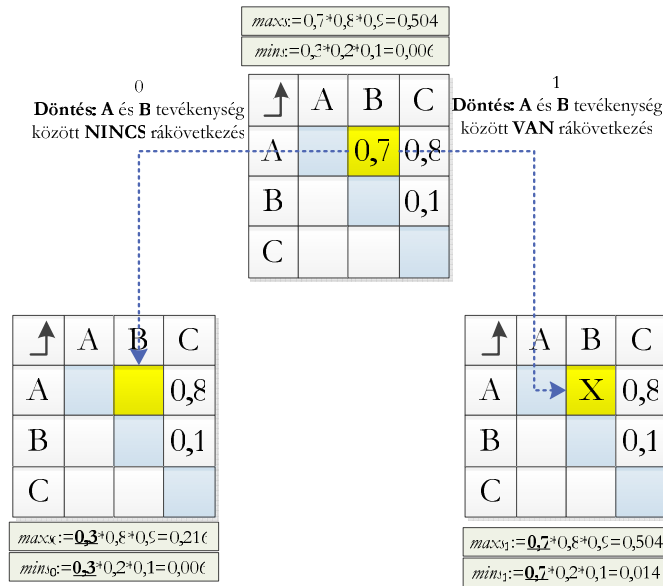
hiszen **A** és **B**, valamint **A** és **C** tevékenységek közötti relációk valószínűsége 0,7, illetve 0,8; **B** és **C** tevékenység közötti reláció elhagyásának valószínűsége pedig  $1 - 0,1$ . Kiszámítva valamennyi projektstruktúra valószínűségét és ezeket összeadva 1-et kapunk, hiszen az összes lehetséges projektstruktúra teljes eseményrendszert alkot. (Az egyes projektstruktúrák egymást kizárják, és valószínűségük összege a biztos esemény valószínűségét adja meg.)

A projektstruktúra átlagos pontértéke megegyezik a korrigált pontértékkel, hiszen ebben a példában minden kapcsolatot bizonytalanak tekintetünk.

Érdeemes megjegyezni, hogy amennyiben valamennyi kapcsolat megvalósulásához ( $p$ ) / elhagyásához ( $q = 1 - p$ ) 0 és 1 közötti számokat rendelünk, valamint a projektstruktúra pontértéke jellemezhető a bizonytalan kapcsolatok pontértékeinek szorzataként, akkor a fentiek szerint meghatározott projektstruktúra értékek összege 1-et fog adni még akkor is, ha ezek a számok nem értelmezhetők valószínűségeként.

A bizonytalan kapcsolatok, illetve bizonytalan tevékenység-előfordulások felhasználásával a projektszakértői mátrix kiértékelése során felső/alsó becslést lehet adni a projektváltozatokhoz, projektstruktúrákhoz tartozó pontértékekhez. Ehhez nem kell mást tennünk, mint a döntésünk eredményeként (mely szerint vagy végrehajtottunk, vagy elhagyunk egy tevékenységet, illetve vagy figyelembe vesszünk, vagy elhagyunk két tevékenység közötti kapcsolatot) kapható pontérték közül mindig a maximálisat/minimálisat tekintjük, akkor az így képzett pontérték éles felső, illetve alsó becslése lesz a megvalósítható projektváltozatok/projektstruktúrák pontértékeinek. Az éles szó itt azt jelenti, hogy a felső és alsó becsléshez tartozó pontérték konkrét projektváltozathoz kötődik. Példaként tekintsük az 1. táblázatban szereplő **SNPM** mátrixot. Legyen  $\mathbf{p} := \mathbf{SNPM}$ ;  $\mathbf{q} := \mathbf{1} - \mathbf{SNPM}$   $3 \times 3$ -as mátrixok. Ekkor a projektstruktúra pontértékének (ami jelen esetben a projektstruktúra megvalósulási valószínűsége, ha a cellákban szereplő értékek a kapcsolatok megvalósulási valószínűségét jelölik és ezek az értékek függetlenek egymástól) maximális értéke:  $maxs = 0,7 * 0,8 * 0,9 = 0,504$ , amihez az 1. táblázatban szereplő első projektstruktúra tartozik; míg a projektstruktúrákhoz tartozó minimális pontérték:  $mins = 0,3 * 0,2 * 0,1 = 0,006$ , ami pont az 1. táblázatban szereplő utolsó projektstruktúra lesz. Ez a felismerés egy kiértékelés során kulcsfontosságú lesz, hiszen ha pl. egy kapcsolat előírásáról, vagy elhagyásáról döntünk, akkor azt a pontértéket fixnek tekintve, a még bizonytalan kapcsolatokat figyelembe véve, számolható egy elérhető maximális és egy minimális pontérték.





1. ábra. Lehetséges projektstruktúrák meghatározása (a kiértékelt bizonytalan kapcsolatot, ha elhagyjuk, üres cellával, ha előírjuk, „X”-szel jelöljük)

A kapcsolatok előírásáról, elhagyásáról hozott döntések az 1. ábra szerint döntési fába rendezhetők. Ez a döntési fa bináris. Pontosan két döntést hozhatunk egy kapcsolatról: vagy előírjuk a kapcsolatot két tevékenység között, vagy elhagyjuk. A döntés után ezen már nem változtatunk, így a kapcsolati pontértékeket a projektstruktúrára vonatkozó pontértékek számításánál már fix értékeknek tekintjük. A projektstruktúrára vonatkozó pontértékeket az alábbiak szerint számoljuk. Legyen adott egy  $n \times n$ -es SNP-mátrix, melynek diagonálison kívüli elemei 0 és 1 közötti értékek lehetnek, ahol 1 a biztos kapcsolatot jelenti két tevékenység között. 0 jelenti, hogy két tevékenység között nincs rákövetkezési reláció. 0 és 1 közötti tetszőleges szám pedig azt jelenti, hogy két tevékenység közötti kapcsolat bizonytalan. Legyen  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$  szintén  $n \times n$ -es mátrixok, ahol  $\mathbf{p}$  a kapcsolatok előírásának,  $\mathbf{q}$  pedig elhagyásának pontértékét jelöli. (Ha a  $\mathbf{p}$  a kapcsolatok előfordulásának valószínűségeit tartalmazó mátrix, akkor  $\mathbf{q} = \mathbf{1} - \mathbf{p}$ , ahol  $\mathbf{1}$  is  $n \times n$ -es, 1-eseket tartalmazó mátrix.)

Ha a kapcsolati pontértékek valószínűségekként értelmezhetők:

$$maxscore(SNPM, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \prod_{\substack{i=1 \dots n, j=1 \dots n \\ p(i,j) \in (0,1)}} \begin{cases} \mathbf{p}(i, j), & \text{ha } SNP M(i, j) = 1 \\ \mathbf{q}(i, j), & \text{ha } SNP M(i, j) = 0 \\ \max\{\mathbf{p}(i, j), \mathbf{q}(i, j)\}, & \text{különben.} \end{cases} \quad (1)$$

Ha a kapcsolati pontértékek fontosságként értelmezhetők:

$$\maxscore(SNPM, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{\substack{i=1\dots n, j=1\dots n \\ p(i,j) \in (0,1)}} \begin{cases} \mathbf{p}(i, j), & \text{ha } SNPM(i, j) = 1 \\ \mathbf{q}(i, j), & \text{ha } SNPM(i, j) = 0 \\ \max\{\mathbf{p}(i, j), \mathbf{q}(i, j)\}, & \text{különben.} \end{cases} \quad (2)$$

Ugyanígy az alsó becslést megadó minscore függvényt is megadhatjuk. Ha a kapcsolati pontértékek valószínűségekként értelmezhetők:

$$\minscore(SNPM, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \prod_{\substack{i=1\dots n, j=1\dots n \\ p(i,j) \in (0,1)}} \begin{cases} \mathbf{p}(i, j), & \text{ha } SNPM(i, j) = 1 \\ \mathbf{q}(i, j), & \text{ha } SNPM(i, j) = 0 \\ \min\{\mathbf{p}(i, j), \mathbf{q}(i, j)\}, & \text{különben.} \end{cases} \quad (3)$$

Ha a kapcsolati pontértékek fontosságként értelmezhetők:

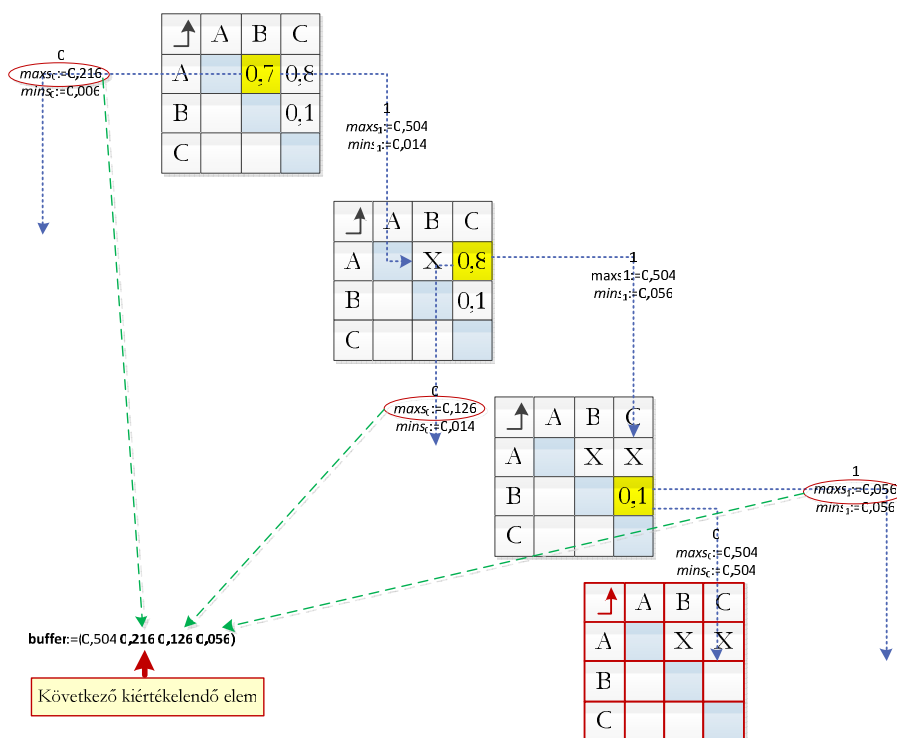
$$\minscore(SNPM, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{\substack{i=1\dots n, j=1\dots n \\ p(i,j) \in (0,1)}} \begin{cases} \mathbf{p}(i, j), & \text{ha } SNPM(i, j) = 1 \\ \mathbf{q}(i, j), & \text{ha } SNPM(i, j) = 0 \\ \min\{\mathbf{p}(i, j), \mathbf{q}(i, j)\}, & \text{különben.} \end{cases} \quad (4)$$

Mivel a

$$\begin{aligned} mins &= \minscore(SNPM, \mathbf{p}, \mathbf{q}), \\ maxs &= \maxscore(SNPM, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{aligned}$$

függvények (éles) alsó/felső becslését adják a projektstruktúrák pontértékeinek, így ezek felhasználhatók megfelelő korlátozó és szétválasztó algoritmusban. A kiértékelés során kapott (bináris) döntési fa tetején lévő *maxs* érték lesz a lehető legnagyobb elérhető pontérték. A második legnagyobb érték legfeljebb a következő szinten jelenhet meg. Így a döntési fában a kiértékelés során mindig abba az irányba kell továbbhaladni, ahol ez a maximális pontérték szerepel. Így *k* bizonytalan kapcsolat esetén *k* lépésben meg lehet határozni a legnagyobb pontértékkel rendelkező projektstruktúrát (2. ábra). Közben a kiértékelés során a következő legnagyobb pontértékkel is találkozunk, amely legfeljebb a következő szinten szerepelhet.

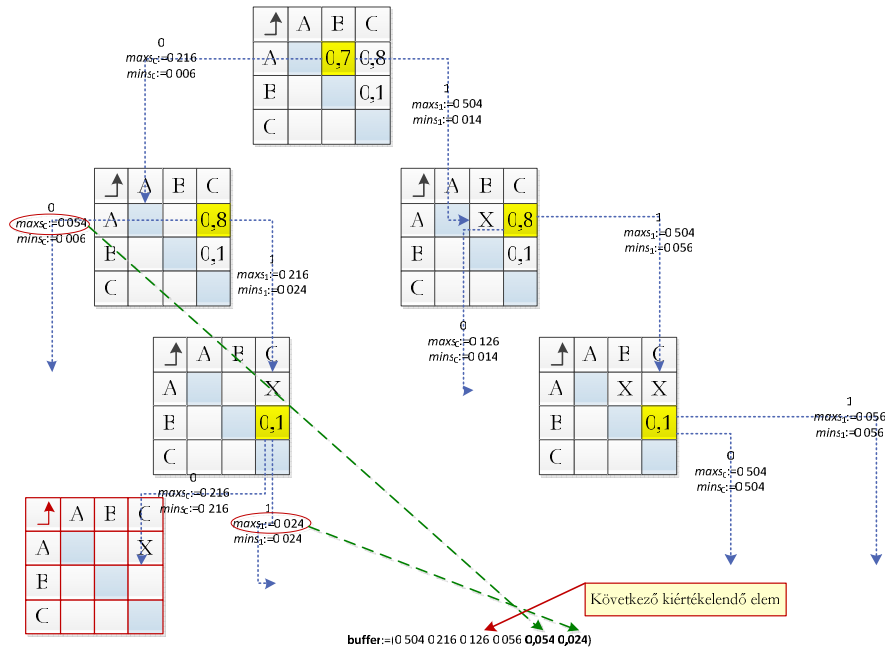
Ha elmentjük egy rendezett *buffer* halmazba a ki nem értékelt pontértéket, akkor bármilyen sorrendben is értékeljük ki a kapcsolatokat (bármilyen sorrendben is döntsünk róluk, hogy előírjuk-e vagy elhagyjuk-e őket), e halmaz következő eleme a következő legnagyobb pontértékkel rendelkező projektstruktúra lesz. Ennek oka a bináris döntési fa rendezettségében keresendő.



2. ábra. Legnagyobb pontértékkel rendelkező projektstruktúra megtalálása (a buffer-halmaz vastaggal szedett elemei a kiértékelés során újonnan bekerült elemek)

A következő pontértékkel rendelkező projektstruktúrát többféleképpen is meghatározhatjuk. Legegyszerűbb megoldás, hogy a buffer-halmazban eltárolt következő pontértékkel rendelkező elemet keressük. Felhasználjuk, hogy azt az ágat nem kell kiértékelnünk, ahol a *minscore* függvény értéke a keresendő érték felett, illetve a *maxscore* értéke a keresendő érték alatt van. A bejárásnál eltároljuk a ki nem értékelt ágak *maxscore* értékeit (2-3. ábra).

A kiértékelés gyorsítható, ha a bizonytalan függőségek, illetve projekt változatok esetén a bizonytalan tevékenység-előfordulások kiértékelését nem tetszőleges sorrendben végezzük, hanem azon kapcsolatok/tevékenységek kiértékelését végezzük el először, amelyeknél a kapcsolat (vagy tevékenység) megvalósításának (vagy elhagyásának) a pontértéke a legnagyobb.



3. ábra. Kiértékelés menete, ha a keresendő elem a második legnagyobb felvehető érték

### Körök feloldása

Az előző példákban feltettük, hogy a projekt nem tartalmaz kört. Vagyis a mátrix felsőháromszög-mátrixba rendezhető. Azonban a lehetséges projektstruktúrák meghatározásánál ezt sehol nem használtuk ki. Az ütemezésnél is csak annyit kell kizárnunk, hogy 1 valószínűségű körfolyamat nem lehet a reprezentációs gráfban, illetve a projektstruktúrában. Éppen ezért először partícionáljuk az SNPM-mátrixot, majd a körfolyamatokat oldjuk fel úgy, hogy kiszámítjuk a visszacsatolás eredményeképpen a módosított átfutási időkkkel a lehetséges projekttervek átfutási idejét. Lássunk erre egy példát. Legyen a partícionált SNPM-mátrixunk az alábbi 2. táblázatban szereplő mátrix, ahol **A** tevékenység időtartama 5 hónap, **B** tevékenységé 4 hónap, míg **C** tevékenységé 3 hónap. Értékeljük ki először az előzőek alapján a lehetséges projektstruktúrákat úgy, hogy először csak a mátrix felső háromszög részét tekintjük. Tegyük fel, hogy a mátrixban szereplő értékek a kapcsolatok valószínűségét jelentik.

SNPM	Kör(ök) meghatározása	Körök feloldása	AoN logikai gráf																																																
	<table border="1"> <tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr> <tr><td>A</td><td></td><td>X</td><td></td></tr> <tr><td>B</td><td></td><td></td><td>X</td></tr> <tr><td>C</td><td></td><td>0,2</td><td></td></tr> </table>		A	B	C	A		X		B			X	C		0,2		<table border="1"> <tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr> <tr><td>A</td><td></td><td>X</td><td></td></tr> <tr><td>B</td><td></td><td></td><td>X</td></tr> <tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>		A	B	C	A		X		B			X	C																				
	A	B	C																																																
A		X																																																	
B			X																																																
C		0,2																																																	
	A	B	C																																																
A		X																																																	
B			X																																																
C																																																			
<table border="1"> <tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr> <tr><td>A</td><td></td><td>1</td><td></td></tr> <tr><td>B</td><td></td><td></td><td>0,7</td></tr> <tr><td>C</td><td>0,2</td><td></td><td></td></tr> </table>		A	B	C	A		1		B			0,7	C	0,2			<table border="1"> <tr><td></td><td>C</td><td>A</td><td>B</td></tr> <tr><td>C</td><td></td><td>0,2</td><td></td></tr> <tr><td>A</td><td></td><td></td><td>X</td></tr> <tr><td>B</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>		C	A	B	C		0,2		A			X	B				<table border="1"> <tr><td></td><td>C</td><td>A</td><td>B</td></tr> <tr><td>C</td><td></td><td>X</td><td></td></tr> <tr><td>A</td><td></td><td></td><td>X</td></tr> <tr><td>B</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>		C	A	B	C		X		A			X	B				
	A	B	C																																																
A		1																																																	
B			0,7																																																
C	0,2																																																		
	C	A	B																																																
C		0,2																																																	
A			X																																																
B																																																			
	C	A	B																																																
C		X																																																	
A			X																																																
B																																																			
		<table border="1"> <tr><td></td><td>C</td><td>A</td><td>B</td></tr> <tr><td>C</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>A</td><td></td><td></td><td>X</td></tr> <tr><td>B</td><td></td><td></td><td></td></tr> </table>		C	A	B	C				A			X	B																																				
	C	A	B																																																
C																																																			
A			X																																																
B																																																			

2. táblázat. Körök feloldása

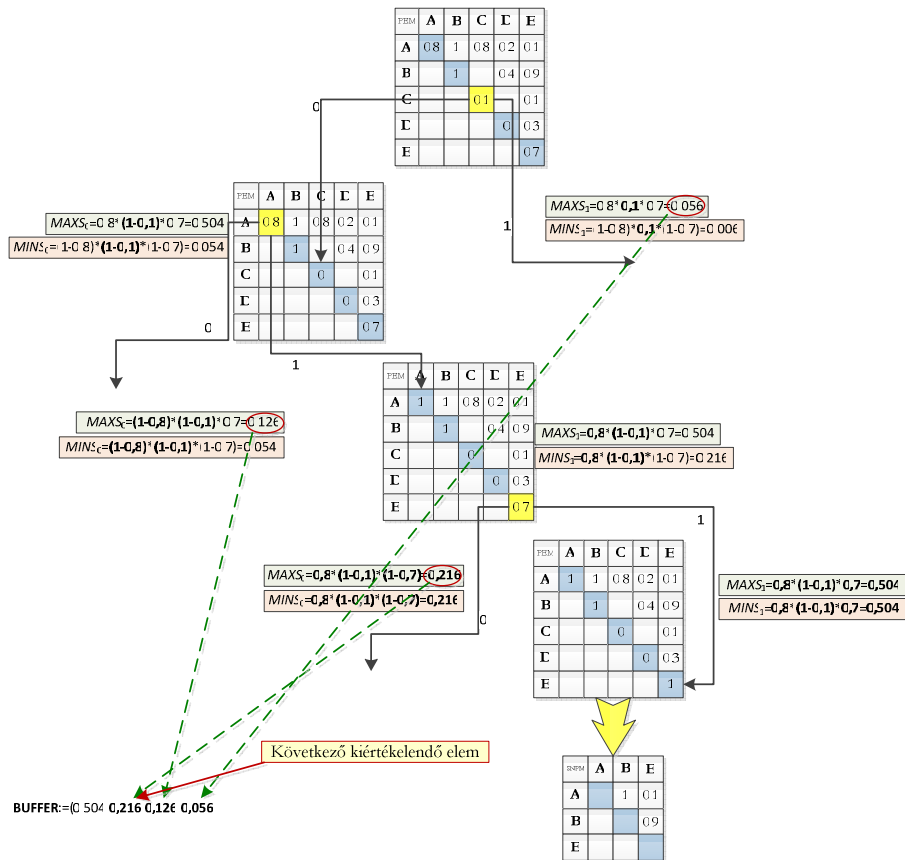
Ha a partícionált SNPM mátrix tartalmaz kört, akkor először meg kell határozni a lehetséges projektstruktúrákat a mátrix felsőháromszög értékeinek figyelembevételével. Ha a mátrix továbbra is tartalmaz kört, akkor a GERT-módszernél (Graphical Evaluation and Review Technique) [13] alkalmazott módon fel kell oldani a kört. Ekkor (ezt a projektstruktúrát  $\lambda$ -vel jelölve) **A** tevékenység időtartama  $d_{A'} = d_A / (1 - p) = 5 / (1 - 0,2) = 6,25$  hónap,  $d_{B'} = 5$  hónap, míg  $d_{C'} = 3,75$  hónap. Így ekkor a várható átfutási idő  $TPT' = d_{A'} + d_{B'} + d_{C'} = 6,25 + 5 + 3,75 = 15$  hónap. Ez a projektstruktúra akkor teljesül, ha **B** és **C** tevékenység közötti kapcsolat is megvalósul, aminek a valószínűsége 0,7. Ha a **B** és a **C** tevékenység közötti kapcsolat elhagyható, akkor már nem lesz kör a hálózatban. Ebből adódóan meghatározható egy új SNPM-mátrix, mely esetében **C** és **A** tevékenység közötti kapcsolat valószínűsége 0,2 lesz. Ekkor a két lehetséges projektstruktúra megvalósulásának valószínűsége  $(1 - 0,7) * 0,2 = 0,06$ , illetve  $(1 - 0,7) * (1 - 0,2) = 0,24$ . Az átfutási idők  $TPT_1 = d_C + d_A + d_B = 3 + 5 + 4 = 12$  hónap, míg a másik esetben  $TPT_2 = \max(d_C, d_A + d_B) = \max(3, 5 + 4) = 9$ . Ekkor is teljes eseményrendszert kapunk, hiszen  $p' + p_1 + p_2 = 0,7 + 0,06 + 0,24 = 1$  lesz.

Ilyen módon tehát 2 lépésben a körök is kezelhetők, illetve feloldhatók a hálózatban.

### Projektváltozatok meghatározása

Hasonlóan a projektstruktúrák pontértékeinek meghatározásához, a projektváltozatok pontértékei is megadhatók. A tevékenységek megvalósítási szintjén a pontérték jelenthet előfordulási valószínűséget, illetve a tevékenység megvalósításának fontosságát is. Ennek megfelelően a tevékenységek pontértékeiből származtatott projektváltozatokra vonatkozó pontérték jelenthet előfordulási valószínűséget, vagy egy, a tevékenységek megvalósításából származtatott megvalósítási prioritást.

A projektváltozatok meghatározása után az átlóban lévő üres cellák esetén az üres oszlopokat és üres sorokat elhagyjuk (4. ábra), így egy SNPM mátrixot kapunk, amit a fenti módon kiértékelhetünk.



4. ábra. Legnagyobb pontértékkel rendelkező projektváltozat meghatározása

A valószínűségek/fontosságok szerinti sorrend nem feltétlenül adja meg az időtartam minimalizálása szerinti sorrendet. Éppen ezért a kiértékelés során komplex célfüggvényeket határozhatunk meg, melyekben a valószínűségek/fontosságok mellett az időtartamok és erőforrás-igények is szerepet játszanak.

### 3.1.2 Átfutási idők, költség- és erőforrás-igények becslése

Időtervezés esetén (ha a követő tevékenység nem kezdődhet előbb, mint a megelőző), akkor a projekt átfutási idejének felső becslését az a projektstruktúra adja, amely esetén valamennyi bizonytalan kapcsolat megvalósul („soros végrehajtás”). Az átfutási idő alsó becslése pedig az a projektstruktúra lesz, ahol a tevékenységek párhuzamosan hajtódnak végre, vagyis a bizonytalan kapcsolatokat elhagyjuk a projekthálóból. Ekkor az átfutási idő becslésére vonatkozó  $maxscore_{TPT}$  és  $minscore_{TPT}$  értékek a következőképpen adhatók meg:

$$minscore_{TPT} := MPM([\text{SNPM}], \mathbf{t}),$$

$$maxscore_{TPT} := MPM([\text{SNPM}], \mathbf{t}),$$

ahol  $[\cdot]$  az alsó egészrészt, míg  $\lceil \cdot \rceil$  a felső egészrészt jelölik,  $\mathbf{t}$  pedig a tevékenységek időtartamait tartalmazó vektor. Az MPM függvény egy adjacencia mátrix segítségével leírt, kört nem tartalmazó tevékenység-csomópontú hálón számolja ki a  $\mathbf{t}$  vektorban szereplő tevékenységidők alapján a projektstruktúra átfutási idejét.


Példaképpen tekintsük az előző feladatot. Itt  $\mathbf{SNPM} = \begin{pmatrix} 0 & 0,7 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Ekkor  $\lfloor \mathbf{SNPM} \rfloor = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , ami a teljes párhuzamosítást,  $\lceil \mathbf{SNPM} \rceil =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , ami valamennyi kapcsolat megvalósítását jelenti. Mivel  $d_A = 5$ ,  $d_B = 4$ ,  $d_C = 3$  hónap időtartamot igényel, ezért a maximális párhuzamosítás melletti átfutási idő 5 hónapot, míg valamennyi kapcsolat betartása esetén 12 hónapot igényelne a projekt megvalósítása.

Egy tevékenység-csomópontú hálótervezési, pl. MPM-módszerrel kiszámítva az átfutási időket, a legnagyobb értéket valamennyi kapcsolat figyelembevétele esetén kapjuk. Azonban még ekkor is elhagyhatók azok a kapcsolatok, amelyek nem kritikus úton vannak (3. táblázat).

Párhuzamos végrehajtás (TPT=5)				Valamennyi kapcsolat szerepeltetése (TPT=12)				Soros végrehajtás (TPT=12)			
	A	B	C	A	A	B	C		A	B	C
A				A	X	X		A	X		
B				B		X		B		X	
C				C			X	C			X



3. táblázat. Nem kritikus úton lévő kapcsolatok elhagyása

Látható, hogy a projekt átfutási ideje nem változott, ugyanakkor a kapott hálóstruktúra egyszerűbb lett.

Amíg a maximális párhuzamosítás adja a legrövidebb időt, addig az is igaz, hogyha a tevékenységeket párhuzamosan hajtjuk végre, akkor igénylik a legtöbb erőforrást, míg a soros végrehajtás adja a legkevesebb átlagos erőforrásigényt. Az átlagos erőforrás-igényt itt sem befolyásolja, hogy a nem kritikus úton lévő bizonytalan kapcsolatokat megtartjuk vagy sem. Ugyanakkor minél kevesebb megkötésünk van, tehát minél kevesebb kapcsolatot tartalmaz a háló, annál könnyebb ezt az átlagos erőforrásigényt egy erőforrás-kiegyenlítési algoritmussal [7] elérni, vagy legalábbis megközelíteni.

### Projektváltozatok költségbeclése

Ha nem a fontosság vagy a valószínűség alapján rangsoroljuk az egyes projektváltozatokat, hanem pl. a költségigényeik szerint, akkor elmondható, hogy azok a projektváltozatok tartalmazzák a legkevesebb költséget, ahol a lehető legkevesebb tevékenységet valósítjuk meg (a bizonytalan tevékenységeket elhagyjuk). Ugyanígy elmondható, hogy a legtöbb költséget az a projekt ered-

ményezi, ahol valamennyi (bizonytalan) tevékenységet megvalósítjuk. Ezek alapján adható egy *MAXSCORETPC* és egy *MINSCORETPC* függvény az alábbiak szerint. Jelölje  $n$  tevékenység esetén  $\mathbf{PEM}^\wedge$ -mátrix azt az  $n \times n$ -es mátrixot, ahol a  $\mathbf{PEM}$ -mátrix diagonálisában lévő értékek felső egész részét vesszük. Ha tehát  $PEM(i, j)$  ( $i, j := 1 \dots n$ ) a  $\mathbf{PEM}$ -mátrix eleme, akkor  $i \neq j$  esetén  $PEM(i, j)$   $\mathbf{PEM}^\wedge$ -mátrix eleme is, ugyanakkor  $i = j$  esetén  $[PEM(i, i)]$  eleme  $\mathbf{PEM}^\wedge$ -mátrixnak. Ugyanígy  $\mathbf{PEM}$ -mátrix módosítását  $\mathbf{PEM}^\vee$ -mátrixszal jelöljük, ahol az eredeti  $\mathbf{PEM}$ -mátrix diagonálisában lévő elemek alsó egész részét fogja tartalmazni az eredményül kapott  $\mathbf{PEM}^\vee$ -mátrix. Ezek alapján az előző példára:

$$\mathbf{PEM} = \begin{pmatrix} 0,8 & 1 & 0,8 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,4 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{PEM}^\wedge = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0,8 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,4 & 0,9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{PEM}^\vee = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0,8 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,4 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Legyen  $TPC(\mathbf{PEM}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{COSTS})$  a  $\mathbf{PEM}$ -mátrixban szereplő biztos tevékenység-előfordulásokra vonatkozó költségigények összegét megadó függvény, ahol  $\mathbf{COSTS}$  a tevékenységek költségigényét tartalmazó vektor. Ekkor

$$MAXSCORETPC(\mathbf{PEM}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{COSTS}) = TPC(\mathbf{PEM}^\wedge, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{COSTS}),$$

$$MINSCORETPC(\mathbf{PEM}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{COSTS}) = TPC(\mathbf{PEM}^\vee, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{COSTS}).$$

### Projektváltozatok átfutási idejének és erőforrás-igényének becslése

Átfutási időt, átlagos erőforrás-igényt projektstruktúrák szintjén számolhatunk. Ugyanakkor az átfutási idő, valamint az átlagos erőforrásigény alsó és felső becslését már projektváltozatok szintjén is elvégezhetjük.

Az átfutási idő felső becslése az a projektstruktúra lesz, ahol valamennyi bizonytalan tevékenységet megvalósítunk és valamennyi bizonytalan kapcsolatot előírunk. Az átfutási idő minimuma (legkorábbi kezdésre való ütemezés esetén) az a projektstruktúra lesz, ahol valamennyi bizonytalan tevékenységet elhagyunk és valamennyi bizonytalan kapcsolatot feloldunk. Az átlagos erőforrás-igény felső becslését akkor kapjuk, ha egy  $\mathbf{PEM}$ -mátrixban valamennyi (bizonytalan) tevékenységet megvalósítjuk, de valamennyi (bizonytalan) kapcsolatot feloldunk. A legkisebb átlagos erőforrás-igényt akkor kapjuk, ha valamennyi (bizonytalan) tevékenységet elhagyjuk, ugyanakkor valamennyi



erőforrás-igényt előírjuk. Jelölje  $\mathbf{T}$  a tevékenységek időtartamát tartalmazó  $n$  elemű vektort,  $\mathbf{R}$  az erőforrás-igényeket tartalmazó  $n \times r$ -es mátrixot, ahol  $n$  a tevékenységek,  $r$  az erőforrások számát jelöli. Jelölje  $\mathbf{P}$   $n \times n$ -es mátrix a tevékenységek és a kapcsolatok megvalósításának fontosságát/valószínűségét,  $\mathbf{Q}$   $n \times n$ -es mátrix a tevékenységek és kapcsolatok elhagyásának valószínűségét/fontosságát. Jelölje továbbá  $t := \text{synchronize}_t(\mathbf{PEM}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{T})$  azt a függvényt, amely a  $\mathbf{PEM}$ -mátrix diagonálisában lévő üres cellák alapján  $\mathbf{T}$  vektorból törli a meg nem valósított tevékenységeket és adja vissza a  $\mathbf{t}$  vektorba.

Ekkor legyen

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &:= \text{synchronize}_t([\mathbf{PEM}], \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{T}) ; \\ \mathbf{t}_0 &:= \text{synchronize}_t([\mathbf{PEM}], \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{T}) . \end{aligned}$$

Tekintsük kiindulásképpen az alábbi  $\mathbf{PEM}$  mátrixot. Legyen példánkban  $\mathbf{P} := \mathbf{PEM}$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{1} - \mathbf{PEM}$ , ahol  $\mathbf{1}$  egy  $n \times n$ -es 1-eseket tartalmazó mátrix.

$$\mathbf{PEM} = \begin{pmatrix} 0,8 & 1 & 0,8 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,4 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{SNPM}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{SNPM}_0 = (1)$ . Legyenek adottak a tevékenységek idő- és erőforrásadatai. Az időadatokat napokban tartalmazó  $\mathbf{T}$  vektor legyen a következőképpen megadva:  $\mathbf{T} = (4; 2; 4; 10; 3)$  hét. Az erőforrásigényeket megadó  $\mathbf{R}$  vektor:  $\mathbf{R} = (2; 3; 8; 14; 1)$  fő. Ezek alapján határozzuk meg a maximális prioritású projekttervet, ami 8 hét alatt 4 fővel elvégezhető. (A szakemberek heti bére legyen egységesen 300 EUR/hét). (Az egyszerűség kedvéért a költségek tekintetében csak erőforrásköltségekkel számolunk.) Ebből adódóan az erőforrásköltségeket  $\mathbf{COSTS}$  vektor jelöli EUR-ban.  $\mathbf{COSTS} = (2400; 1800; 9600; 42000; 900)$  EUR. Ekkor  $\mathbf{t}_1 = (4; 2; 4; 3)$  nap.  $\mathbf{t}_0 := 2$  nap, hiszen 4. tevékenységet, melyeknek időtartama 10 nap, mindenképpen elhagyunk, míg az összes bizonytalan kapcsolat elhagyása esetén csak  $\mathbf{B}$  tevékenységet fogjuk megvalósítani. A tevékenységidők felső becslése  $\mathbf{MAXT} := \mathbf{MPM}(\mathbf{SNPM}_1, \mathbf{t}_1)$ , alsó becslése  $\mathbf{MINT} := \mathbf{MPM}(\mathbf{SNPM}_0, \mathbf{t}_0)$ .

Ugyanígy becsülhetők az erőforrás-igények átlagai. Ez az érték akkor minimális, ha valamennyi bizonytalan tevékenységet elhagyjuk, és valamennyi kapcsolatot előírjuk. Ezt a  $[\mathbf{PEM}^\vee]$  mátrix adja meg. A legtöbb átlagos erőforrás-igény akkor jelentkezik, ha valamennyi tevékenységet megvalósítjuk, és valamennyi bizonytalan kapcsolatot feloldjuk. Ezt a  $[\mathbf{PEM}^\wedge]$  mátrix adja meg. Ha az eredményül kapott projektterven erőforrás-kiegyenlítést szeretnénk végezni, akkor az erőforrás-igény(ek)re vonatkozó mutatók az erőforrás-igény(ek) átlagát jelölik. Ha az eredményül kapott projekttervekből egy olyan erőforrás-tervet szeretnénk meghatározni, amely az erőforrás-korlátot

nem lépi túl, de a tevékenységek a lehető legkorábbi időpontban kezdődnek, akkor az erőforrás-igények jellemzésére a legmegfelelőbb mutató az erőforrás-igények maximuma (**MAXR**). Ha ugyanis ez a mutató az erőforrás-korlát alatt van, akkor nincs is szükségünk erőforrás-optimalizálásra. Ha pedig felette van, akkor is csak a tényleges projektterv ismeretében kell az erőforrás-tervezést elvégezni. Ebből adódóan a kiértékeléskor egy lehetséges projektváltozatot, projektstruktúrát nem zárunk ki pusztán azért, mert a maximális erőforrás-igény túllépi az erőforrás-korlátot. Csak akkor zárunk ki egy projekttervet a lehetséges megoldások közül, ha nem található rá megengedett, illetve egy optimáló, pl. ERALL-OPT módszerrel [26] számítható optimális megoldás.

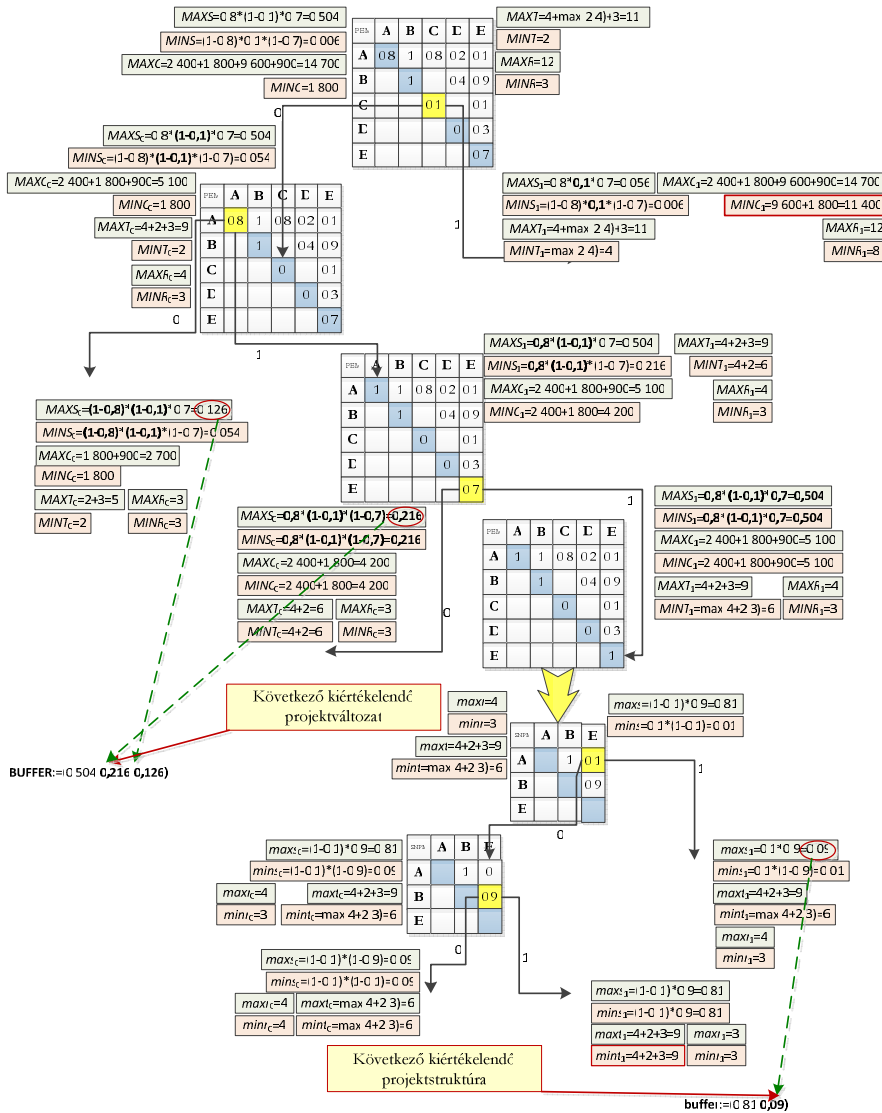
### 3.2 Projektváltozatok és projektstruktúrák gyors meghatározása

Legyen az erőforrás-korlát 4 fő, az időkorlát 8 hét, a költségkorlát pedig legyen 6000 EUR. Határozzuk meg a korlátokat kielégítő legjobb (legnagyobb pontértékkel rendelkező/legnagyobb valószínűséggel bekövetkező) megoldást! Az átlagos erőforrás-igény helyett számítsuk ki az erőforrás-igények maximumát és a pontértékeket e szerint számoljuk ki. A 4. táblázatban szereplő jelöléseket használjuk.

Jelölés	Magyarázat
<i>MAXS</i>	A projektváltozatokra vonatkozó legnagyobb elérhető pontérték
<i>MINs</i>	A projektváltozatokra vonatkozó legkisebb elérhető pontérték
<i>maxs</i>	A projektstruktúrákra vonatkozó legnagyobb elérhető pontérték
<i>mins</i>	A projektstruktúrákra vonatkozó legkisebb elérhető pontérték
<i>MAXC</i>	A projektváltozatokra vonatkozó legnagyobb elérhető költségigény
<i>MINC</i>	A projektváltozatokra vonatkozó legkisebb elérhető költségigény
<i>MAXT</i>	A projektváltozatokra vonatkozó legnagyobb elérhető időigény
<i>MINT</i>	A projektváltozatokra vonatkozó legkisebb elérhető időigény
<i>maxt</i>	A projektstruktúrákra vonatkozó legnagyobb elérhető időigény
<i>mint</i>	A projektstruktúrákra vonatkozó legkisebb elérhető időigény
<i>MAXR</i>	A projektváltozatokra vonatkozó legnagyobb erőforrás-igény maximuma
<i>MINR</i>	A projektváltozatokra vonatkozó legkisebb erőforrás-igény maximuma
<i>maxr</i>	A projektstruktúrákra vonatkozó legnagyobb erőforrás-igény maximuma
<i>minr</i>	A projektstruktúrákra vonatkozó legkisebb erőforrás-igény maximuma

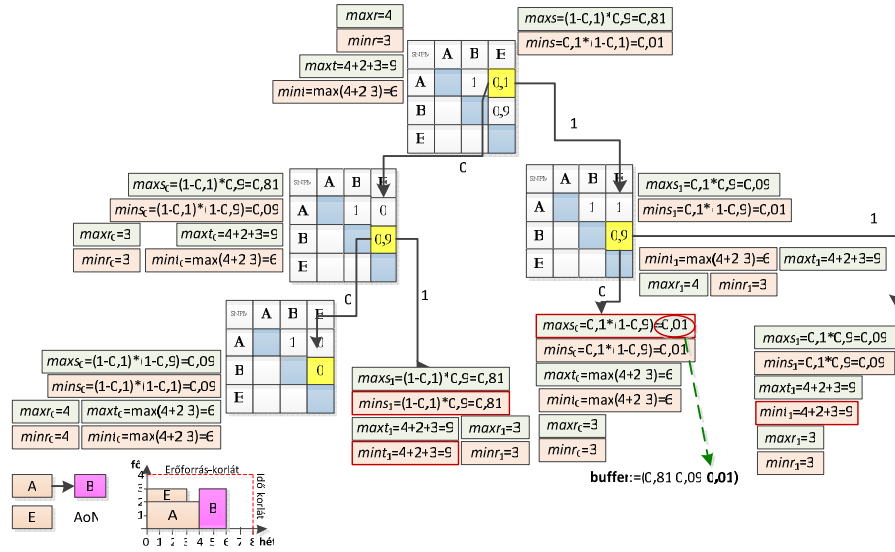
4. táblázat. Pontértékek jelölései és magyarázata

Ahogy a 4. táblázatból is látható, nagybetűk mutatják a projektváltozatok, míg kisbetűk a projektstruktúrák jellemzőit.



5. ábra. Korlátoknak megfelelő projektterv meghatározása

Az 5. ábrán látható, hogy a legvalószínűbb projektstruktúra nem felel meg a feltételeknek, ebből adódóan a következő projektstruktúrát kell megkeresnünk, mely pontértéke 0,09. Ebből kettő is található, ugyanakkor csak egy felel meg a korlátoknak (6. ábra). A következő projektváltozatot csak akkor kell tekinteni, ha az itt található projektstruktúrához egyetlen megfelelő projektváltozat sem tartozik.



6. ábra. Korlátoknak megfelelő projektterv meghatározása

Ha a bizonytalan tevékenységek száma  $t$ , a bizonytalan kapcsolatok száma pedig  $k$ , akkor  $O(k+t)$  lépésben lehet meghatározni a legnagyobb pontértékkel rendelkező megoldást. Az  $n$ -edik legjobb megoldást pedig  $O(n(k+t))$  lépésben. Az alábbi pszeudokód mutatja a fenti ábrán bemutatott algoritmus vázát. A fontosabb alkalmazott eljárásokat tartalmazza az 5. táblázat.

Függvény	Magyarázat
$maxscore(SNPM, p, q)$	A projektstruktúrára vonatkozó legnagyobb elérhető pontértéket adja meg.
$minscore(SNPM, p, q)$	A projektstruktúrára vonatkozó legkisebb elérhető pontértéket adja meg.
$maxscoreTPT(SNPM, p, q, t)$	A leghosszabb lehetséges projektstruktúra időtartamát adja vissza.
$minscoreTPT(SNPM, p, q, t)$	A legrövidebb lehetséges projektstruktúra időtartamát adja vissza.
$ERALL - OPT(SNPM, maxRES, t, r)$	Egy kiértékelt projektstruktúrára vonatkozó optimális erőforrás-allokációt adja meg.
$MAXSCORE(PEM, P, Q)$	A projektváltozatokra vonatkozó legnagyobb elérhető pontértéket adja meg.
$MINSCORE(PEM, P, Q)$	A projektváltozatokra vonatkozó legkisebb elérhető pontértéket adja meg.
$MAXSCORETPC(PEM, P, Q, COSTS)$	A projektváltozatokra vonatkozó legnagyobb költségigényt adja meg.
$MINSCORETPC(PEM, P, Q, COSTS)$	A projektváltozatokra vonatkozó legkisebb költségigényt adja meg.
$MAXSCORETPT(PEM, P, Q, T)$	A leghosszabb lehetséges projektváltozat időtartamát adja vissza.
$MINSCORETPT(PEM, P, Q, T)$	A legrövidebb lehetséges projektváltozat időtartamát adja vissza.

5. táblázat. Fontosabb függvények felsorolása és magyarázata

```

1 function DSMs:=DSMfind(SNPM,DSMs,p,q,c,t,r,maxTPT,maxRES):
2 [i,j]=argmax(p,q)where 0<SNPM<1 //bizonytalan kapcsolatok közül keressük meg
3 if i≠0 and j≠0: //a maximális p, vagy q értékűt és adjuk vissza a találat helyét
4 SNPM(i,j):=0 //a bizonytalan ka pcsolat értéke legyen 0.
5 maxS0:=maxscore(SNPM,p,q) | minS0:=minscore(SNPM,p,q)
6 maxT0:=maxscoreTPT(SNPM,p,q,t)
7 minT0:=minscoreTPT(SNPM,p,q,t)
8 if maxS0>=c and minS0<=c and minT0<=maxTPT then:
9 DSMs:=DSMfind(SNPM,DSMs,p,q,t,r,maxTPT,maxRES)
10 else: //Ekkor csak a maxscore értéket mentjük el.
11 if maxS0∈BUFFER then: BUFFER=insertdescend(maxS0)
12 SNPM(i,j):=1 //A bizonytalan kapcsolat értéke legyen 1.
13 maxS1:=maxscore(SNPM,p,q) | minS1:=minscore(SNPM,p,q)
14 maxT1:=maxscoreTPT(SNPM,p,q,t)
15 minT1:=minscoreTPT(SNPM,p,q,t)
16 if maxS1>=c and minS1<=c and minT1<=maxTPT then:
17 DSMs:=DSMfind(SNPM,DSMs,p,q,c,t,r,maxTPT,maxRES)
18 else: //Ekkor csak a maxscore értéket mentjük el.
19 if maxS1∈BUFFER then: BUFFER=insertdescend(maxS1)
20 else: if ERALL-OPT(SNPM,maxRES,t,r) is feasible than : DSMs:=DSMs∪SNPM
21 return DSMs

22 function SNPMs:=SNPMfind(PEM,SNPMs,P,Q,C,T,R,COSTS,maxTPT,maxTPC):
23 i=argmax(diag(P),diag(Q))where 0<diag(PEM)<1 //bizonytalan tevékenységek közül
24 if i≠0: //keressük meg a maximális P, vagy Q értékűt és adjuk vissza a találat helyét
25 PEM(i,i):=0 //A bizonytalan tevékenység értéke legyen 0.
26 MAXS0:=MAXSCORE(PEM,P,Q) | MINS0:=MINSCORE(PEM,P,Q)
27 MAXC0:=MAXSCORETPC(PEM,P,Q,COSTS) | MINC0:=MINSCORETPC(PEM,P,Q,COSTS)
28 MAXT0:=MAXSCORETPT(PEM,P,Q,T) | MINT0:=MINSCORETPT(PEM,P,Q,T)
29 if MAXS0>=C and MINS0<=C and MINC0<=maxTPC and MINT0<=maxTPT then:
30 SNPMs:=SNPMfind(PEM,SNPMs,P,Q,C,T,R,COSTS,maxTPT,maxTPC)
31 else: //Ekkor csak a MAXSCORE értéket mentjük el.
32 if MAXS0∈BUFFER then: BUFFER=insertdescend(maxS0)
33 PEM(i,i):=1 //A bizonytalan tevékenység értéke legyen 1.
34 MAXS1:=MAXSCORE(PEM,P,Q) | MINS1:=MINSCORE(PEM,P,Q)
35 MAXC1:=MAXSCORETPC(PEM,P,Q,COSTS) | MINC1:=MINSCORETPC(PEM,P,Q,COSTS)
36 MAXT1:=MAXSCORETPT(PEM,P,Q,T) | MINT1:=MINSCORETPT(PEM,P,Q,T)
37 if MAXS1>=C and MINS1<=C and MINC1<=maxTPC and MINT1<=maxTPT then:
38 SNPMs:=SNPMfind(PEM,SNPMs,P,Q,C,T,R,COSTS,maxTPT,maxTPC)
39 else: //Ekkor csak a maxscore értéket mentjük el.
40 if MAXS1∈BUFFER then: BUFFER=insertdescend(maxS1)
41 else: SNPMs:=SNPMs∪delete_empty_cells(PEM) //A kiértékelt PEM-et vegyük fel
42 return SNPMs

43 function DSMs=EPR(PEM,P,Q,T,R,COSTS,maxTPT,maxRES,maxTPC)
44 global BUFFER,buffer
45 BUFFER:=MAXSCORE(PEM,P,Q)
46 SNPMs:=∅ | DSMs:=∅
47 i:=1
48 do
49 SNPMs=SNPMs∪SNPMfind(PEM,SNPMs,P,Q,BUFFER(i),T,R,COSTS,maxTPT,maxTPC)
50 p:=synchronize(SNPMs(i),P): //A kitörölt sorokat/oszlopokat P-ből is töröljük
51 q:=synchronize(SNPMs(i),Q): //A kitörölt sorokat/oszlopokat Q-ből is töröljük
52 t:=synchronize_t(SNPMs(i),T): //A kitörölt sorokat/oszlopokat T-ből is töröljük
53 r:=synchronize_r(SNPMs(i),R): //A kitörölt sorokat/oszlopokat R-ből is töröljük
54 buffer:=maxscore(SNPMs(i),p,q)
55 j:=1
56 do
57 DSMs=DSMs∪DSMfind(SNPMs(i),DSMs,p,q,buffer(j),t,r,maxTPT,maxRES)
58 j:=j+1
59 while j<=numel(buffer) and DSMs=∅:
60 i:=i+1
61 while i<=numel(BUFFER) and DSMs=∅:
62 return

```

### 1. pszeudokód: EPR (Expert Project Ranking)

Ezzel a módszerrel a korlátoknak megfelelő legnagyobb pontértékkel rendelkező projektváltozatot, projektstruktúrát lehet meghatározni.

Azonban ez a keretalgoritmus pontértékeket számoló függvények változtatásával átalakítható lehető legrövidebb, lehető legkisebb költséggel rendelkező, vagy akár lehető legkevesebb erőforrást igénylő projektváltozatok, projektstruktúrák meghatározására is. Ehhez csak a pontértékek figyelembe-

vételét kell átalakítanunk. Ami most célfüggvényként szerepelt (pl. lehető legfontosabb projektváltozat, projektstruktúra megtalálása) az lehet most akár korlátozó feltétel, és ami eddig korlátozó feltétel volt (pl. átfutási idő, költségigény), az most célfüggvényként kerül figyelembe.

## 4 Szimulációs eredmények

A szimulációk célja annak bemutatása, hogy nagyszámú lehetséges projektváltozat, illetve projektstruktúra esetén is lehetőség nyílik az első  $m$  legjobb pontértékkel rendelkező, adott korlátoknak megfelelő lehetséges projektterv meghatározására. A tesztelés során először egy projektváltozatot jellemző **SNPM**-mátrixot generáltunk, ahol az átló feletti cellaértékek  $(0, 1)$  között bármilyen számot felvehettek. Ekkor  $n$  tevékenység esetén  $k = n * (n - 1) / 2$  bizonytalan kapcsolatot kapunk, amely  $2^k = 2^{n*(n-1)/2}$  lehetséges projektstruktúrát jelent, ahol  $k$  a bizonytalan kapcsolatokat,  $n$  pedig a tevékenységek számát jelöli. Ekkor a feladat az első  $m$  legjobb pontértékkel rendelkező projektváltozat meghatározása volt.

A második szimuláció esetén egy  $n$  tevékenységből álló **PEM**-mátrixot határoztunk meg, ahol az átló és az átló feletti értékek  $(0, 1)$  közötti számokat vehetnek fel. Ebben az esetben a lehetséges projektváltozatok száma  $t = n$  esetén  $2^t = 2^n$ , ahol  $t$  a bizonytalan tevékenység-előfordulások számát,  $n$  pedig a lehetséges tevékenységek számát jelöli. Mindegyik lehetséges projektváltozatot lehet kódolni  $t$  biten ábrázolható bináris számmal. A bináris számban,  $j$ -edik helyi értéken szereplő bináris 0 azt jelöli, hogy azt a  $j$ -edik tevékenységet elhagyjuk. Az 1-es pedig azt, hogy megvalósítjuk. Így pl.  $t = 4$  esetén a bináris 0101 azt jelöli, hogy a második és a negyedik bizonytalan tevékenységet fogjuk megvalósítani, a többit elhagyjuk. Ez lesz a lehetséges projektváltozatok közül decimálisan az 5-ös számú projektváltozat, hiszen a bináris 0101 decimálisan 5-öt jelöl.

A lehetséges projektváltozatokon belül kell azután meghatározni a lehetséges projektstruktúrák számát, ami  $\sum_{i=0}^{2^t-1} 2^{bin_1(i)*(bin_1(i)-1)/2}$ , ahol  $bin_1(i)$  az  $i$  bináris számrendszerben szereplő 1-eseinek számát adja meg. A formula egyszerűsíthető, ha figyelembe vesszük, hogy  $j = 0, 1, 2, \dots, t$  tevékenységet kell tetszőlegesen kiválasztanunk, amit, ha minden tevékenység között lehet kapcsolat, akkor  $2^{j(j-1)/2}$ -féleképpen tudunk elrendezni, hiszen pontosan ennyi projektstruktúra létezhet. Ekkor az összes lehetséges projektstruktúra száma a következőképpen számítható:  $\sum_{j=0}^t \binom{t}{j} 2^{j(j-1)/2}$ . Látható, hogy viszonylag könnyű nagyon sok projektváltozatot, projektstruktúrát tartalmazó projekttervet megadni. Egy  $10 \times 10$ -es PEM-mátrix esetén a lehetséges projektstruktúrák száma már több mint  $3,588 * 10^{13}$ . Belátható, hogy itt nem megoldható, hogy kiszámoljuk az összes lehetőséget, majd azokat sorrendbe rakjuk valamely rendező algoritmussal. Éppen ezért a fent bemutatott módszerekkel fogjuk meghatározni az első  $m$  darab projektstruktúrát úgy, hogy a lehető legnagyobb pontértékkel rendelkező projektváltozatokon belül keressük a lehető legnagyobb pontértékkel rendelkező projektstruktúrákat.

A harmadik szimulációban már a tevékenységekhez költség-, idő- és erőforrás-adatokat is rendelünk. Megvizsgáljuk, hogy az adott idő-, költség- és erőforrás-korlátokat nem túllépő lehetséges projektváltozatok közül melyek lesznek a legnagyobb pontértékűek.

Az olvasóban jogosan felmerülhet a kérdés, ha már 10 tevékenység esetén ekkora mennyiségű lehetséges projektstruktúra közül kell válogatnunk, akkor egy több ezer tevékenységet tartalmazó projektben hogyan lehetne bármilyen algoritmikus módszerrel a lehető legnagyobb pontértékkel rendelkező (legfontosabb, legvalószínűbb) projekttervet megtalálni.

A fenti pontértékek becslése pont a lépésszám csökkentését szolgálta. Láthattuk, hogy  $O(k+t)$  lépésben megtaláltuk a legnagyobb pontértékkel rendelkező projekttervet (projektváltozatot belül lehetséges projektstruktúrát). Ez pl. egy  $n = 1000$ ,  $t = n$ ,  $k = n * (n - 1)/2$ ,  $n \times n$ -es **PEM**-mátrixban legfeljebb  $O(k + t) = O(t + t * (t - 1)/2) = O(t^2)$  lépést jelent. A lépésszám ráadásul nem a tevékenységek számától, hanem a bizonytalan tevékenység-előfordulások és a bizonytalan kapcsolatok számától függ. Így ez az érték is csak egy felső becslése a lehetséges lépésszámnak.

### Lehetséges projektstruktúrák meghatározása

A fenti módon, egy **SNPM**-mátrix átló feletti celláit véletlen számokkal töltöttük fel. Kezdetben feltételeztük, hogy  $\mathbf{p} = \mathbf{SNPM}$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{1} - \mathbf{SNPM}$ . Ebben az esetben az első 1, 10, 100, illetve 1000 projektstruktúrát kellett meghatározni. Arra is kíváncsiak voltunk, hogy az első  $m$  legnagyobb pontértékkel rendelkező projektváltozathoz hány további pontértéket kellett eltárolni. Ahogy az előző példákából láthattuk, ezeket a pontértékeket kell majd megkeresnünk, ha a keresést tovább folytatnánk. Ha a *buffer*-halmaz mérete túlságosan nagy lenne, akkor ez egyrészt arra utal, hogy sok pontértéket kellett kiszámítani, vagyis sok projektstruktúrát kellett meghatározni, másrészt a számítás és a *buffer*-halmaz rendezése sok időt venne igénybe.

$n$	Projektváltozatok száma	$m$	Buffer-halmaz mérete
5	$2^{10} = 1024$	1	11
		10	22
		100	126
		1000	1009
10	$2^{45} \approx 3,52 * 10^{13}$	1	46
		10	54
		100	162
		1000	1267
25	$2^{300} \approx 2,04 * 10^{90}$	1	301
		10	322
		100	351
		1000	1807
50	$2^{1225} \approx 5,78 * 10^{368}$	1	1226
		10	1410
		100	1821
		1000	2237

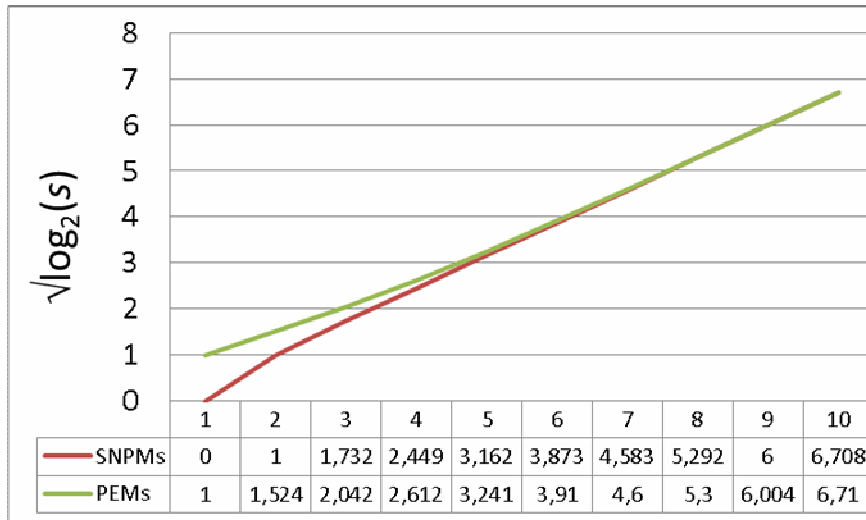
6. táblázat. Projektstruktúrák meghatározása

A kiértékelés során legfeljebb a buffer-halmazban szereplő pontértékekhez tartozó projektterveket értékeljük ki. A gyors kiértékelő algoritmusnak köszönhetően azonban még ilyen sok lehetséges projektstruktúra közül is ki lehet választani az első akár 1000 legnagyobb pontértékkel rendelkezőt.

### Lehetséges projekttervek meghatározása

Egy szakértői mátrixból a lehetséges projekttervek meghatározása két lépésben történik. Első lépésben a legnagyobb pontértékkel rendelkező projektváltozatokat kell meghatározni. Majd ezen belül kell megtalálni a legnagyobb pontértékkel rendelkező projektstruktúrákat. A legtöbb lehetséges projektstruktúra akkor jelenik meg, ha valamennyi tevékenységet megvalósítjuk. Ekkor a lehetséges projektstruktúrák száma (amennyiben minden tevékenység között értelmezhetünk sztochasztikus kapcsolatokat)  $2^{t(t-1)/2}$ .

Ugyanakkor, ha csak egy tevékenységet nem valósítunk meg, a lehetséges projektstruktúrák száma már drasztikusan csökken. Ezt láthatjuk a 7. ábrán is. A feladat itt is az első  $m$  darab projektterv (legjobb projektváltozaton belül megvalósítható legjobb projektstruktúra) meghatározása. Ennek maximális értéke  $s = \sum_{j=0}^t \binom{t}{j} 2^{j(j-1)/2}$ , ahol  $t$  a tevékenységek számát,  $s$  a lehetséges struktúrák számát jelöli. Az ábrán a lehetséges projektstruktúrák számának 2-es alapú logaritmus négyzetgyökét szemléltettük, hiszen egy  $t$  tevékenységet tartalmazó projektstruktúra száma  $s = 2^{t(t-1)/2}$ , így  $\sqrt{\log_2 s} = \sqrt{t(t-1)/2}$ , ami  $\sqrt{2}(t/2 - 1/4)$ -hez tart, így jó közelítéssel lineáris függvénye a tevékenységek számának (7. ábra). Látható, hogy a projektstruktúrák számát jó közelítéssel a legtöbb tevékenységet tartalmazó (ún. maximális) projektváltozat lehetséges projektstruktúráinak száma határozza meg.



7. ábra. Lehetséges projektstruktúrák száma



A fenti 6. táblázathoz hasonló eredményeket kaptunk a szakértői mátrix kiértékelése során is. 50 tevékenységet tartalmazó szakértői mátrix esetén, ahol a lehetséges projektstruktúrák száma:  $5,78 * 10^{368}$ , a kiértékelt projekttervek (projektváltozatok, és azon belül kiszámított projektstruktúrák) 2458 volt, ami alig magasabb az előző feladatban meghatározott projektstruktúrák számánál. Az első  $m$  projektstruktúra futásigénye:  $mO(t+k)$ , ahol  $k$  maximálisan  $t(t-1)/2$  lehet, így a futásidő ekkor  $mO(t(t+1)/2) \approx mO(t^2)$ -tel becsülhető. Annak köszönhetően, hogy azokat a projektstruktúrákat, amelyek egy adott korlát alatt vannak, nem kell kiértékelnünk, a véletlen pontértékeket tartalmazó szimulációkban jóval kevesebb, kvázi lineáris lépésben is meghatározhattuk az első legnagyobb pontértékkel rendelkező projektstruktúrát.

### Korlátokat figyelembe vevő projekttervek meghatározása

A logikai tervezés után következik a költség- és erőforrás-tervezés, melyet vagy a kiértékelt projektstruktúrákon végezhetünk el, vagy már a kiértékelés közben kiszámíthatjuk a maximális átfutási időket, költség- és erőforrásigényeket. Ehhez tudnunk kell, hogy a projektstruktúra költségének kiszámítása  $O(t)$ , hiszen itt egyszerűen csak össze kell adni a tevékenységeket. Az átfutási idő meghatározása topológikus rendezésen alapuló leghosszabb út keresésével  $O(t+k)$  [27]. Az átlagos erőforrásigények meghatározása (legkorábbi időpont-ra ütemezett tevékenységek erőforrás-igényét figyelembe véve):  $rO(t+k)$ , ahol  $r$  az erőforrások számát jelöli. Mivel azonban a leggyorsabb kiegyenlítési algoritmus is  $O(t^4)$  rendű, az optimális erőforrás-allokációs problémák pedig általában már ún. NP-teljes problémák [7], melyekre gyors algoritmus mind-ezidáig nem létezik, így az erőforrás-tervezést csak a lehetséges projektstruktúrák meghatározása után fogjuk elvégezni.

Ebben a feladatban véletlenszerűen generáltunk tevékenységekhez átfutási időket, költség- és erőforrás-igényeket. Az átfutási idők 1-10 nap között, a költségigények 100 és 1000 EUR között, a négyfajta erőforrásigény, mely jelölhetett emberi erőforrást és berendezéseket is, 1 és 5 diszkrét érték között bármilyen értéket felvehetett egyenlő valószínűséggel. A költségkorlát az összes költség (valamennyi tevékenység végrehajtása esetén a teljes költség)  $tpc = (60, 70, 80, 90, 100)\%$ -a, az átfutási idő az összes tevékenység soros végrehajtásának átfutási idejének  $tpt = 25, 50, 75\%$ -a volt. Az erőforrás-korlát minden esetben 20 egységnyi volt. A tevékenységek pontértékei 0,5 és 1 között vehettek fel értéket. Ezzel szimulálva, hogy a projekttervben szereplő tevékenységeket, ha lehetőségünk nyílik, akkor inkább valósítsuk meg. A kapcsolatok 0 és 1 között vehettek fel értékeket. Ebben a feladatban  $50 \times 50$ -es mátrixot tekintettünk, ahol valamennyi tevékenységet és valamennyi kapcsolatot is bizonytalanak tekintettünk. A lehetséges projektstruktúrák száma  $5,78 * 10^{368}$ . Ennek ellenére a legfeljebb 1815 lépésben meghatároztuk a korlátokat (idő és költségkorlátot) nem túllépő projekttervet. Ezután következhetett az idő- és erőforrás-korlátokat nem túllépő lehető legkorábbi kezdési időpontokat megadó optimális megoldás megtalálása. Mivel az eredményül



A karbantartási szolgáltatást megrendelő ügyfél a 8. ábra felső részén jelölt (1 db) operátori állomás karbantartási tevékenységeire szeretne kevesebb időt és költséget fordítani. Korlátként állomásonként 4 mérnökórát és 100 000 Ft/állomás költségkeretet adott meg, így a karbantartást végző szolgáltató vállalat munkatársainak (4 fő) ezekhez a korlátokhoz kell tartaniuk magukat a terület ellenőrzése és javítása során. Abban az esetben, ha minden egyes tevékenységet elvégezne, 4,85 mérnökóra lenne szüksége 1 karbantartónak, és 101 850 Ft-ba kerülne 1 állomás teljes átvizsgálása és javítása.

Az említett operátori állomás karbantartásához köthető modulkombinációt emeltem ki, amelyet tevékenységekre bontunk le. A tevékenységeket megvizsgálva, kockázati kategóriákba sorolhatjuk, így magas ( $1,0 \geq \text{kock.csop.} > 0,8$ ), közepes ( $0,8 \geq \text{kock.csop.} > 0,6$ ) illetve alacsony ( $0,6 \geq \text{kock.csop.} \geq 0$ ) kockázati csoportokat állapítottunk meg a vállalati szakemberek bevonásával. A felállított projekt szakértői mátrix átlójába foglaltuk össze a meghibásodási valószínűségeket. Ezek után már a karbantartás tevékenységeinek sorrendje könnyen megállapítható. A magas kockázatú karbantartási tevékenységek mellett esetünkben a közepes kockázatú tevékenységeket is szerepeltettük a karbantartási tervünkben. Majd a tevékenységek közti kapcsolatok figyelembevételével a tevékenységek sorrendjét is megállapítottuk. A modulok végrehajtását a szigorúan előírt tevékenységekkel kezdték meg, majd ezt a többi tevékenység végrehajtása követte. Egyszerre több tevékenység volt végrehajtható, hiszen számítógépes diagnosztika alkalmazásával egy időben több ellenőrző program is futtatható. Az erőforrás minden egyes operátori állomás esetében 1 karbantartó személyre korlátozódik.

Modulok	Tevékenységek	Tevékenységek											
		Standard Diagnosztika futtatása	Riasztások és események figyelése	Lemezhasznosítás ellenőrzése	VDU-k ellenőrzése	Számítógép ellenőrzése	Nyomtató ellenőrzése	Operációs Rendszer Diagnosztika futtatása	Adatgyűjtő alkalmazás ellenőrzése	Power down	Vírusvédelem ellenőrzése	Mentési folyamat ellenőrzése	
Speciális rendszer ellenőrzések - PM1	Standard Diagnosztika futtatása	1,00											
	Riasztások és események figyelése	0,05											
	Lemezhasznosítás ellenőrzése		0,70										
	képernyő ellenőrzése			0,85									
	Számítógép ellenőrzése	1,00	1,00	1,00	1,00	0,05	1,00						
	Nyomtató ellenőrzése					0,65							
	Operációs Rendszer Diagnosztika futtatása						0,90						
	Adatgyűjtő alkalmazás ellenőrzése							0,65					
	Power Down - lekapcsolás							1,00	1,00	1,00			
	Power Down - lekapcsolás												
Vírusvédelem ellenőrzése - VPS	Vírusvédelem ellenőrzése									1,00			
Mentési folyamat ellenőrzése - BUS	Mentési folyamat ellenőrzése, rendszeres mentések elvégzése (automatizált, manuális)	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,85	

9. ábra. operátori állomás alacsony kockázatú tevékenységekkel redukált kapcsolati mátrixa

Az idő- és költségkorlátokat figyelembe véve pedig a legnagyobb prioritással rendelkező projektváltozatot kerestük. Kimenatként olyan karbantartási tervet kaptunk (9. ábra), amelyben az alacsony kockázatú tevékenységek már nem szerepeltek. A költségek redukálódnak 33 850 Ft-tal. A mátrixos tervezési módszer alkalmazásával így a megrendelő által támasztott korlátoknak megfelelt az így összeállított karbantartási terv.

## 6 Összefoglalás

A bemutatott módszerek a lehetséges projekttervek meghatározásában, különböző szempontok szerinti meghatározásában nyújthatnak segítséget. A módszer végeredményeként egy olyan projekttervet kapunk, amely a megfogalmazott céloknak leginkább megfelel, tartalmazza a legfontosabb elvégzendő feladatokat, ugyanakkor a rendelkezésre álló idő- költség- és erőforráskereket sem lépi túl. A módszer alkalmazásának eredményeképpen projekttervet kapunk, amelyek már hagyományos projektmenedzsment szoftverekkel is könnyen menedzselhetők, nyomon követhetők. Ugyanakkor a megfelelő projektterv kiválasztásának szerepét egy erre épülő projekt szakértői rendszer végezheti el. Az itt bemutatott eljárás egy ilyen rendszer kialakításához is segítséget nyújthat.

## Köszönetnyilvánítás

Jelen tanulmány a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj támogatásával készült.

## Irodalom

1. Eisner H. (1962): A Generalized Network Approach to the Planning and Scheduling of a Research Project. *Operation Research*, 1962, vol 10. no. 1. pp. 115-125.
2. Roy, B. (1962): Graphes et ordonnancements. *Revue Française de recherche opérationnelle*. no. 25, 6 (10), page 323.
3. Kelley J. – Walker, M. (1959): Critical-Path Planning and Scheduling. *Proceedings of the Eastern Joint Computer Conference*.
4. Gantt, H. L. (1974): Work, Wages and Profit. *The Engineering Magazine*, New York, 1910; republished as *Work, Wages and Profits*, Easton, Pennsylvania, Hive Publishing Company, 1974, ISBN 0-87960-048-9
5. Al Sarraj, Z. M. (1990): Formal development of line-of-balance technique. *Journal of Construction Engineering and Management ASCE* 116 4, pp. 689–704
6. Project Management Institute (2006): *Projekt menedzsment útmutató – PM-BOK GUIDE*, Budapest, Akadémiai Kiadó, pp. 21–25, ISBN 963 05 8401 8
7. Brucker, P. – Drexler, A. – Möhring, R. H. – Neumann, K. – Pesch, E. (1999): Resource-constrained project scheduling: Notation, classification, models and methods. *European Journal of Operational Research*, Volume 112, Issue 1, pp. 3–41.

8. Danilovic, Mike – Browning, Tyson R. (2007): Managing complex product development projects with design structure matrices and domain mapping matrices. *International Journal of Project Management* 25:300–314.
9. Kosztyán, Zs. T. – Fejes, J. – Kiss, J. (2008): Sztochasztikus hálótervezési módszerek. *Sigma* 39. pp. 85–103.
10. Steward D. (1981): *System Analysis and Management: Structure, Strategy, and Design*. New York: Petrocelli Books.
11. Kosztyán Zsolt Tibor, Kiss Judit (2011): Mátrixalapú projekttervezési módszer. *Vezetéstudomány*. 2011/10 pp. 28–43.
12. Eppinger, Steven D. – Whitney, Daniel E. – Smith, Robert P. – Gebala, David A. (1994): A model-based method for organizing tasks in product development. *Research in Engineering Design*, 6:1–13.
13. Pritsker A. A. (1966): GERT: Graphical Evaluation and Review Technique. MEMORANDUM, RM-4973-NASA
14. Xiao, Renbin – Chen, Tinggui – Tao, Zhenwu (2007): Information modeling and reengineering for product development process. *International Journal of Management Science and Engineering Management* 2, no. 1, 64–74.
15. Minogue, P. (2011): Gantt-Like DSMs. Invest on Visualization. *Proceedings of the 13th International DSM Conference*, pp. 259–271.
16. Chen, Chun-Hsien – Ling, Shih Fu – Chen, Wei (2003): Project scheduling for collaborative product development using DSM. *International Journal of Project Management* 21:291–299.
17. Yan H, Wang Z, Jiang M. (2002): A Quantitative Approach to the Process Modelling and Planning in Concurrent Engineering. *Concurrent Engineering*. 10:97–111.
18. Yassine, A. – Falkenburg, D. – Chelst, K. (1999): Engineering design management: An information structure approach. *International Journal of Production Research*, 37(13). pp. 2957–75.
19. Tang, D. – Zhu, R. – Tang, J. – Xu, R. – He, R. (2010): Product design knowledge management based on design structure matrix. *Advanced Engineering Informatics*, pp. 159–166.
20. Chen, Shi-jie – Lin, Li (2002): A Project Task Coordination Model for Team Organization in Concurrent Engineering. *Concurrent Engineering*. 10:187–202.
21. Browning, T. R. – Eppinger, S. D. (2002): Modelling Impacts of Process Architecture on Cost and Schedule Risk in Product Development. *IEEE Transactions on Engineering Management*, 49(4), pp. 428–442
22. Kiss, J. – Kosztyán, Zs. T. (2010): Using PEM as a knowledge management tool – How can be used earlier experience at new IT and innovation projects? KMO (Knowledge Management in Organizations) 2010, Veszprém, May 18–19, 2010. pp. 204–217
23. Kosztyán, Zs. T. (2012): Challenges of the Project Planning Methods in the 21st Century 2012. *Problems of Management in the 21st Century* 2(5):46–60.
24. Kiss, J. (2012): Next generational applications – Supporting the planning phase of projects. World Congress on Information Technology. Barcelona, Spain, 2012. november 14–16. (proceedings megjelenés alatt)
25. Kosztyán Zs. T. (2013): Projekttervezési módszerek kihívásai a XXI. században. *Vezetéstudomány*, 2013. VII (megjelenés alatt)

26. Koszttyán, Zs. T. – Bencsik, A. – Póta, Sz.: Resource Allocation and its Distributed Implementation. *Innovations and Advanced Techniques in Computer and Information Sciences and Engineering*, (ed. Tarek Sobh), Springer 2007, ISBN: 978-1-4020-6267-4, pp. 511–518
27. Ahuja, R. K. – Magnanti, T. L. – Orlin, J. (1993): *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall.

#### MATRIX-BASED STRATEGIC PROJECT PLANNING

Beside network planning methods matrix-based methods can also be used in project management, primarily for supporting strategic decision-making. In this case either importance or probability of task completions can be described, and thus either importance or probability of possible project scenarios and project structures can be determined and ranked by their importance or probabilities. When using matrix-based project planning the main challenge is to select the project scenario and project structures regarding the management claims. In this study fast, exact algorithms are introduced to select the most important project scenarios or the least cost/time demanded project structures. This algorithm is a framework algorithm which can be a fundamental basis of a project expert system.

## TÁRSASÁGI HÍREK

### Beszámoló a 2012. és 2013. évi Kerekó Béla-díj átadásáról

A Gazdaságmodellezési Társaság által 2000-ben alapított Kerekó Béla-díjat a gazdaságmodellezés területén folytatott eredményes kutatómunkáért, illetve a Társaság szakmai tevékenységének tartós, aktív segítéséért lehet elnyerni. A díjat évente egy alkalommal a Gazdaságmodellezési Társaság mindenkori Elnöksége, mint kuratórium ítéli oda, 2011-ig 14-en nyerték el azt (a díjazottak névsorát a <http://www.gazdasagmodellezes.hu/> weboldalon lehet megtekinteni).

A 2012-es Kerekó Béla díjat Ligeti Csák kapta. Az Elnökség a döntés meghozatalakor Ligeti Csáknak a Központi Statisztikai Hivatalban végzett elismert szakmai munkáján túl figyelembe vette azt a fáradhatatlan és eredményes tevékenységet, amelyet a Társaság érdekében hosszú éveken keresztül kifejtett, különös tekintettel a kétévenkénti magyar operációkutatási konferenciák szervezésére, a Rózsadombi Délutánokra és egyéb hasznos szakmai kapcsolatépítő munkára. Ligeti Csák 2009 és 2013 között négy éven keresztül a GMT elnöke is volt.

Ligeti Csák a díjat a Társaságnak a budatétényi Vojnovich-Huszár villában rendezett szakmai konferenciájának esti programjában vette át 2012. június 4-én.

Az elnökség a 2013-as Kerekó Béla-díjat Komáromi Évának ítélte oda. Az indoklás tartalmazza Komáromi Évának az operációkutatás és a tágabb értelemben vett gazdasági modellezés területén kifejtett, mind az egyetemi oktatásban, mind pedig kutatómunkája során elért eredményeinek elismerését. A Társaság konferenciáin való aktív részvétel, az operációkutatási szakmában évtizedeken keresztül átívelő sikeres és önzetlen tevékenység, a fiatalokkal való fáradozás mind-mind olyan értéket képvisel, amelyekre az Elnökség döntése meghozatalakor alapozhatott.

A díjat Komáromi Éva a Magyar Operációkutatási Társaság balatonőszödi konferenciájának zárófogadásán vette át 2013. június 12-én.

Gratulálunk a díjazottaknak!

Temesi József

# CONTENTS

KOMÁROMI, ÉVA: Applying the Kullback-Leibler relative entropy function for determining priorities for the pairwise comparison matrix .....	1
MEDVEGYEV, PÉTER: Martingale measures and the law of the discounted present value .....	21
KOVÁCS, BALÁZS – KRUSZLICZ, FERENC – TORJAI, LÁSZLÓ: Assessing the helpfulness of online product reviews with supervised machine learning techniques .....	35
KOSZTYÁN, ZSOLT TIBOR: Matrix-based strategic project planning .....	65

## SCIENTIFIC LIFE

Report on awarding the 2012 and 2013 Krekó Béla Prize (Temesi, József) .....	95
--	----



# TARTALOM

KOMÁROMI ÉVA: A Kullback-Leibler relatív entrópia függvény alkalmazása páros összehasonlítás mátrix egy prioritásvektora meghatározására .....	1
MEDVEGYEV PÉTER: Martingálmértékek és a várható diszkontált jelenérték szabály .....	21
KOVÁCS BALÁZS – KRUSZLICZ FERENC – TORJAI LÁSZLÓ: Internetes termék kritikák hasznosságának megállapítása felügyelt gépi tanulással .....	35
KOSZTYÁN ZSOLT TIBOR: Mátrix-alapú, stratégiai projekttervezési eljárások ...	65
TÁRSASÁGI HÍREK	
Beszámoló a 2012. és 2013. évi Krekó Béla-díj átadásáról (Temesi József) .....	95

# SZIGMA

## Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Gazdaságmodellezési Társaság lapja

Főszerkesztő:

BESSENYEI ISTVÁN

PTE Közgazdaságtudományi Kar, H-7622 Pécs, Rákóczi út 80.

Tel.: 72/501-599, Fax: 72/501-553

e-mail: [essenyei@ktk.pte.hu](mailto:essenyei@ktk.pte.hu)

Társzerkesztők:

FÜLÖP JÁNOS

e-mail: [fulop@oplab.sztaki.hu](mailto:fulop@oplab.sztaki.hu)

HUNYADI LÁSZLÓ

e-mail: [laszlo.hunyadi@office.ksh.hu](mailto:laszlo.hunyadi@office.ksh.hu)

KOMLÓSI SÁNDOR

e-mail: [komlosi@ktk.pte.hu](mailto:komlosi@ktk.pte.hu)

KOVÁCS ERZSÉBET

e-mail: [erzsebet.kovacs@uni-corvinus.hu](mailto:erzsebet.kovacs@uni-corvinus.hu)

VÍZVÁRI BÉLA

e-mail: [vizvari@cs.elte.hu](mailto:vizvari@cs.elte.hu)

Szerkesztőbizottság:

CSERHÁTI ILONA, FORGÓ FERENC, LIGETI CSÁK, MELLÁR TAMÁS,  
MESZÉNA GYÖRGY, SISAKNÉ FEKETE ZSUZSA, SZÉP KATALIN,  
TEMESI JÓZSEF, VÖRÖS JÓZSEF

Terjeszti a Gazdaságmodellezési Társaság. A kiadvány megjelenését az MTA  
Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága támogatta.

ISSN 0039-8128

[www.sigma.ktk.pte.hu](http://www.sigma.ktk.pte.hu)